

### 3次元渦運動のギ正準形式とヴォートン解析

名大工 桑原真二 ( Sinzi Kuwabara )

#### §1. まえおき

ここでは縮まる、粘性のない流体の3次元渦運動を考  
えよ。2のような運動においては、位<sup>運</sup>ベクトル、渦度の対応  
する成分を共役正準座<sup>標</sup>ととり、その系のヘリシティーの半  
分をハミルトニアンと取りとギ正準形式に書けることを示す。  
対応する通常の正準方程式の右辺の符号が正置になるのに対し、  
ギ正準形式のそれは逆に正となる。

2のギ正準方程式から近似的にヴォートンの方程式を導出  
する。渦糸の切断と再結合には粘性の効果が必要である。数  
値種命において、空間、時間メッシュの分割から人工粘性が生  
ずるような、ヴォートン分割がそのような効果をもつと考  
えても全く不合理ではなからう。そこで渦の切断、再結合を  
ヴォートン近似によって可能であると考之う。

#### §2. 3次元渦運動のギ正準形式

無限に広い領域での縮まる、粘性のない流体の渦運動

は、Lagrange座標  $a = (a_1, a_2, a_3)$  と時刻  $t$  に独立な数とす  
る位置ベクトル  $x = x(a, t)$  ( $x(a, 0) = a$ ), 速度ベクトル  
 $\omega = \omega(a, t)$  を用いて

$$\frac{Dx}{Dt} = v(a, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{r^3} \omega(a', t) \times R d^3 a' \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\omega}{Dt} &= e_\alpha \omega_\lambda \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\lambda} \quad (e_\alpha: \text{デカルト単位ベクトル}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint \left[ -\frac{1}{r^3} \omega(a) \times \omega(a') - \frac{3}{r^5} (\omega \cdot R) (\omega(a') \times R) \right] d^3 a' \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$R = x(a, t) - x(a', t), \quad r = |R|$$

と書くことが出来ます。ここで  $v(a, t)$  は流線ベクトルで渦度  
をもついて Biot-Savart の法則で表わされている。2.2 では  
無限遠からの効果はないと仮定されている。右方 (2.2) 又は  
以下では、積の略記号がもちいられる。(2.1) (2.2) は渦運動  
を論ずるのに完全に閉じた形式である。すなわち、 $\omega(a, t)$  の  
初期条件 ( $\text{div } \omega(a, 0) = 0$ ) を与えれば、以後の渦運動は完全  
に決定される。(2.2) は容易に

$$\begin{aligned} \frac{D\omega}{Dt} &= e_\alpha \omega_\lambda \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\lambda} \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint \left[ \frac{1}{r^3} \omega(a) \times \omega(a') - \frac{3}{r^5} R (R \cdot (\omega(a) \times \omega(a'))) \right] d^3 a' \end{aligned} \quad (2.2')$$

と書きなおすことが出来ます。

ここで汎関数微分を考へる。I が 1 変数  $x$  の関数  $f(x)$  の  
汎関数、すなわち  $I = I[f(x)]$  であるとき、 $f(x)$  を少し変化

$I$  を  $f(x) + \delta f(x)$  としたとき、 $I$  の変化  $\delta I$  が

$$\begin{aligned}\delta I &= I[f(x) + \delta f(x)] - I[f(x)] \\ &= \int A(x) \delta f(x) dx + O(\delta f^2)\end{aligned}\quad (2.3)$$

と表わされるとき、 $A(x)$  を  $I$  の  $f(x)$  に対する汎関数微分といふ

$$A(x) = \frac{\delta I}{\delta f(x)}\quad (2.4)$$

と表わす。  $f$  が  $n$  変数  $x_1, \dots, x_L$  の関数であればあるには、対応する式は

$$\begin{aligned}\delta I &= I[f(x_1, \dots, x_L) + \delta f(x_1, \dots, x_L)] - I[f(x_1, \dots, x_L)] \\ &= \int \dots \int A(x_1, \dots, x_L) \delta f(x_1, \dots, x_L) d^L x + O(\delta f^2)\end{aligned}\quad (2.3')$$

$$A(x_1, \dots, x_L) = \frac{\delta I}{\delta f(x_1, \dots, x_L)}\quad (2.4')$$

又、多変数関数の各数の関数  $f_1(x_1, \dots, x_L), \dots, f_M(x_1, \dots, x_L)$  の汎関数のばあいは

$$\begin{aligned}\delta I &= I[f_1 + \delta f_1, \dots, f_M + \delta f_M] - I[f_1, \dots, f_M] \\ &= \int \dots \int \sum_{m=1}^M A_m(x_1, \dots, x_L) \delta f_m(x_1, \dots, x_L) d^L x + O(\delta f^2)\end{aligned}\quad (2.3'')$$

$$A_m(x_1, \dots, x_L) = \frac{\delta I}{\delta f_m(x_1, \dots, x_L)}\quad (2.4'')$$

となる。

今

$$I = \int F(f(x)) dx\quad (2.5)$$

9 形の汎関数の場合には

$$\begin{aligned}\delta I &= \int F(f + \delta f) dx - \int F(f) dx \\ &= \int \frac{\partial F}{\partial f} \delta f(x) dx + O(\delta f^2)\end{aligned}$$

と仮定して

$$\frac{\delta I}{\delta f} = \frac{\partial F}{\partial f} \quad (2.6)$$

である。

$x(a)$ ,  $\omega(a)$  の汎関数  $H[x, \omega]$  は

$$\begin{aligned}H[x, \omega] &= \frac{1}{8\pi} \iiint \iiint \frac{1}{r^3} \omega(a') \cdot (\omega(a'') \times \mathbb{P}) d^3 a' d^3 a'' \\ &= \frac{1}{8\pi} \iiint \iiint \frac{1}{r^3} \epsilon_{\lambda\beta\gamma} \omega_\lambda(a') \omega_\beta(a'') r_\gamma d^3 a' d^3 a'' \quad (2.7)\end{aligned}$$

$$\mathbb{P} = x(a', t) - x(a'', t), \quad r = |\mathbb{P}|$$

と定義すると

$$\begin{aligned}\frac{\delta H}{\delta \omega_\alpha(a)} &= \frac{1}{8\pi} \iiint \iiint \frac{1}{r^3} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \omega_\beta(a'') (x_\gamma(a) - x_\gamma(a'')) d^3 a'' \\ &\quad + \frac{1}{8\pi} \iiint \iiint \frac{1}{r^3} \epsilon_{\lambda\alpha\gamma} \omega_\lambda(a') (x_\gamma(a') - x_\gamma(a)) d^3 a' \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{r^3} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \omega_\beta(a') r_\gamma(a, a') d^3 a' \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{r^3} [\omega(a') \times \mathbb{P}]_\alpha d^3 a' \quad (2.8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta H}{\delta x_\alpha(a)} &= \frac{1}{4\pi} \iiint \left( \frac{1}{r^3} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \omega_\beta(a) \omega_\gamma(a') \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{r^5} r_\alpha(a, a') \omega_\alpha(a) \epsilon_{\lambda\beta\gamma} \omega_\beta(a') r_\gamma(a, a') \right) d^3 a'\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iiint \left[ \frac{1}{2^3} \omega(a) \times \omega(a') - \frac{3}{2^5} P(\omega(a) \cdot (\omega(a') \times P(a, a'))) \right] d^3 a' \quad (2.9)$$

とす。 (2.8), (2.9) を (2.1), (2.2) と比較するに由りて

$$\frac{Dx}{Dt} = \frac{\delta H}{\delta \omega_a} \quad (2.10)$$

$$\frac{D\omega_a}{Dt} = -\frac{\delta H}{\delta x} \quad (2.11)$$

とす。これらの右辺のいずれか<sup>12</sup>に負号がつけば通常の正準形式となり。そこでこの場合にはキ正準形式 *psend-canonical formulation* と呼ぶことにする。

ヘリシティ  $H_L(t)$  は

$$\begin{aligned} H_L(t) &= \iiint v(x, t) \cdot \omega(x, t) d^3 x \\ &= \iiint v(a, t) \cdot \omega(a, t) d^3 a \end{aligned}$$

と定義すれば、(2.1) より

$$H_L(t) = \frac{1}{4\pi} \iiint \iiint \frac{1}{2^3} \omega(a, t) \cdot (\omega(a', t) \times P) d^3 a d^3 a' \quad (2.12)$$

となり、(2.9) はヘリシティの導出であることがわかる。

5. キ正準形式からポアノート近似の導出

今コンパクトな渦の場 ( $\omega$  キ 0 の領域の閉包が有界、閉

集合) を考え、これを細胞に分割し、 $l=1, \dots, L$  と名前をつけ、各々を力学系の単位として近似する。特性関数

$$\Lambda^3(a, l) = \begin{cases} 1, & a \in l\text{-細胞} \\ 0, & a \notin l\text{-細胞} \end{cases} \quad (3.1)$$

を定義する。そこで

$$\iiint \Lambda^3(a, l) d^3a = V(l) \quad (3.2)$$

は  $l$  細胞の体積で、時間的に一定である。後の細胞の分裂を考えると、厳密には分裂(あるいは初期)から次の分裂の間体積は保存する。

細胞の運動を考えた時、細胞の広がった位置ベクトル  $X(a, t)$  ( $a \in \Lambda^3(a, l) = 1$ ) の位置ベクトル  $X_\alpha(l, t)$  で表われ、又渦度  $\omega(a, t)$  は  $X_\alpha(l, t)$  に集中していつとして

$$x_\alpha(a, t) = \sum_l X_\alpha(l, t) \Lambda^3(a, l) \quad (3.3)$$

$$\omega_\alpha(a, t) = \sum_l \Omega_\alpha(l, t) V(l) \delta^3(a - A(l)) \quad (3.4)$$

$$X_\alpha(l, t) = x_\alpha(A(l), t) \quad (3.5)$$

と近似する。(3.4) の  $V(l)$  は  $\Omega_\alpha$  が渦度の次元をもつように入れたものである。このような渦場を細胞に分割し、単一の位置ベクトル  $X(l, t)$  と渦度ベクトル  $\Omega(l, t)$  で表わすことにより、無限連続自由度の力学系を可附番自由度の力学系で近似する方法をヴォートン・モデルとよぶことにする。

(2.7)の  $H$  の  $x, \omega$  に (3.3), (3.4) の近似式を代入し、積分を実行すれば、 $H$  は  $X_\alpha(l, t), \Omega_\alpha(l, t)$  の関数とみられる。

そこで  $X, \Omega$  について 1 次の変分をとれば

$$\delta H = \sum_l \left( \frac{\partial H}{\partial X_\alpha(l)} \delta X_\alpha(l) + \frac{\partial H}{\partial \Omega_\alpha(l)} \delta \Omega_\alpha(l) \right) \quad (3.6)$$

とす。又、 $H$  の  $x, \omega$  について 1 次の変分をとれば

$$\delta H = \iiint \left( \frac{\delta H}{\delta \lambda_\alpha(a)} \delta \lambda_\alpha(a) + \frac{\delta H}{\delta \omega_\alpha(a)} \delta \omega_\alpha(a) \right) d^3 a \quad (3.7)$$

とす。更に  $\delta \lambda_\alpha(a), \delta \omega_\alpha(a)$  を (3.3), (3.4) を使って

$$\left. \begin{aligned} \delta \lambda_\alpha &= \sum_l \delta X_\alpha(l, t) \Lambda^3(a, l) \\ \delta \omega_\alpha &= \sum_l \delta \Omega_\alpha(l, t) V(l) \delta^3(a - A(l)) \end{aligned} \right\} (3.8)$$

と近似すれば、(3.7) は

$$\delta H = \sum_l \left[ \iiint \frac{\delta H}{\delta \lambda_\alpha(a)} \Lambda^3(a, l) d^3 a \delta X_\alpha(l, t) + \iiint \frac{\delta H}{\delta \omega_\alpha(a)} \delta^3(a - A(l)) d^3 a V(l) \delta \Omega_\alpha(l, t) \right] \quad (3.9)$$

とす。そこで (3.6) と (3.9) は 2 つの異なるルートを経て  $H$  の変分の近似を行なったわけであるが、この両者が一致しなければならないという条件 (両立条件) を課せば

$$\frac{\partial H}{\partial X_\alpha(l)} = \iiint \frac{\delta H}{\delta \lambda_\alpha(a)} \Lambda^3(a, l) d^3 a \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \Omega_{\alpha}(l)} = \iiint \frac{\delta H}{\delta \omega_{\alpha}(a)} \delta^3(a - A(l)) d^3a V(l) \quad (3.11)$$

が成立する。

次に (2.10), (2.11) において  $x_{\alpha}, \omega_{\alpha}$  は (3.3), (3.4) の近似をもちいた場合の対応する方程式を求めよう。(3.10), (3.11) の右辺の形から (2.10) は  $\iiint d^3a \delta^3(a - A(l)) V(l)$  の、(2.11) は  $\iiint d^3a \Lambda^3(a, l)$  のオペレーターとして  $\epsilon$  は  $\epsilon = \epsilon$  と両者の右辺は左辺の偏微分で表わされる。すなわち

$$\iiint \frac{DX_{\alpha}}{Dt} \delta^3(a - A(l)) d^3a V(l) = \frac{\partial H}{\partial \Omega_{\alpha}(l)} \quad (3.12)$$

$$\iiint \frac{D\omega_{\alpha}}{Dt} \Lambda^3(a, l) d^3a = \frac{\partial H}{\partial X_{\alpha}(l)} \quad (3.13)$$

とする。左辺の積分を実行すると結局

$$\frac{DX_{\alpha}(l, t)}{Dt} = \frac{1}{V(l)} \frac{\partial H}{\partial \Omega_{\alpha}(l)} \quad (3.14)$$

$$\frac{D\Omega_{\alpha}(l, t)}{Dt} = \frac{1}{V(l)} \frac{\partial H}{\partial X_{\alpha}(l)} \quad (3.15)$$

とする。 (2.7) に (3.3), (3.4) を代入し、積分を実行すると

$$H = \frac{1}{8\pi} \sum_{l'} \sum_{l''} \frac{\epsilon_{\alpha\beta\gamma}}{R(l', l'', t)}, \Omega_{\alpha}(l', t) \Omega_{\beta}(l'', t) R_{\gamma}(l', l'', t) \\ V(l') V(l'') \quad (3.16)$$

$$R_{\alpha}(l', l'') = X_{\alpha}(l', t) - X_{\alpha}(l'', t), \quad R(l', l'', t) = |R(l', l'', t)|$$

とする。ここで  $l' = l''$  の寄与は  $0/0$  となり、総和において



2の項はのぞくものとす。 (3.16) を (3.14), (3.15) に代入しベクトル形で書けば

$$\frac{D\mathbf{X}(l,t)}{Dt} = \frac{1}{4\pi} \sum_{l'}' \frac{v(l')}{R(l',l'',t)^3} \Delta\mathbf{Q}(l',t) \times \mathbf{R}(l, l', t) \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\Delta\mathbf{Q}(l,t)}{Dt} = & \frac{1}{4\pi} \sum_{l'}' \frac{v(l')}{R(l, l', t)^3} \left[ \frac{1}{R(l, l', t)^3} \Delta\mathbf{Q}(l,t) \times \Delta\mathbf{Q}(l',t) \right. \\ & \left. - \frac{3}{R(l, l', t)^5} R(l, l', t) \left\{ \Delta\mathbf{Q}(l,t) \cdot (\Delta\mathbf{Q}(l',t) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \mathbf{R}(l, l', t)) \right\} \right] \quad (3.18) \end{aligned}$$

とす。こので  $\sum$  についで  $l'$  は  $l'=l$  の項をのぞくことを意味す。これがヴォートンの基礎方程式である。又、(2.10) (2.11) より適当な近似をもちいて、渦糸近似をたすことができる。

#### § 4. 分裂するヴォートンと時間メッシュの短縮

以前に行つた結果から2つの渦輪の数値実験<sup>4)</sup>で、始めは割合にずんぐりしたヴォートンも、ヴォートン間の非線形相互作用が強くなると、渦糸の成長のばし効果のため、急速に細長いヴォートンに成長することがわかつた。このようにおぼえてはヴォートンを単一の位置ベクトルと渦度ベクトルで表わすのは近似が悪く、ヴォートンの分裂を考へる必要がある。ヴォートンは、実際には時間の経過と共に複雑な変形をうけ

るのである。しかし、その変形を簡単に長さ $\lambda$ と断面積 $\sigma$ の变化で表わしうのと考へる。すなわち、各ヴォートンに相当長さ、相当断面積という概念を導入し、ヴォートンの変形を大局的に考へる。今1つのヴォートンに着目し、その相当長さ(渦度と平行)を $\lambda(t)$ と相当断面積を $\sigma(t)$ とすれば、断面を円形と仮定した時の相当直径は $2\sqrt{\sigma(t)/\pi}$ と存する。そこで(相当)太さ比 $T_h(t)$ を

$$T_h(t) = \frac{2\sqrt{\sigma(t)/\pi}}{\lambda(t)} \quad (4.1)$$

で定義する。

ヴォートンを渦糸の1部と考へれば、その断面積と渦度の積すなわち循環 $\Gamma$ の断面積と長さの積すなわち体積は時間的に不変と考へられる。そこで

$$\omega(t)\sigma(t) = \Gamma = \text{不変} \quad (4.2)$$

$$\lambda(t)\sigma(t) = V = \text{不変} \quad (4.3)$$

という条件を課すことにする。初期に $\Gamma, V$ は与えられるから時々刻々の $\omega(t)$ を計算すれば、(4.2), (4.3)によつて各時刻の $\sigma(t)$ と $\lambda(t)$ が、したがつて $T_h(t)$ も(4.1)によつて計算するこゝが出来る。

実際の計算にあつては $T_h(t)$ に下限 $T_{h0}$ をもうけ、 $T_h(t)$ が $T_{h0}$ に達したならば、ヴォートンは分裂すると考へる。

縦方向に2つの等しいヴォートンに分裂するとすれば、そのヴォートンは消滅して、新たに  $X$  から  $\Omega$  の正置の側に相当長さの  $1/4$  の位置に、渦度が (分裂前と) 同じ、相当長さが半分、相当断面積が同じ、2つのヴォートンが発するものと考へる。各ヴォートンについてこのように評価を行って、計算を進め子わけである。

ヴォートンの分裂を考へることは、流場の場の特徴的長さが減小することを意味する。このような状況では、特徴的時間も減小すると考へられる。この力率率の衰減で時間を表わすものを  $\omega$  とし  $|\omega(a, t)|^{-1}$  がある。そこで

$$\omega_{\max}(t) = \text{Max}_a |\omega(a, t)| \quad (4.4)$$

を定義し、初期の  $\omega_{\max}(t)$  が2倍にならば、初期の時間ステップ  $\Delta t(0)$  の半分に新しい時間ステップとして、以下同様に積分を実行するものとする。各時刻の時間ステップは

$$\Delta t(t) = \Delta t(0) / 2^{\text{Int}(\log_2(\omega_{\max}(t)/\omega_{\max}(0)))} \quad (4.5)$$

である。Int は小数部分をのこす整数化することを意味する。

### 5.5. 結ぶに2つの渦輪

半径  $a$ 、断面~~積~~<sup>半</sup>径  $b$ 、循環  $\Gamma$  の、同形、同じ強さの2つの渦輪が、各渦輪を含む面が直交し、互いの中心を置くよう初期配位から、それらの発展をヴォートン・モデルで計算

す。規格化は

$$x/a, t/(a^2/\Gamma), v/(AT/a), \omega/(\Gamma/a^2) \quad (5.11)$$

等であり。初期バウンダリーは

$$b/a = 0.1, \quad \Delta t(0) = 0.01 \quad (5.2)$$

初期には  $20 \times 2 = 40$  位のヴォートンがありそのとす。

しながつて

$$Th(0) = 0.6366.. \quad (5.3)$$

であり。太さ  $b$  の下限は  $Th_b = 0.5$  ととり。数値種合は変形 Euler 法とするから、(3.19), (3.18) の右辺で時間微分を計算するとき、その時刻とその1ステップ先のそれ(近似値)の平均値をとる方法で行った。

第1回は渦輪の発展を3面図で示してあり。図中の  $NT$  は渦輪にふくまれないヴォートンの数、 $DT$  はその時刻における時間ステップを示す。以下、エンストロフィ (第2図,  $E_s$ ), ヘリシティ (第2図,  $H_L$ ), 運動エネルギー (第3図,  $E_U$ ), 全運動エネルギー (第3図,  $T_E$ ), 渦輪の運動量 (第4図,  $P_U$ ), 全運動量 (第4図,  $T_P$ ), 角運動量 (第5図,  $AP_U$ ), 全角運動量 (第5図,  $TAP$ ), 全渦度 (第6図,  $T_O$ ), 渦度の初期値で規格化した  $L_2$  ノルム  $(E_s(t)/E_s(0))^{0.5}$  及び  $\omega$  ノルム  $(\omega_{max}(t)/\omega_{max}(0))$  の逆数 (第7図) の時間発展が示されている。各々  $t=0 \sim 5$  及び  $t=5 \sim 5.055$

が別の図に示してある。第6図の右にはヴォートンの最小長さ（横軸）と渦輪全体の長さ（縦軸）の各時刻における値の軌路が両対数グラフで示してある。

なお、上の種分量は、

$$E_s(t) = \frac{1}{2} \iiint \omega(a, t)^2 d^3a \quad (5.4)$$

$$H(t) = \iiint w(a, t) \cdot \omega(a, t) d^3a \quad (5.5)$$

$$E(t) = \frac{1}{8\pi} \iiint \iiint \frac{1}{2} \omega(a, t) \cdot \omega(a', t) d^3a d^3a' \quad (5.6)$$

$$P_\alpha(t) = \frac{1}{2} \iiint \epsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\beta(a, t) \omega_\gamma(a, t) d^3a \quad (5.7)$$

$$AP_\alpha(t) = \frac{1}{2} \iiint (x_\alpha(a, t)^2 - x(a, t)^2) \omega_\alpha(a, t) d^3a \quad (5.8)$$

$$TO_\alpha(t) = \iiint \omega_\alpha(a, t) d^3a \quad (5.9)$$

を総和の形で示しておいて計算した。(5.6)では適当な近似で、自己エネルギー（ $a \equiv a'$ ）も考慮した。(5.8)の右辺では和の記号はつかわれていない。

## §6. 渦のセル

この論文では、3次元渦運動において、渦の位置ベクトルと渦度の対応する成分を正準共役変数に与えれば、正規形式で表す、この力学系を完全に閉じた形で論じうることを示した。渦場の細胞分割を行い、位置ベクトルと渦度の適当な近似を行って、細胞を1つの位置ベクトルと渦度ベクトルで表わすとヴォートン近似がえられることを示した。

渦の引きのばし効果によって、始めずんぐりしたヴォートンも時間の経過と共に急速に細長いヴォートンになる子ンとがわかってい子。そこで細長いヴォートンを1つの位置ベクトルと渦度が表わすのでは近似がわるいので、ヴォートン9分裂を考慮し子。各ヴォートンに相対太さ比を定義し、太さ比の下限をもうけ、それに達する子と更に分裂する子という条件を課し子。ヴォートンの分裂は流木の特徴的長さの減少を意味し、それともなうて特徴的時間も減少する子から、時間種合にあたり、時間メッシュも減少させ子必要があ子。流木の変数の中で  $\omega(\alpha, t)^{-1}$  が時間の次元をもつ。そこで流木の中の渦度の最大値の逆数が半分になりと時間メッシュを半分にするように時間種合の方法をとつ子。

以上の方法を終つ子2つの渦輪の運動の解析に  $t=0 \sim 5.055$  の間でもちい子。ヴォートンの分裂、時間メッシュの減少の経過は次のようであつ子。  $t=0.56$  で最初の分裂(1次)が起り、  $t=1.86$  で2次、  $t=2.545$  で3次、  $t=3.4825$  で4次、  $t=4.7900$  で5次、  $t=4.98875$  で6次、  $t=5.0025$  で7次、  $t=5.003375$  で8次の分裂が各々最初に起つ子。したがつて  $t=5.055$  の時刻に最初のヴォートンの64分の1のヴォートンが存在してい子とてい子。時間メッシュは  $t=0$  で  $\Delta t=0.01$ 、  $t=1.92$  で  $\Delta t=0.005$ 、  $t=3.070$  で  $\Delta t=0.0025$

に、 $t=4.9600$  で  $\Delta t=0.00125$  に、 $t=4.9975$  で  $\Delta t=0.000625$  に、 $t=5.0375$  で  $\Delta t=0.0003125$  に減らした。  
 $t=4$  付近からヴォートンの数が急速にふえ、 $t=5$  少し前から時間メッシュの減下が急速に変わった。したがって  $t=5$  ~  $5.055$  の計算の方が  $t=0 \sim 5$  の計算時間より長しか) 子という結果になった。

オ1図の  $t \geq 5$  の図を見ても、2つの渦輪のつながりかえり起っている。2つの渦輪が接近した付近では非常に複雑な変形が起っている。しかし、他方の渦輪の効果よりも、自分自身の相互作用によってより多く変形しているように見える。

このカチ系の保存量、全エネルギー(オ3図)、全運動量(オ4図)、全角運動量(オ5図)、全渦度(オ6図)の保存は大体満足しているものだが、ヘリシティは  $t=2$  近くまでは一定で、それ以後は振動する。この原因はよくわかっていない。オ6図にはヴォートンの最大長さ  $L$  と渦輪全体の長さ  $l$  の時間的軌跡を両対数グラフで示してある。渦輪の渦線が理想的フラクタル曲線とすれば、その傾斜が  $1-D$  を与え、フラクタル次元  $D$  がわかればよい。上の図からこれをおおよそと大体  $D=1.05$  とする。

渦度の  $1$  次元として  $L_2$  次元  $\left[ \int \omega(a,t)^2 da \right]^{1/2}$  は  $a$

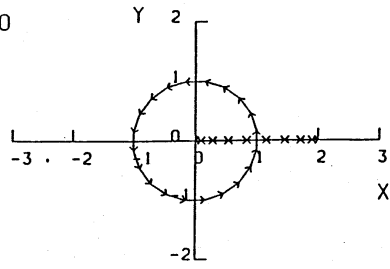
$L_\infty / \omega \omega_{\max}(t) = \text{Max}_{\omega} |\omega(q,t)|$  を考へる。これらと  
 最期値で規格化し、逆散をとつたものの時間的發展がオク図  
 に示してある。それから  $t=5$  の少し先で、これらの量か  
 らのようにならぬ。つまり渦度の  $\omega$  が散散する傾  
 向がよみとれり。これは Euler 方程の爆発の徴候と考へら  
 れよう。

### 参考文献

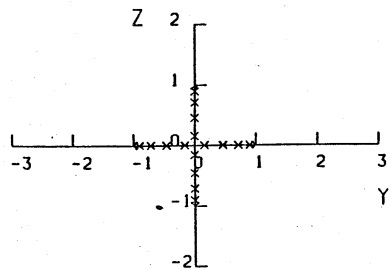
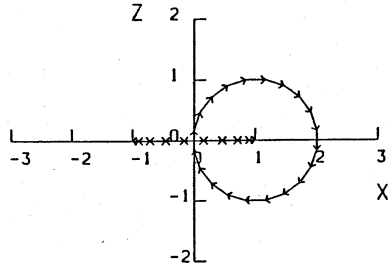
- 1) J. T. Beale and A. Majda: Math. Computation 39(1983)1.
- 2) J. T. Beale and A. Majda: Math. Computation 39(1983)29.
- 3) S. Kuwabara: Proc. of the Symp. on Mech. for Space Flight (1984)15.
- 4) S. Kuwabara: Proc. of the Sump. on Mech. for Space Flight (1985)31.
- 5) S. Kuwabara: J. Phys. Soc. Japan 54(1985) 4881.
- 6) A. Leonard: in Turbulent Shear Flows 2 (ed. by L. J. S. Bradbury et al., Springer, 1980).
- 7) B. Mandelbrot: in Turbulence and NS Equation (ed. by R. Teman, Springer, 1976)121.
- 8) E. A. Novikov: Sov. Phys., JETP 57(1983)566.
- 9) P. G. Saffman: in Transition and Turbulence (Academic Press, 1981)149.



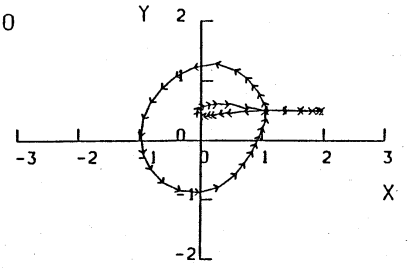
T= 0.00000  
NV= 20



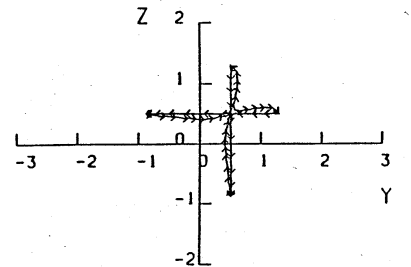
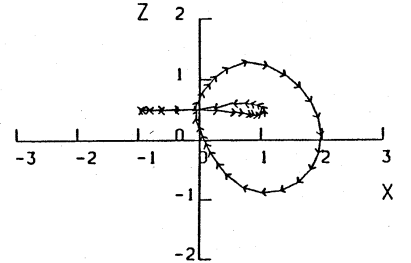
DT= 0.0100000



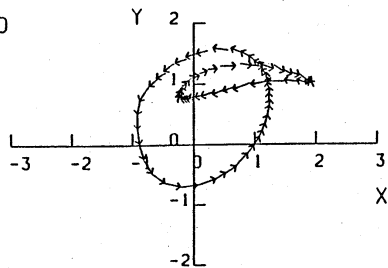
T= 2.00000  
NV= 26



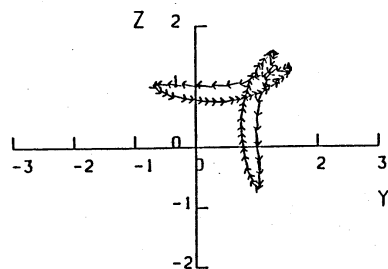
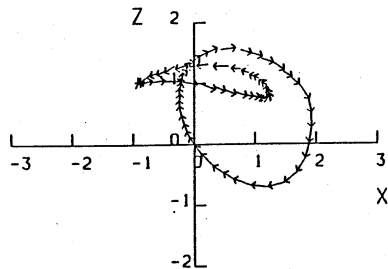
DT= 0.0050000



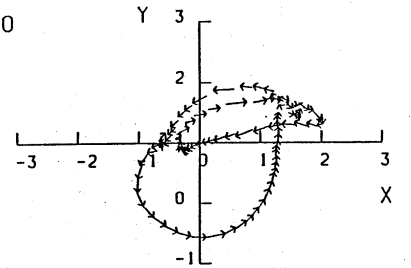
T= 4.00000  
NV= 38



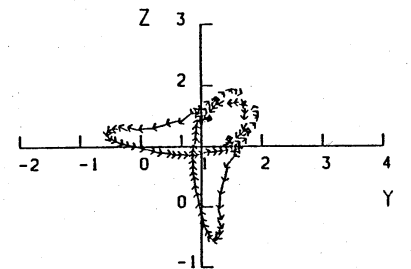
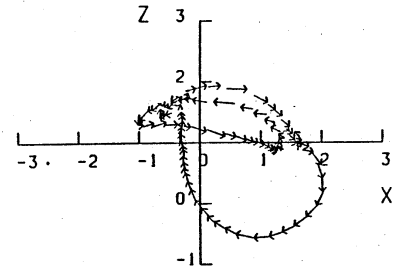
DT= 0.0025000



T= 5.00000  
NV= 52

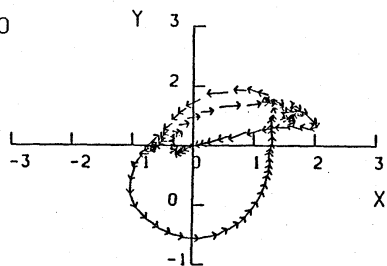


DT= 0.0006250

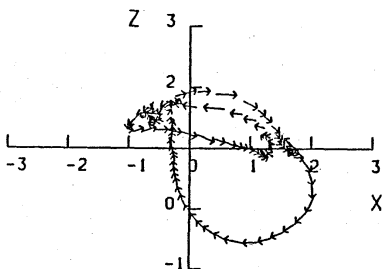


第1図. 絡まった2つ渦輪の時間的发展1 (3面図)

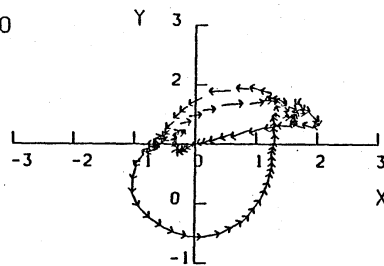
T= 5.02000  
NV= 58



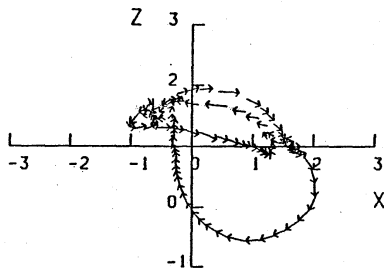
DT= 0.0006250



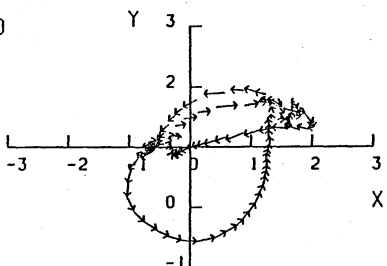
T= 5.04000  
NV= 59



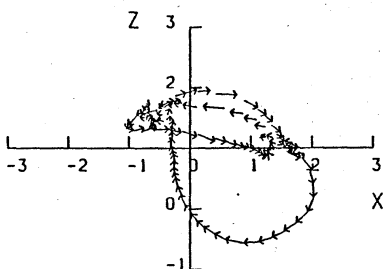
DT= 0.0003125



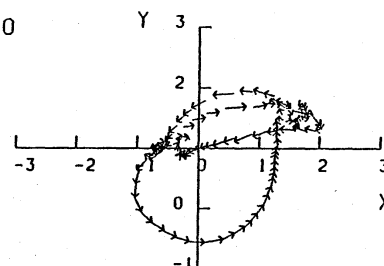
T= 5.05000  
NV= 61



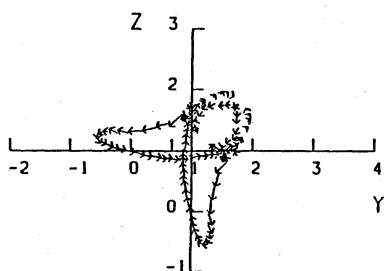
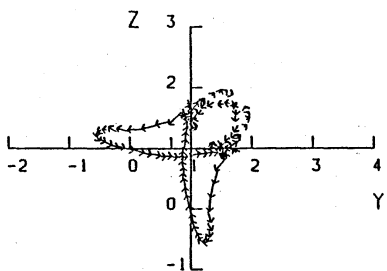
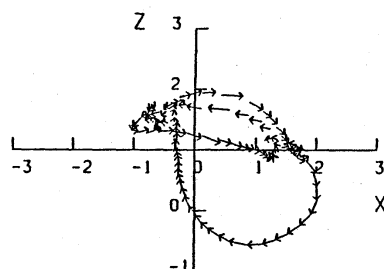
DT= 0.0003125



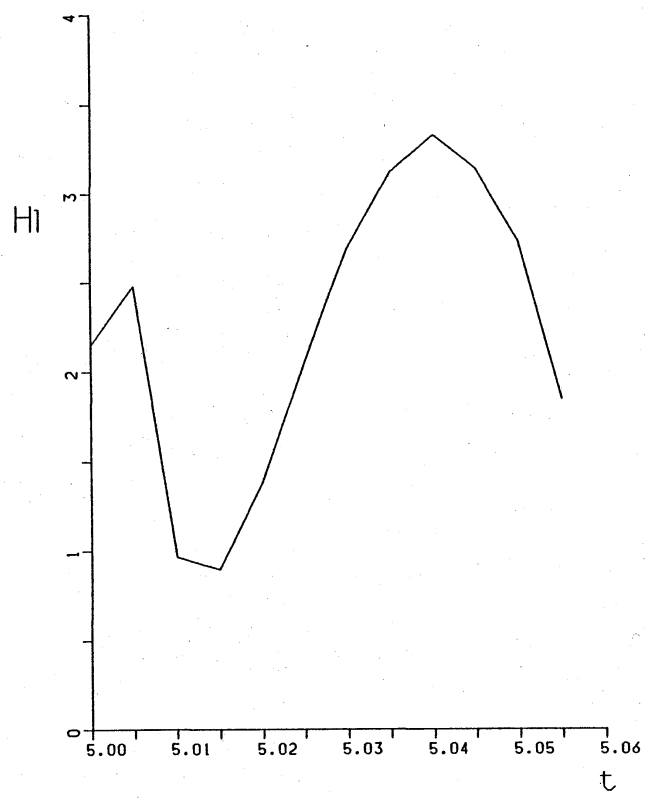
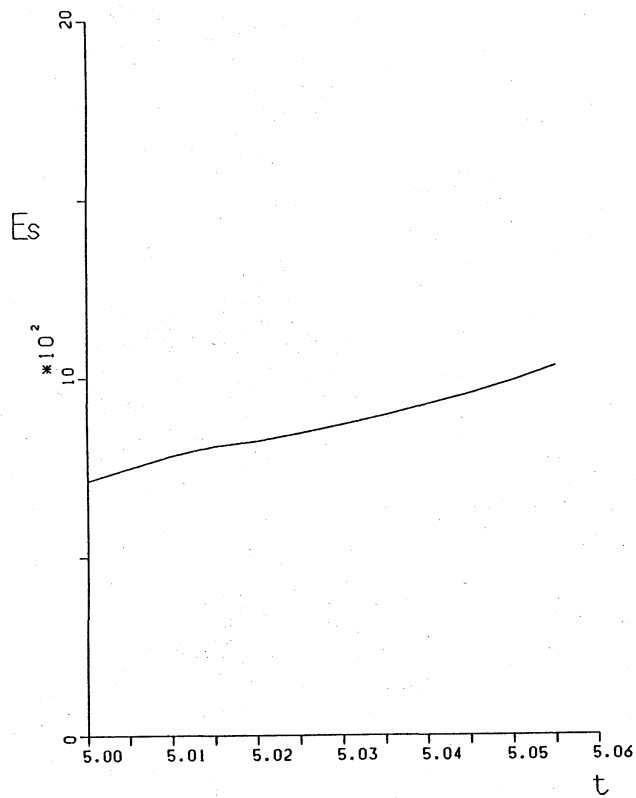
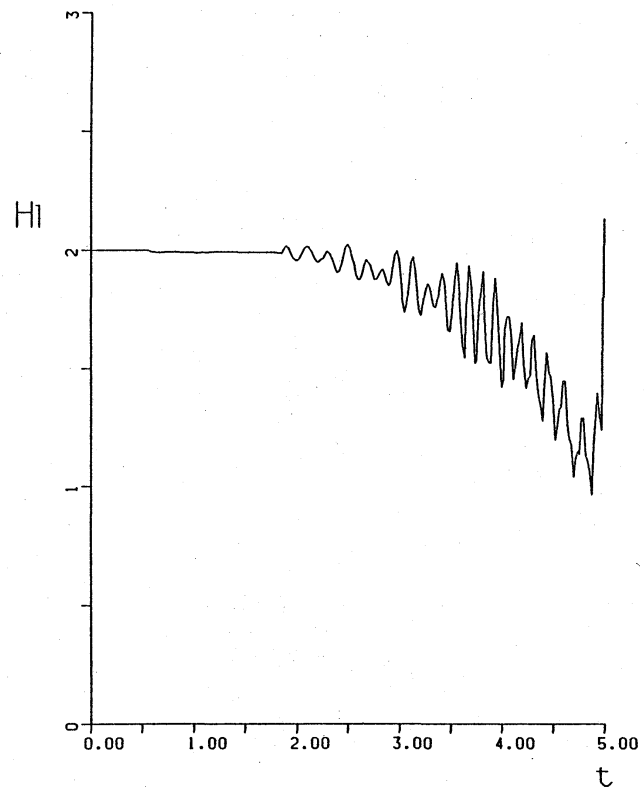
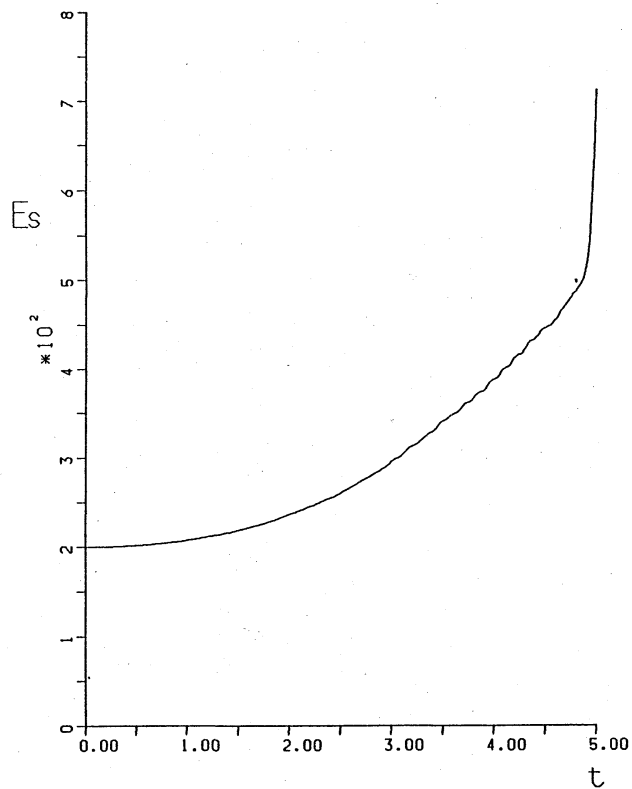
T= 5.05500  
NV= 63



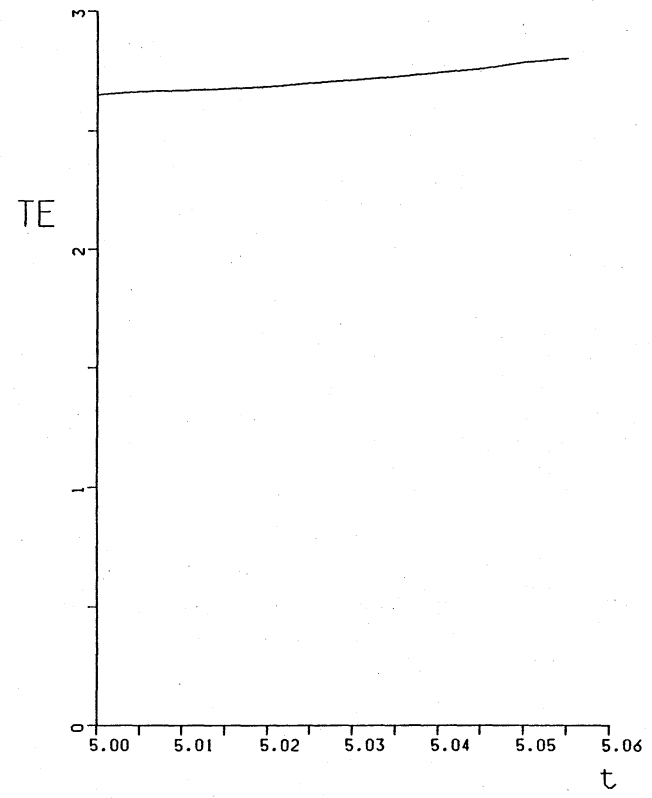
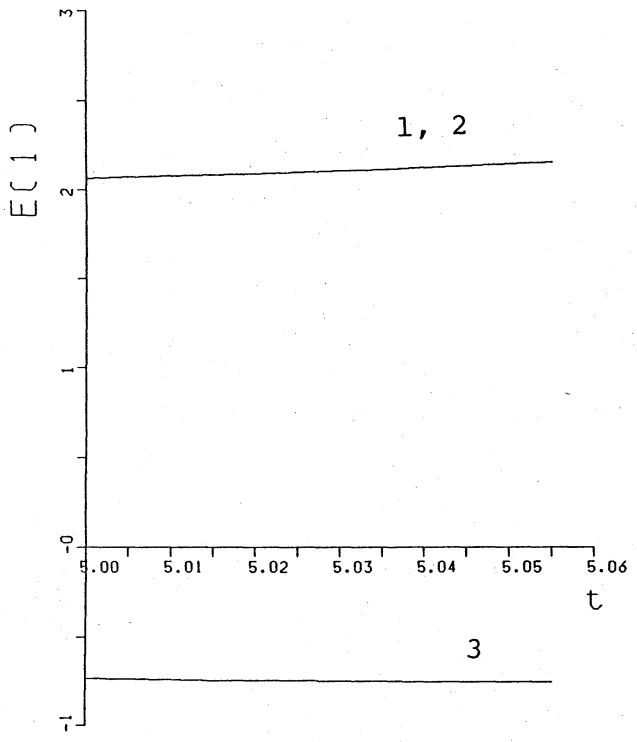
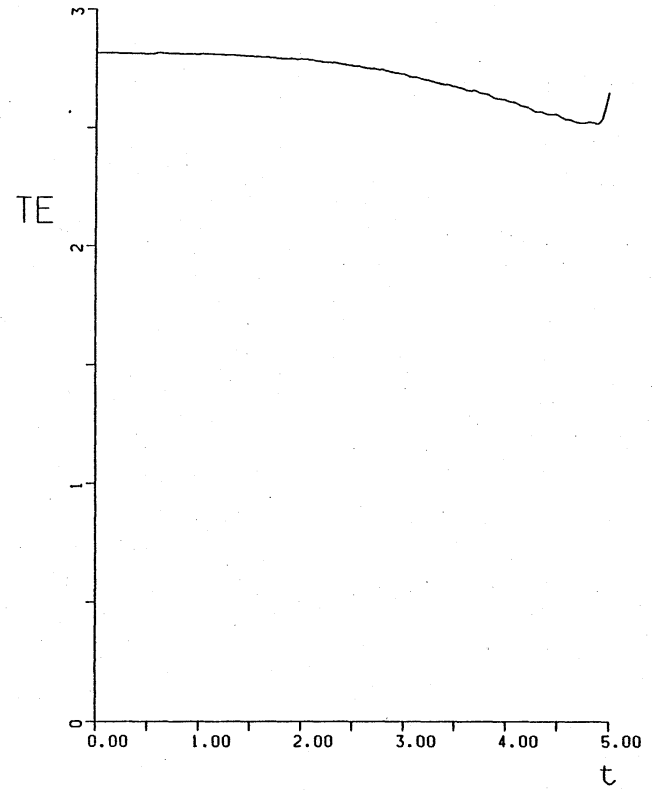
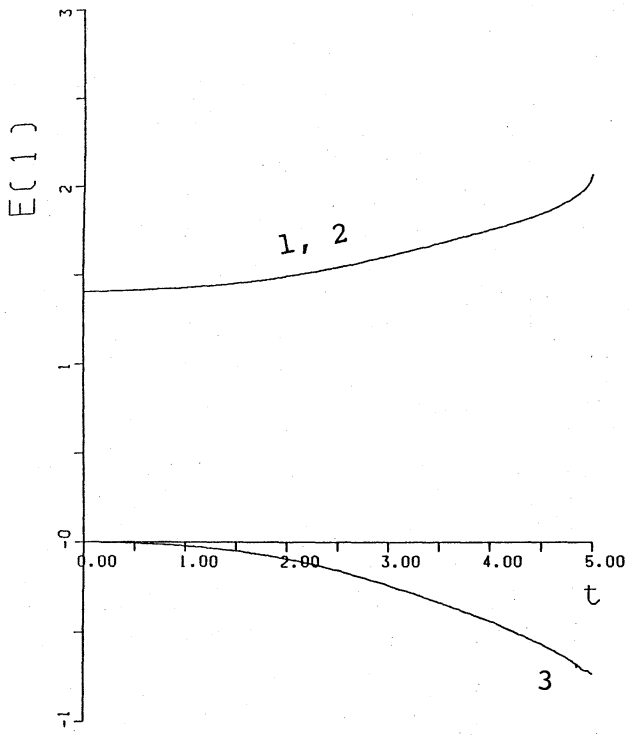
DT= 0.0003125



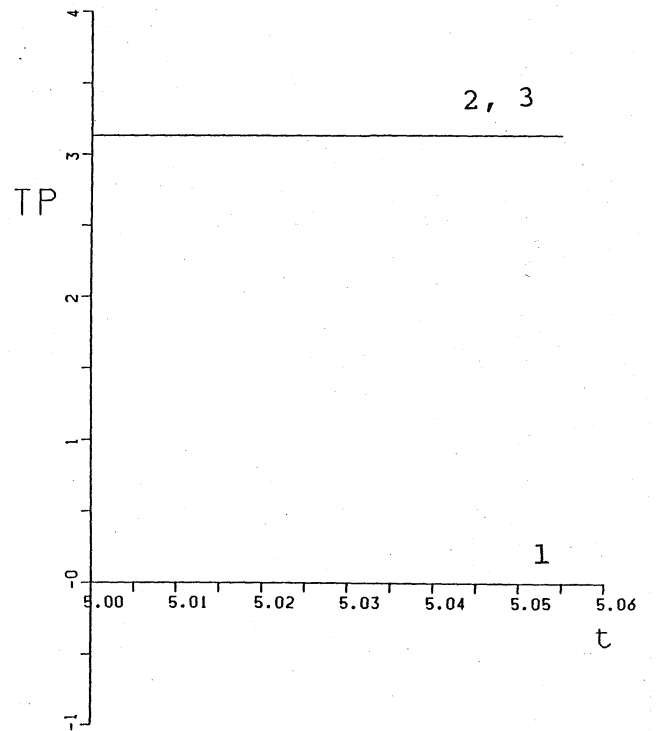
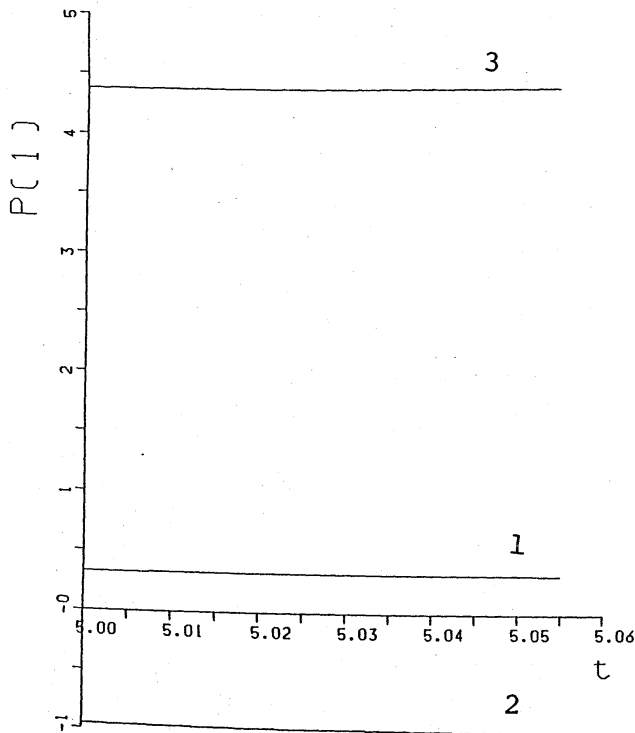
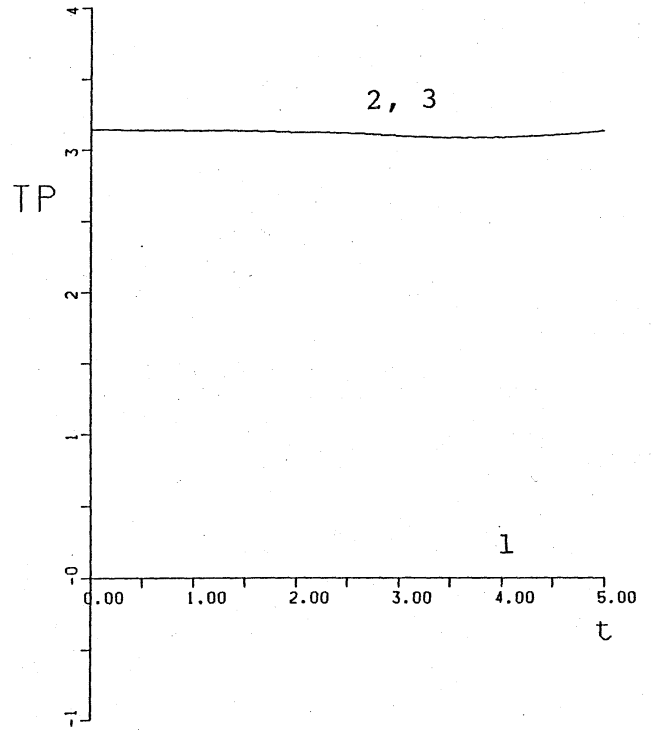
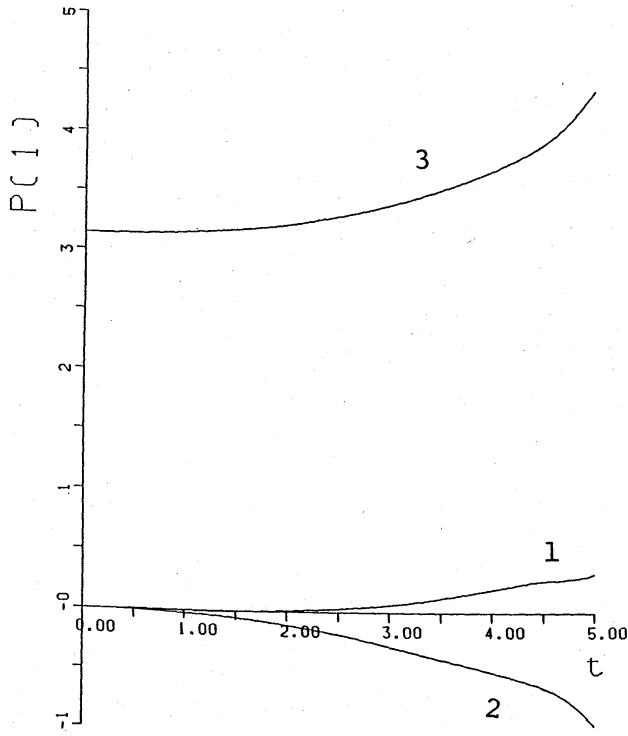
第1図. 絡まった2つ渦輪の時間的发展2 (3面図)



第2図. エンストロフィーとヘリシティの時間的发展

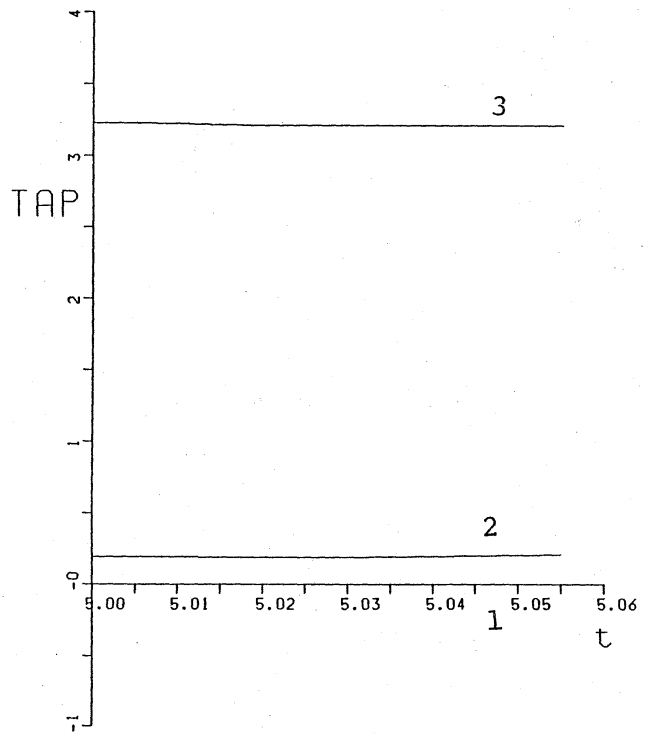
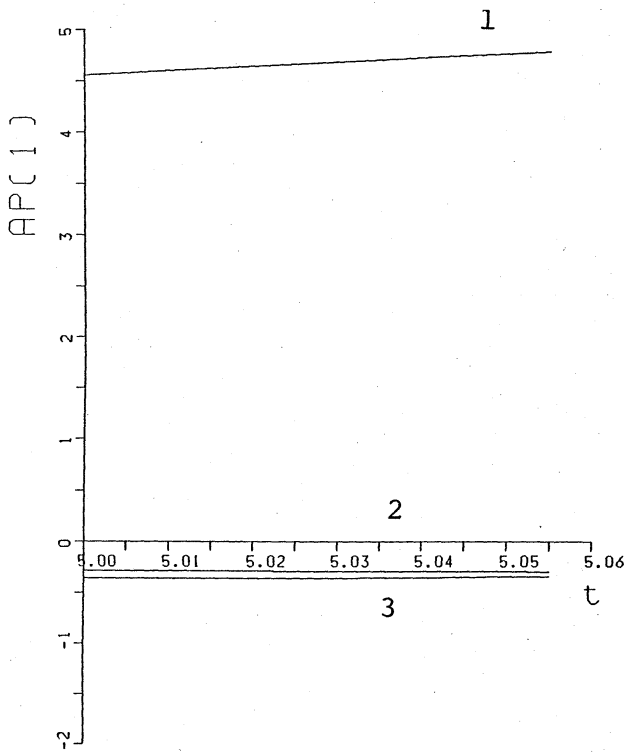
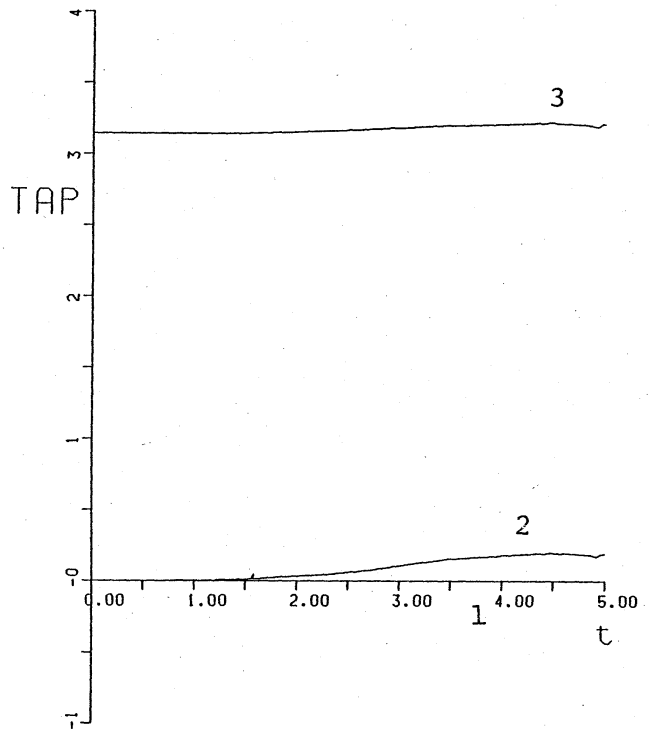
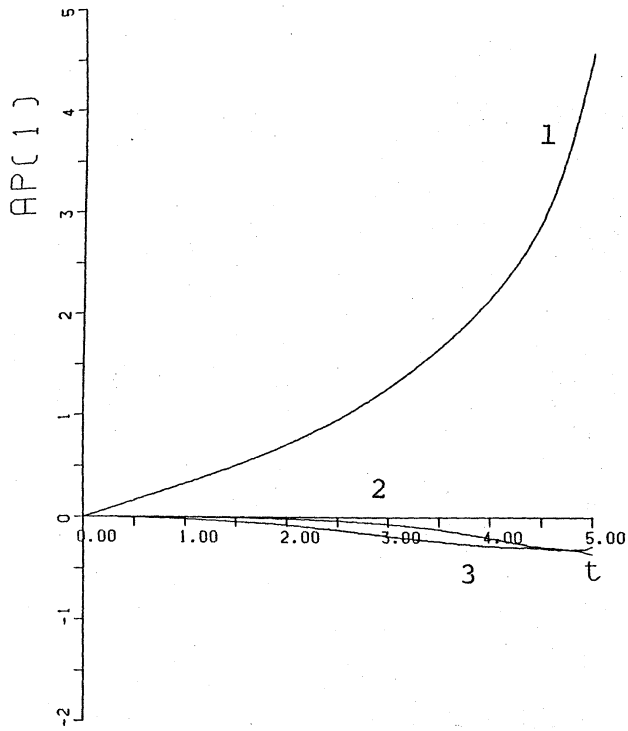


第3図. 運動エネルギーの時間的发展.  
 1: 渦輪1, 2: 渦輪2, 3: 相互エネルギー,  
 TE: 全エネルギー

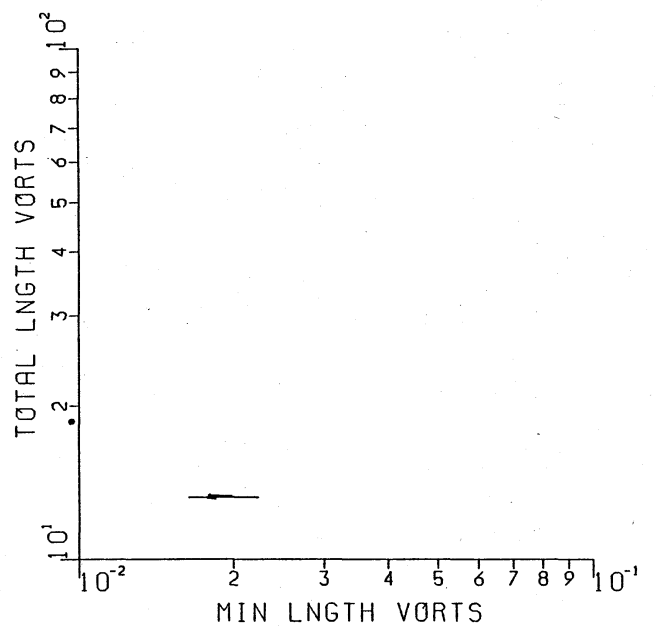
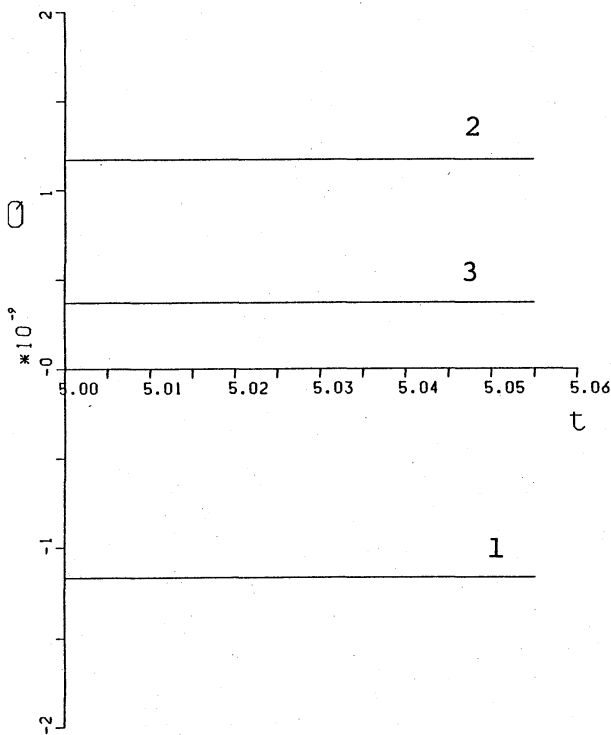
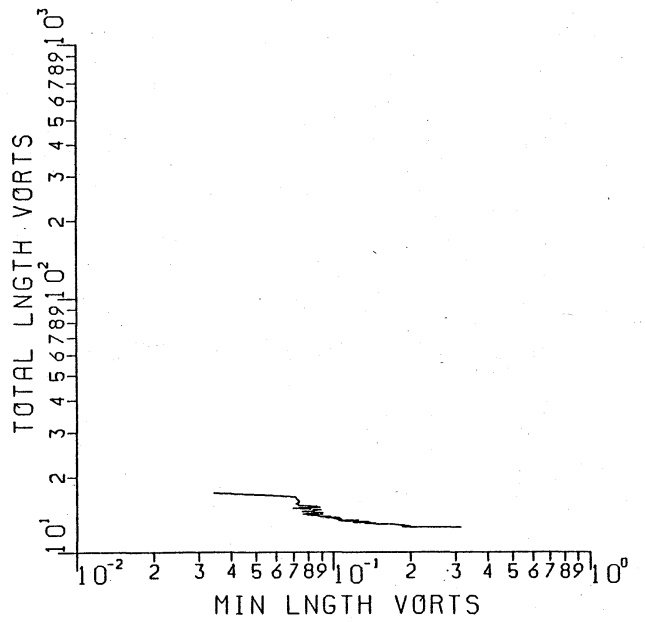
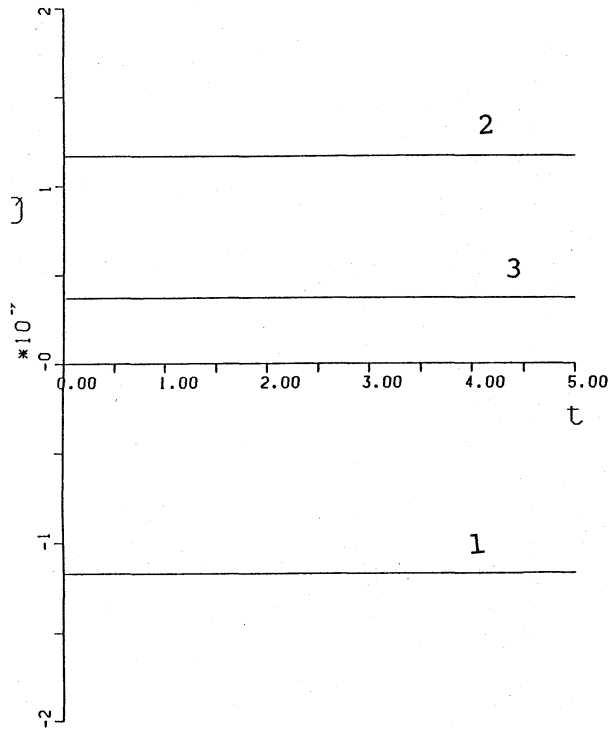


第4図. 運動量成分の時間的发展.

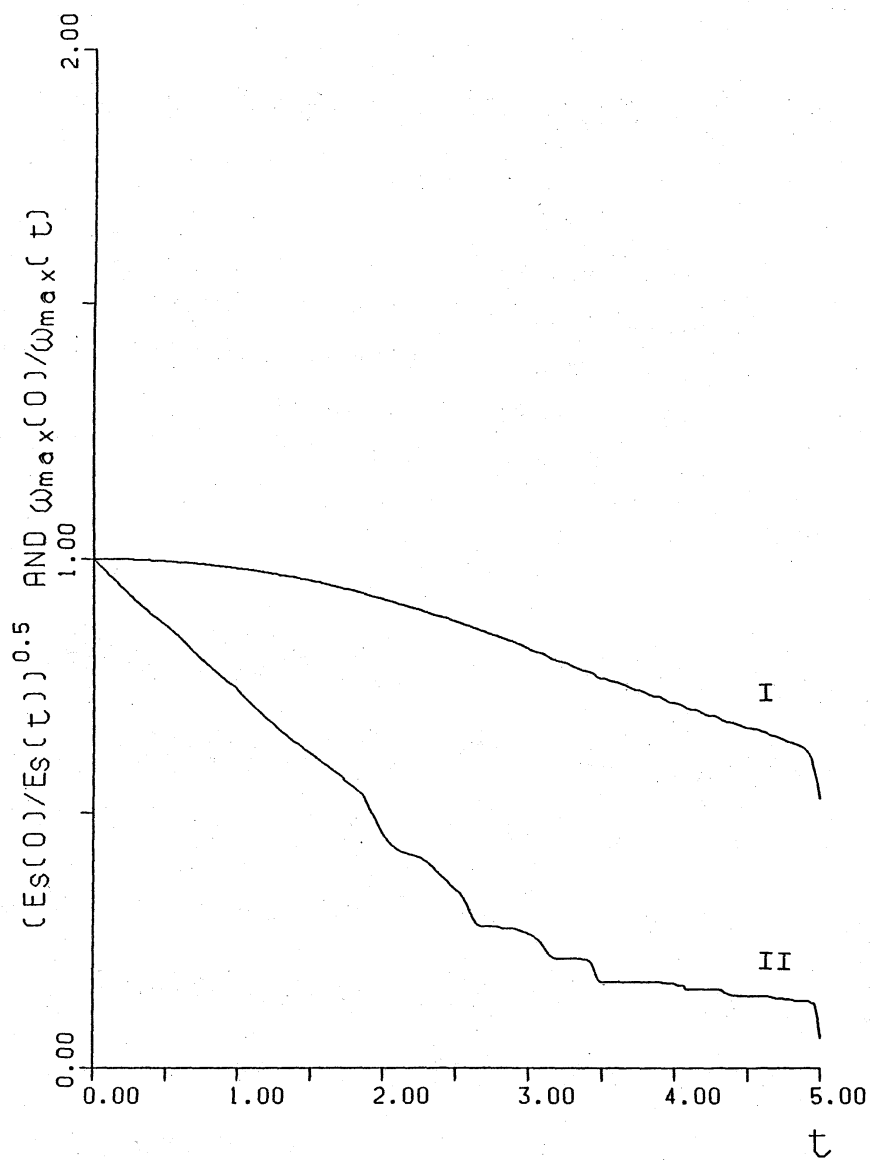
(1, 2, 3) : 成分, P(1) : 渦輪1, TP : 全運動量



第5図. 角運動量成分の時間的发展.  
 AP (1) : 渦輪1, TAP : 全角運動量



第6図. 全渦度の時間的发展およびヴォートの最小長さ と 渦輪の長さの時間的軌跡



第7図. 過度ノルムの逆数の時間的发展.

I :  $(E_s(0)/E_s(t))^{0.5}$  , II :  $\omega_{\max}(0)/\omega_{\max}(t)$