数理解析研究所講究録
第 608 巻 1987 年 1-20

ホップ代数と代数群
— Kac-Moody群のホップ代数による考察 —

筑波大学 数学系 阿部英一
(Eiichi Abe)

§0. 複素リー環に対して，局所同型を除いて，一意的にリー群がきまる。いいかえると，与へられたリー環をもつ連結単連結リー群が一意的にきまる。一般に，標数0の代数的閉体 F 上の連結代数群のリー環になるようなものを代数的リー環と呼んでいるが，任意の F-リー環が代数的であるとは限らず，また，代数的であっても単連結代数群が存在するとも限らない。有限次元 F-リー環について，連結，単連結代数群のリー環になるための必要充分条件はラヂカルが巾零であることで，G. Hochschild [3] はリー環の展開環のホップ代数の構造を使って，このような群を構成する方法を与えている。とくに，半単純リー環のときは表現を使って構成する方法 (C. Chevalley) や生成元と関係で群を定義する方法 (R. Steinberg) などがあり，これらの方法は半単純リー環を一般化した（無限次元の）Kac-Moody リー環に対応する群（Kac-Moody群とよぶ）の構成に応用され半単純代数群と類似の理論が建設されつつある。(G. V. Kac, R. Moody [4], [5], [6], J. Tits [9], [10]) Kac-Moody群はShafarevichの意味の無限次元代数群（[7]参照）の構造をもつている。従つて，座標環を与えて群を構成するのが自然であるように思われる。この小論ではKac-Moodyリー環より一般的な可積分リー環を定義し，そのようなリー環に対して，直接リー環の展開環から座標環を見つけて無限次元代数群を構成する。これはG. Hochschildの方法の一般化であるが，構成された代数群が単連結に相当する普遍性をもつかどうか，局所同型な群がどの程度存在するかなどはまだ分からず無限次元の場合は有限次元の場合と異なり，かなり複雑な現象がおこるように思われる。

準備として，§1でHochschildの定理を紹介し，§2でホップ代数の双対を一般化するために，位相ホップ代数を導入，§3でShafarevichの無限次元代数群を紹介する。無限次元代数群の座標環は位相ホップ代数の構造をもつている。従つて，無限次元代数群を構成するためには座標環となつている位相ホップ代数を構成すればよい。§4で我々の取り扱う可積分リー代数を導入し，§5で可積分リー代数に附随する無限次元代数群を構成する。

簡単のために，以後，体Fは標数0の代数的閉体とする。

§1. アフィン代数群とHochschildの理論

1.1 アフィン代数群とホップ代数　アフィン F-代数群 G に対して，G の座標環すなわち G から F への代数多様体射の全体 $H = \mathrm{Var}(G, F)$ はアフィン F-代数（有限生成，可換，被約）であるが，さらに G の群構造から誘導される F-代数射

$\Delta : H \to H \otimes H$ (余積)，$\varepsilon : H \to F$ (余単位)，$S : H \to H$ (対合)

をもちホップ代数になっている。逆に，このようなホップ代数 H があたえられれば，H から F への F-代数射の全体 $G = \mathrm{Alg}_F(H, F)$ は H を座標環にもつアフィン代数群になる。

1.2 アフィン代数群のリー環　e を F-代数群 G の単位元とする．$\mathrm{Ker}\,\varepsilon = M = \{f \in H ; f(e) = 0\}$ は H の極大イデアルで，F-加群 $\Omega = M/M^2$ を G の e における余接空間という。Ω の双対空間 Ω^* を G の e における接空間といい，$T_e(G)$ とかく。

$$T_e(G) = \{\delta \in H^* ; \delta(fg) = \delta f \cdot g(e) + f(e)\delta g \ \forall f, g \in H\}$$

で，$[\delta, \delta'] = (\delta \otimes \delta' - \delta' \otimes \delta)\Delta$，$\delta, \delta' \in T_e(G)$ と定義して，リー環となる．これを $\mathrm{Lie}\, G$ とかき，G のリー環という。
$\mathrm{Lie}\, G$ は H の F-導分で $D = (1 \otimes D)\Delta$ をみたすものの全体のなすリー環と同型である。

G, G' をアフィン F-代数群，H, H' をその座標環とする．代数群射 $\varphi : G \to G'$ に対して，$\varphi^* f = f \circ \varphi$ $(\forall f \in H)$

と定義して，ホップ代数射 $\varphi^*: H' \to H$ がえられる．リー代数射 $d\varphi: \mathrm{Lie}\, G \longrightarrow \mathrm{Lie}\, G'$，$\delta \mapsto \delta\circ\varphi^*$，を φ の微分とよぶ。

1.3 <u>双対ホップ代数</u>　H を F-ホップ代数とし，

$$\mathcal{B} = \{ J : H\text{の両側イデアル}, \dim H/J < \infty \}$$

$$H^0 = \{ x \in H^* ; \ x(J) = 0 \quad \exists J \in \mathcal{B} \}$$

とおくと，H^0 は H の構造射の双対から誘導される構造射でホップ代数の構造をもつ。これを H の双対ホップ代数という。とくに，H がアフィン F-代数群の座標環のとき，

$$G = \{ x \in H^0 ; \ \Delta x = x \otimes x \ , \ \varepsilon x = 1 \}$$

$$\mathrm{Lie}\, G = \{ x \in H^0 ; \ \Delta x = x\otimes 1 + 1 \otimes x , \ \varepsilon x = 0 \}$$

である。

1.4 <u>Hochschildの定理</u>（cf. [3]）　L を有限次元 F-リー環，$U(L)$ を L の展開環とする．$U(L)$ は ホップ代数（余可換，既約，分裂）でその双対ホップ代数を $U(L)^0$ とおく．L のラヂカルは巾零であるとし，ラヂカルの元から生成される $U(L)$ の両側イデアルを J とおくと，

$$H = \{ f \in U(L)^0 ; \ f(J^n) = 0 \quad \exists n \in N \}$$

は $U(L)^0$ の部分ホップ代数で，アフィン代数であり，代数群 $G = Alg_F(H, F)$ は連結，単連結で $\mathrm{Lie}\, G = L$ となる。 連結代数群 G' に対して，リー環 $\sigma: L \to \mathrm{Lie}\, G'$

があれば代数群射 $\tilde{\sigma}: G \to G'$ で $d\tilde{\sigma} = \sigma$ をみたすものが存在する．さらに，$H = U(L)^0 \Leftrightarrow L = [L, L]$ が成り立つ。

§2. 位相ホップ代数とその双対

2.1 位相ベクトル空間　V を F-ベクトル空間とする．F に離散位相を入れ，V が加法に関して位相群で，0の近傍系の基として，V の部分空間の族 $\mathcal{B}_V$ をとることができるとき，V を位相ベクトル空間という。とくに $\bigcap_{V_\lambda \in \mathcal{B}_V} V_\lambda = \{0\}$ のとき，V を分離的であるという。ここで述べる位相ベクトル空間，位相余代数については Takeuchi [8] を参照されたい。

部分空間と商空間　W を位相ベクトル空間 V の部分空間とするとき，

$$\mathcal{B}_W = \{V_\lambda \cap W ; V_\lambda \in \mathcal{B}_V\}, \quad \mathcal{B}_{V/W} = \{V_\lambda + W/W ; V_\lambda \in \mathcal{B}_V\}$$

を基として，W，V/W は位相ベクトル空間になる。

直積と直和　$\{V^{(p)}\}_{p \in P}$ を位相ベクトル空間の族とする。

$$\mathcal{B}_\Pi = \{\prod_p V_\lambda^{(p)} ; V_\lambda^{(p)} \in \mathcal{B}_{V^{(p)}}, \text{有限個を除いて}, V_\lambda^{(p)} = V^{(p)}\}$$

を基として，$\prod_p V^{(p)}$ は位相ベクトル空間になる。また，

$$\mathcal{B}_\amalg = \{\coprod_p V_\lambda^{(p)} ; V_\lambda^{(p)} \in \mathcal{B}_{V^{(p)}}\}$$

を基として，$\coprod_p V^{(p)}$ は位相ベクトル空間になる。

双対空間　V を（離散）ベクトル空間とし，V^* をその双対空間とする．V^* は F の $(\dim V)$ 個（無限個でもよい）の直積で

位相ベクトル空間になる。

射影極限と入射極限　$\{V^{(p)}\}_{p\in P}$ を位相ベクトル空間の射影系とするとき、射影極限 $\varprojlim_p V^{(p)}$ は直積 $\prod_p V^{(p)}$ の部分空間として位相ベクトル空間となる。また、$\{V^{(p)}\}_{p\in P}$ を位相ベクトル空間の入射系とするとき、入射極限 $\varinjlim_p V^{(p)}$ は直和 $\coprod_p V^{(p)}$ の商空間として位相ベクトル空間になる。

テンソル積　V, W を位相ベクトル空間とするとき、

$$\mathcal{B}_{V\otimes W} = \{V_\lambda \otimes W + V \otimes W_\mu \ ; \ V_\lambda \in \mathcal{B}_V, W_\mu \in \mathcal{B}_W\}$$

を基として、$V\otimes W$ は位相ベクトル空間になる。

完備化と完備テンソル積　V を位相ベクトル空間とする。離散ベクトル空間の射影系 $\{V/V_\lambda\}_{V_\lambda\in\mathcal{B}_V}$ の射影極限 $\hat{V} = \varprojlim V/V_\lambda$ を V の完備化という。自然な写像 $V \to \hat{V}$ は連続で、その像は $\hat{V}$ の中で稠密である。V が分離的ならば $V \subset \hat{V}$ で、$V = \hat{V}$ のとき、V は完備であるという。連続線型写像 $u: V \to W$ は連続線型写像 $\hat{u}: \hat{V} \to \hat{W}$ を誘導する。$V\otimes W$ の完備化を完備テンソル積といい、$V\hat{\otimes} W$ とかく。

位相ベクトル空間の双対　位相ベクトル空間 V から F への連続線型写像の全体のなすベクトル空間 V° は $\varinjlim (V/V_\lambda)^*$ で位相ベクトル空間になる。これを V の双対位相ベクトル空間という。連続線型写像 $u: V \to W$ は連続線型写像 u° :

$W^0 \to V^0$ を誘導する。位相ベクトル空間 V, W に対して、$V^0 \otimes W^0$ を $\varinjlim \left((V/V_\lambda)^* \otimes (W/W_\mu)^*\right)$ で位相ベクトル空間とみたものを $V^0 \otimes_d W^0$ とかき、双対テンソル積位相とよぶ。$V^0 \otimes_d W^0$ の完備化を $V^0 \hat{\otimes}_d W^0$ とおくと、次のような連続線型写像の可換図形がえられる。

$$\begin{tikzcd}
V^0 \otimes_d W^0 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & V^0 \hat{\otimes}_d W^0 \arrow[dd] \\
& (V \hat{\otimes} W)^0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
V^0 \otimes W^0 \arrow[rr] & & V^0 \hat{\otimes} W^0
\end{tikzcd}$$

2.2. 位相余代数と位相代数　位相ベクトル空間 C, 連続線型写像 $\Delta : C \to C \hat{\otimes} C$, $\varepsilon : C \to F$ の組が

$$(\Delta \hat{\otimes} 1)\Delta = (1 \hat{\otimes} \Delta)\Delta, \quad (\varepsilon \hat{\otimes} 1)\Delta = (1 \hat{\otimes} \varepsilon)\Delta = C \to \hat{C}$$

をみたすとき、C を位相余代数という。このとき、$\hat{C}$ も位相余代数で $C \to \hat{C}$ は連続余代数射である。また、位相ベクトル空間 A と連続線型写像 $\mu : A \otimes A \to A$, $\eta : F \to A$ の組が

$$\mu(\mu \otimes 1) = \mu(1 \otimes \mu), \quad \mu(\eta \otimes 1) = \mu(1 \otimes \eta) = id$$

をみたすとき、A を位相代数という。位相余代数 C の双対位相ベクトル空間 C^0, 連続写像

$$\mu : C^0 \otimes_d C^0 \xrightarrow{\text{cano}} (C \hat{\otimes} C)^0 \xrightarrow{\Delta^0} C^0$$

$$\eta : F \xrightarrow{\varepsilon^0} C^0$$

の組は代数構造射の公理をみたし，C° を C の双対代数とよぶ．また，A を完備位相代数とするとき，A の双対位相ベクトル空間 A°，連続線型写像

$$\Delta : A^{\circ} \xrightarrow{\hat{\mu}^{\circ}} (A \hat{\otimes} A)^{\circ} \xrightarrow{\text{cano}} A^{\circ} \hat{\otimes}_{d} A^{\circ}$$

$$\varepsilon : A^{\circ} \xrightarrow{\eta^{\circ}} F$$

の組は余代数構造射の公理をみたし，A° を A の双対余代数とよぶ。

2.3 <u>位相ホップ代数とその双対</u>　ホップ代数 H が位相ベクトル空間で構造射が連続写像のとき，H を位相ホップ代数とよぶ。さらに一般に，H が完備位相代数で，連続代数射 $\Delta : H \to H \hat{\otimes} H$，$\varepsilon : H \to F$，$S : H \to H$ があって，(H, Δ, ε) が位相余代数で，$\hat{\mu}(S \hat{\otimes} 1)\Delta = \hat{\mu}(1 \hat{\otimes} S)\Delta = \eta \circ \varepsilon$ をみたすとき，H を完備位相ホップ代数とよぶ。このとき，双対位相ベクトル空間 H° は双対テンソル積位相で位相ホップ代数となる。また，自然な連続全単射 $H^{\circ\circ} \to H$ が存在する。

H をホップ代数とし，$\{J_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ を有向集合 Λ を指数集合とする H の両側イデアルの族で，次の条件をみたすとする。

(1) $J_{\lambda} \subset J_{\mu} \quad (\lambda \leqq \mu)$

(2) $\varepsilon J_{\lambda} = 0 \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$

(3) $\forall \lambda \in \Lambda \ \exists \mu \in \Lambda \quad \Delta J_{\mu} \subset H \otimes J_{\lambda} + J_{\lambda} \otimes H$

(4) $\forall \lambda \in \Lambda \ \exists \mu \in \Lambda \quad S J_{\mu} \subset J_{\lambda}$

このとき，H は $\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を基にもつ位相ホップ代数になる。H の完備化を $\hat{H} = \varprojlim H/J_\lambda$ とおくと，H は完備位相ホップ代数で H の双対位相ベクトル空間 H° は双対テンソル積位相で位相ホップ代数になる。これを H の双対位相ホップ代数とよぶ。とくに，$\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ として有限余次元両側イデアルの全体の族をとると，H° は離散位相ベクトル空間で通常の意味での双対ホップ代数となる。

§3. 無限次元代数群

この節では Shafarevich [7] による無限次元代数群を紹介する。

3.1 無限次元アフィン多様体 $\{X_\lambda, \varphi_{\lambda\mu}\}_{\lambda,\mu\in\Lambda,\lambda\leq\mu}$ をアフィン代数多様体の入射系とする。ここで Λ は N または N と同型な有向集合で，$\varphi_{\lambda\mu}: X_\lambda \longrightarrow X_\mu$ は閉じた埋め込みとする。X_λ は Zariski 位相で位相空間で，入射極限 $X = \varinjlim X_\lambda$ は入射極限位相（$\forall\lambda\in\Lambda: \varphi_\lambda: X_\lambda \longrightarrow X$ 連続になる最強位相）で位相空間となる。このとき，X を無限次元アフィン多様体とよぶ。R_λ を X_λ の座標環とすると，$\{R_\lambda, \varphi^*_{\lambda\mu}\}_{\lambda,\mu\in\Lambda,\lambda\leq\mu}$ は射影系となる（ここで，$\varphi^*_{\lambda\mu}$ は $\varphi_{\lambda\mu}$ から誘導される F-代数全射 $R_\mu \to R_\lambda$ である。）$R = \varprojlim R_\lambda$ は完備位相代数で，R の元は X から F への写像をきめる。これを X 上の正則関数とよび，R を X の座標環とよぶ。

$X=\varinjlim_{\lambda} X_\lambda$, $Y=\varinjlim_{\mu} Y_\mu$ を無限次元アフィン多様体とし, $R=\varprojlim_{\lambda} R_\lambda$, $S=\varprojlim_{\mu} S_\mu$ をそれぞれ X, Y の座標環とする. 連続写像 $\varphi: X \to Y$ が

$\forall\lambda\in\Lambda\ \exists\mu\in M$ $\varphi(X_\lambda)\subset Y_\mu$, $\varphi|X_\lambda$ はアフィン多様体射

をみたすとき, φ を多様体射とよぶ. このとき, $\varphi^*(f)=f\circ\varphi$ によって定義される写像 $\varphi^*: S\to R$ は連続代数射となる. また, $\{X_\lambda\times Y_\mu\}_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$ はアフィン代数多様体の入射系で, 無限次元アフィン多様体 $\varinjlim_{\lambda,\mu}(X_\lambda\times Y_\mu)$ を X と Y の直積とよび, $X\times Y$ とかく. $X\times Y$ の座標環は $R\hat{\otimes} S=\varprojlim_{\lambda,\mu}(R_\lambda\otimes S_\mu)$ となる.

3.2 <u>無限次元アフィン多様体の接空間</u> $X=\varinjlim_{\lambda} X_\lambda$ を無限次元アフィン多様体, $R=\varprojlim_{\lambda} R_\lambda$ をその座標環とする. $x\in X$ に対して, $M_x=\{f\in R\ ;\ f(x)=0\}$ は R の閉極大イデアルで, $M_{x,\lambda}=\{f\in R_\lambda\ ;\ f(x)=0\}$ とおくと, $M_x=\varprojlim_{\lambda} M_{x,\lambda}$ である. $M_x^{(n)}$ を M_x^n の閉包とおくと, $M_x^{(n)}=\varprojlim_{\lambda} M_{x,\lambda}^n$ となる. 位相ベクトル空間 $\Omega_x = M_x/M_x^{(2)} = \varprojlim_{\lambda} M_{x,\lambda}/M_{x,\lambda}^2$ の双対位相ベクトル空間を X の x における接空間とよび, $T_x(X)$ とかく。

$$T_x(X)=\{\delta: R\to F \text{ 連続線型写像};\ \delta(fg)=\delta(f)g(x)+f(x)\delta(g)\ \forall f,g\in R\}$$

である。

3.3 無限次元アフィン代数群　無限次元アフィン多様体 G が群であって，$G\times G \longrightarrow G$，$(x,y)\longmapsto xy$，$G\longrightarrow G$，$x\longmapsto x^{-1}$ が　多様体射であるとき，G を無限次元アフィン代数群とよぶ．G が位相空間として連結または既約のとき，連結または既約とよぶと，連続無限次元アフィン代数群は既約である．$H=\varinjlim_{\lambda} R_\lambda$ を G の座標環とすると，H は完備位相ホップ代数である．G の単位元 e における接空間 $T_e(G)$ はリー環の構造をもつ．これを $\mathrm{Lie}\, G$ とかき，G のリー環とよぶ．H の双対位相ベクトル空間 H^0 は双対テンソル積位相で位相ホップ代数となり $G=TAlg_F(H,F)=\{x\in H^0;\ \Delta x=x\otimes x,\ \varepsilon x=1\}$，$\mathrm{Lie}\, G=\{x\in H^0;\ \Delta x=x\otimes 1+1\otimes x,\ \varepsilon x=0\}$ となる．

G のリー環について，次の定理が成り立つ．

定理（Shafarevich [7]）　G を連結無限次元アフィン代数群とし，K をその閉部分群とする．$\psi: K\longrightarrow G$ を自然な埋め込みとするとき，$d\psi: \mathrm{Lie}\, K \longrightarrow \mathrm{Lie}\, G$ が同型ならば ψ も同型で $K=G$ である．

§4 可積分リー代数

4.1 定義と例　L を F-リー代数，Γ を L の生成系とする．L の表現 (ρ, V) が

$\forall x \in \Gamma$ $\rho(x)$ 局所巾零 i.e. $\forall v \in V\ \exists n \in N$ $\rho(x)^n v = 0$ をみたすとき，(ρ, V) を Γ-可積分表現とよぶ．Lが忠実なΓ-可積分表現をもつとき，生成系Γを可積分であるという．有限可積分生成系をもつリー代数を可積分とよぶ．

例 (1) 1次元リー代数 $L = Fx$ について，$\Gamma = \{x\}$ とおく．2次の表現 (ρ, F^2) を $\rho(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ で定義すると，ρは忠実可積分表現で，Lは可積分である。

$\rho(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ で定義される表現は忠実であるがΓ-可積分ではない。

(2) $L = Fx + Fy$，$[x, y] = y$ で定義される2次元リー代数について，$\Gamma = \{x, y\}$ とおき，2次の表現 (ρ, F^2) を $\rho(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\rho(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ で定義すると，ρは忠実であるがΓ-可積分ではない。このリー代数は線型代数群 $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ a \in F^\times,\ b \in F \right\}$ のリー環で代数的である．

(3) 有限次元半単純リー代数Lは可積分である．HをLのカルタン分部環，ΦをHに関するLのルート系とし，$L = H + \sum_{\alpha \in \Phi} F x_\alpha$ をLのカルタン分解とする．Φの基底を1つとって $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ とし，$\Gamma = \{x_{\alpha_1}, \cdots, x_{\alpha_l}, x_{-\alpha_1}, \cdots, x_{-\alpha_l}\}$ とおくと，Γは有限可積分生成系となる。

(4) 有限次元リー代数Lのラジカルが巾零ならばLは

可積分である。 Adoの定理から L の忠実表現 (ρ, V) で L の極大巾零イデアル N の任意の元 x に対して $\rho(x)$ が巾零となるものが存在する。L のラジカルは N だから 1つの極大半単純部分リー環 S をとって，$L = S + N$ と Levi分解できる。S の有限可積分生成系と N の1つの基底の合併集合をとれば L の有限可積分生成系がえられる。

(5) Kac-Moody リー代数は可積分である．整係数 l 次正方行列 $A = (A_{ij})$ が

(i) $A_{ii} = 2$，(ii) $A_{ij} \leqq 0$ $(i \neq j)$ (iii) $A_{ij} = 0$ ならば $A_{ji} = 0$

をみたすとき，A を一般カルタン行列という．次の関係で定義される $3l$ 個の元 $\{x_1, \cdots, x_l, h_1, \cdots, h_l, y_1, \cdots, y_l\}$ から生成されるリー代数 L を A に附随する Kac-Moody リー代数という．

$$[h_i, h_j] = 0, \quad [h_i, x_j] = A_{ij} x_j, \quad [h_i, y_j] = -A_{ij} y_j$$

$$[x_i, y_j] = 0 \ (i \neq j), \quad [x_i, y_i] = h_i$$

$$(\mathrm{ad}\, x_i)^{-A_{ij}+1}(x_j) = 0, \quad (\mathrm{ad}\, y_i)^{-A_{ij}+1}(y_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

このとき，$\Gamma = \{x_1, \cdots, x_l, y_1, \cdots, y_l\}$ は L の有限可積分生成系である。

4.2 <u>可積分リー代数の展開環</u> L をリー代数，Γ を L の1つの生成系，U を L の展開環とする．自然数 n に対して，J_n を x^n $(\forall x \in \Gamma)$ から生成される U の両側イデアル

とすると，イデアルの族 $\{J_n\}_{n\in N}$ は 2.3 の (1)〜(4) をみたす．従って，U は $\{J_n\}_{n\in N}$ を基にもつ位相ホップ代数となる．これを U_Γ とかく．U_Γ の完備化 $\hat{U}_\Gamma = \varprojlim_n U/J_n$ は完備位相ホップ代数で，U_Γ の双対位相ベクトル空間 $U_\Gamma^0 = \varinjlim_n (U/J_n)^*$ は双対テンソル積位相に関して位相ホップ代数となる。

$u, v \in U$，$f \in U_\Gamma^0$ に対して，$(uf)(v) = f(vu)$，$(fu)(v) = f(uv)$ と定義すると，U_Γ^0 は両側 U-加群となる。L の表現 (ρ, V) が与えられたとき，V は L-加群で U-加群となる．V の1つの基底を1つ固定して $\{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ とおくとき，$\rho(x)v_\lambda = \sum_\mu \rho_{\mu\lambda}(x)v_\mu$ $(x \in U)$ とかくと，$\rho_{\mu\lambda}$ は U 上の F に値をもつ関数で，

$$\rho \text{ が } \Gamma\text{-可積分表現} \Leftrightarrow \rho_{\mu\lambda} \in U_\Gamma^0 \quad \forall \mu, \lambda \in \Lambda$$

が成り立つ．さらに，Harish-Chandra [2] の有限次元リー代数の表現に関する定理の証明と同じ方法で次の定理がえられる。

<u>定理</u>　L をリー代数とし，U をその展開環とする．Γ を L の有限生成系とし，J_n を x^n $(\forall x \in \Gamma)$ から生成される U の両側イデアルとする．このとき，

$$L \text{ が忠実 } \Gamma\text{-可積分表現をもつ} \Leftrightarrow \bigcap_n J_n = \{0\}$$

（注意）4.1 例 (2) のリー代数 $L = Fx + Fy$ について，

$$(\mathrm{ad}\,x)^k(y)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}x^{k-i}yx^i=y.$$

したがって，任意の自然数 n について $y=(\mathrm{ad}\,x)^{2n}(y)\in J_n$ となり $\bigcap_n J_n\neq\{0\}$ である．これは L は Γ-可積分でないことを示している。

§5. 可積分リー代数に附随する無限次元代数群

5.1 無限次元代数群 G_Γ の定義　L を可積分リー代数，Γ をその有限可積分生成系とする．U, U_Γ, $\hat{U}_\Gamma$, U_Γ^0 を 4.2 のようにとり，$H_\Gamma=U_\Gamma^0$ とおく．$\hat{G}_\Gamma=\mathrm{TAlg}_F(H_\Gamma, F)$ は H_Γ の余積から誘導される写像で群の構造をもつ．$x\in\Gamma$, $t\in F$ のとき，

$$\exp tx:\ f\longmapsto\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n(f),\quad f\in H_\Gamma$$

は $\hat{U}_\Gamma$ の元で $\hat{G}_\Gamma$ の元である．(ρ, V) を L の忠実 Γ-可積分表現とすると，$\exp t\rho(x)$ はベクトル空間 V の自己同型である．$\hat{G}_\Gamma$ 自身は一般に無限次元アフィン代数群の構造をもたないが，部分群として，L をリー環にもつ無限次元アフィン代数群を含むことを示そう。$\Gamma=\{x_1,\cdots,x_s\}$ とし，C_1 を $y=x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_s^{n_s}$, $n_k\geqq 0$ 整数 $(1\leqq k\leqq s)$ で張られる U の部分線型空間とする．（$x_1,\cdots,x_s$ の順序に関係する.）C_1 は U の部分余代数である．任意の自然数 p に対して，$y_1y_2\cdots y_p$, $y_i\in C_p$ $(1\leqq i\leqq p)$ で張

られる U の部分ベクトル空間とする。C_p は U の部分余代数で次の性質をみたす。

(1) $C_p \subset C_q \quad (p \leq q)$, $\varinjlim_p C_p = U$

(2) $1 \in C_p \quad (\forall p \in N)$

(3) $C_p C_q = C_{p+q}$

(4) $\forall p \in N \; \exists q \in N \quad S C_p \subset C_q$

(5) $\dim \left(C_p / C_p \cap J_n \right) < \infty$

$A_p = \varinjlim_n \left(C_p / C_p \cap J_n \right)^*$ とおくと，次の定理が成り立つ。

<u>定理</u> A_p はアフィンF-代数で $\{A_p\}_{p \in N}$ は射影系である。$\overline{H}_p = \varprojlim_p A_p$ は完備位相ホップ代数で，自然な連続ホップ代数全射 $\varphi : H_p \longrightarrow \overline{H}_p$ が存在する。無限次元アフィン代数群 $G_p = TAlg_F(\overline{H}_p, F)$ は $\hat{G}_p$ の部分群で $\mathrm{Lie}\, G_p = L$ である。

<u>証明の概略</u> まず，A_p がアフィンF-代数であることを示そう。A_p が可換代数であることはほぼ明らかである。

A_p <u>が被約であること</u>：$f \neq 0$ を A_p の元とする。C_p の元 $z = y_1 y_2 \cdots y_p$，$y_i = x_1^{n_{i1}} x_2^{n_{i2}} \cdots x_s^{n_{is}} \in C_1 \; (1 \leq i \leq p)$ で $f(z) \neq 0$ となるものが存在する。$n_i = (n_{i1}, \cdots, n_{is})$ $(1 \leq i \leq p)$ とおき，$(n_1, \cdots, n_p)$ が辞書式順序で最小になる z をとる。任意の自然数 m に対して，

$u = v_1 v_2 \cdots v_p$, $v_i = x_1^{mn_{i1}} x_2^{mn_{i2}} \cdots x_s^{mn_{is}}$ $(1 \leq i \leq p)$

とおき，$\Delta^m = (1 \otimes 1 \otimes \cdots 1 \otimes \Delta)\Delta^{m-1}$ とかくと，

$$\Delta^m u = \sum_{(u)} a(u_{(1)}, \cdots, u_{(m)})\, u_{(1)} \otimes \cdots \otimes u_{(m)}$$

について，$a = a(z, \cdots, z) \neq 0$ すなわち $z \otimes \cdots \otimes z$ の項があり，それ以外の項は少くとも1つ順序が $(n_1, \cdots, n_p)$ より小さい $u_{(i)}$ を含む．したがって，

$$f^m(u) = (f \otimes \cdots \otimes f)(\Delta^m u) = a\, f(z)^m \neq 0 .$$

A_p が有限生成であること：　C_p は U の部分余代数で余可換分裂既約で $P(C_p) = \{x \in C_p\,;\, \Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x,\ \varepsilon x = 0\}$ は有限次元ベクトル空間である．ベクトル空間 $V = P(C_p)$ に対して，V 上の余自由，余可換余代数の単位元を含む既約成分を $B(V)$ とおくと，余代数単射 $\varphi : C_p \longrightarrow B(V)$ が存在する．(cf [1] Th. 2.5.2) したがって，代数全射 $\varphi^* : B(V)^* \longrightarrow C_p^*$ がえられる．$\{y_1, \cdots, y_\ell\}$ を $P(C_p)$ の1つの基底とし，$\{\xi_1, \cdots, \xi_\ell\}$ を $\xi_i(y_j) = \delta_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq \ell)$ をみたす $B(V)^*$ の元とする．このとき，$\xi_i^n(y_j^m) = m!\,\delta_{ij}\delta_{mn}$ が成り立つ．$\eta_i = \varphi^*(\xi_i)$ $(1 \leq i \leq \ell)$ とおくと，$B(V)^* = F[[\xi_1, \cdots, \xi_\ell]]$ だから $C_p^* = F[[\eta_1, \cdots, \eta_\ell]]$．定義から $A_p \subset F[\eta_1, \cdots, \eta_\ell]$．一方，$\eta_i \in A_p$ $(1 \leq i \leq \ell)$ だから $A_p = F[\eta_1, \cdots, \eta_\ell]$．

他の結果は自然に導かれるので，$\mathrm{Lie}\, G_\Gamma = L$ であることだけを注意しておこう．L は $\mathrm{Lie}\, G_\Gamma = P(\overline{H}^\circ_\Gamma)$ の中で稠密であるが $L \cap \hat{C}_p = L \cap C_p$ だから L は $\overline{H}^\circ_\Gamma$ の中で離散的である．したがって，$L = \mathrm{Lie}\, G_\Gamma$．

5.2 G_Γ の一媒介変数部分群　$x \in \Gamma$ に対して，U_x を x から生成される U の部分ホップ代数とする．U_x は環として x から生成される多項式環 $F[x]$ で，ホップ代数構造射は $\Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$，$\varepsilon x = 0$，$Sx = -x$ で与えられる．U_Γ の部分ホップ代数として $\{(x^n)\}_{n \in N}$ を基にもつ位相ホップ代数でその双対位相ホップ代数（離散的）を H_x とかく。$\xi \in H_x$ を $\xi(x^n) = \delta_{n1}$ ($\forall n \in N \cup \{0\}$) で定義される元とすると，$\xi^m(x^n) = m!\, \delta_{mn}$ をみたし，H_x は環として多項式環 $F[\xi]$ でホップ代数の構造射は

$$\Delta \xi = \xi \otimes 1 + 1 \otimes \xi, \quad \varepsilon \xi = 0 \quad , \quad S\xi = -\xi$$

で与えられる．自然な連続全単射 $H_x^\circ \longrightarrow \hat{U}_x = F[[x]]$ は同型射で

$$G_x = \mathrm{Alg}_F(H_x, F) = \{\exp tx \; ; \; t \in F\}$$

は F の加法群と同型になる．また，$U_x \subset C_1$ で代数全射 $A_1 \longrightarrow H_x$ が存在するから，連続ホップ代数全射 $\overline{H}_\Gamma \longrightarrow H_x$ がえられ，G_x は G_Γ の部分代数群である。このとき，次の定理がえられる．

<u>定理</u>　G_x $(\forall x \in \Gamma)$ から生成される G_Γ の部分群を G'_Γ とおくと，$\overline{G'_\Gamma} = G_\Gamma$.

<u>証明</u>　$\overline{G'_\Gamma}$ は G_Γ の無限次元部分代数群でそのリー環 L' は Γ を含む. 従って $L' = L$. G_Γ は連結だから定理 3.3 より $\overline{G'_\Gamma} = G_\Gamma$.

<u>注意</u>　$G'_\Gamma = G_\Gamma$ が成り立つと思われるが証明はできていない。有限次元代数群の場合は，代数群射 $\varphi: G' \to G$ に対して，$\varphi(G')$ は $\overline{\varphi(G')}$ の稠密開集合を含み，$\overline{\varphi(G')} = \varphi(G')$ となることから えられるが，無限次元の場合には，一般にこのことは成立しない。

5.3. <u>普遍性</u>　Γ, Γ' をリー代数 L の可積分生成系とし，$\Gamma \subset \Gamma'$ とすると，自然な連続ホップ代数射 $U_{\Gamma'} \to U_\Gamma$ が存在する。Γ, Γ' が有限可積分生成系ならば $\Gamma \cup \Gamma'$ もそうだから，有限次元の場合は最大有限可積分生成系が存在し，普遍性をもつものがある. しかし，無限次元の場合には，一般に有限で最大のものが存在するかどうかわからない。また，$\hat{G}_\Gamma$ の中にリー環が L と同型な無限次元代数群は沢山ありうるし，そのような代数群を分類することも重要と思われる。

References

[1] E.Abe, Hopf algebras, Cambridge Tracts in Math. 74, Cambridge Univ. Press, 1980

[2] Harish-Chandra, On representation of Lie algebras, Ann. of Math. 50 (1940), 900-915

[3] G.Hochschild, Algebraic groups and Hopf algebras, Ill. J. Math. 14 (1970), 52-65

[4] V.G.Kac, Infinite dimensional Lie algebras, 2nd ed. Cambridge Univ. Press, 1985

[5] V.G.Kac, Constructing groups associated to infinite dimensional Lie algebras, Infinite dimensional groups with applications, Ed. by Kac, Math. Sci. Research Inst. Publ. 4 , 167-232 Springer, 1985

[6] V.G.Kac & D.H.Peterson, Regular functions on certain infinite dimensional groups, Arithmetic and Geometry, Progress in Math. 36, 143-166, Berkhauser , 1983

[7] I.R.Shafarevich, On some infinite dimensional groups II, Math. USSR Izvestija 18 (1982), 185-194

[8] M. Takeuchi, Topological coalgebras, J. of Algebra 92 (1985), 505-539

[9] J.Tits, groups and group functors attached to Kac-Moody data, Arbeitstagung Bonn,1984 Proceedings, Springer Lecture Notes in Math.1111 (1985), 193-222

[10] J.Tits, Uniquness and presentations of Kac-Moody groups over fields, Pre-print