数理解析研究所講究録
第608巻 1987年 21-33

環への種々の作用をホップ代数的にみれば

福井大数育　土井　幸雄（Yukio Doi）

環への有限群や代数群の作用、group-grading、derivationの作用、higher derivationの作用等は、従来個別的に研究されてきた。それらの間には部分的な類似がある。しかしそれを支える確実な根拠・視点が見いだされていなかったように思われる。ここではホップ代数的観点により、作用に関する種々の問題を統一的体系によって説明し得る理論（の作りつつあること）を報告したい。

R を単位元をもつ可換環とし、algebra, Hopf algebra はすべて R 上で考える。$\otimes = \otimes_R$, map = 'R-module map' とする。A で Hopf algebra を表わす：comultiplication を $\Delta : A \to A \otimes A$, $\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ とかき、counit を $\varepsilon : A \to R$ とかく。また antipode は $S : A \to A$ で表わすことにする。

B で一般の algebra を表わす。最初に、B への A の action, および coaction を定義しょう。

B への A の *action* とは, map $\omega : B\otimes A \longrightarrow B$ で次の条件をみたすものをいう: $\omega(b\otimes a) = b \leftharpoonup a$ とかくとき.

$$\begin{cases} (b\leftharpoonup a)\leftharpoonup a' = b\leftharpoonup aa' \quad (b\in B,\ a, a'\in A) \\ b\leftharpoonup 1_A = b \\ (bb')\leftharpoonup a = \sum (b\leftharpoonup a_{(1)})(b'\leftharpoonup a_{(2)}) \\ 1_B\leftharpoonup a = \varepsilon(a)1_B . \end{cases}$$

(B, ω) を *right* A-*module* *algebra* という。$\{b\in B \mid b\leftharpoonup a = \varepsilon(a)b,\ {}^{\forall}a\in A\}$ は B の subalgebra となる。これを B の action ω に関する *invariants* という。

B への A の *coaction* とは, map $\rho : B\longrightarrow B\otimes A$ で次の条件をみたすものをいう: $\rho(b) = \sum b_{(0)}\otimes b_{(1)}$ とかく.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B\otimes A \arrow[d, "1\otimes\Delta"] \\ B\otimes A \arrow[r, "\rho\otimes 1"] & B\otimes A\otimes A \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\wr"'] & B\otimes A \arrow[d, "1\otimes\varepsilon"] \\ & B\otimes R \end{tikzcd},$$

ρ は algebra map.
(すなわち $\rho(bb') = \sum b_{(0)}b'_{(0)}\otimes b_{(1)}b'_{(1)}$, $\rho(1_B) = 1_B\otimes 1_A$).

(B, ρ) を *right* A-*comodule* *algebra* という。B の subalg. $C = \{b\in B \mid \rho(b) = b\otimes 1_A\}$ を coaction ρ に関する *invariants* という。

我々は coaction の立場をとる。すなわち、A-comodule algebra B およびその invariants C に関する一般論を展開する。A が R上有限生成射影的(加群)のとき、$A^* = \mathrm{Hom}(A, R)$ は自然に Hopf algebra となるが、関係 $a^*\rightharpoonup b = \sum b_{(0)}\langle a^*, b_{(1)}\rangle$,

$a^* \in A$, $b \in B$ により、B上の right A-coaction ρ とB上の left A^*-action ω が1対1に対応する：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(B, B\otimes A) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(B, \mathrm{Hom}(A^*, B)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(A^*\otimes B, B) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \rho & \longleftarrow & \longrightarrow & & \omega \end{array}$$

対応する action と coaction の invariants は一致する。

[例] (1) A, B が algebra として可換なとき、Bへの A の coaction を scheme の言葉でいえば、affine R-scheme $\mathrm{Spec}(B)$ への affine R-group scheme $\mathrm{Spec}(A)$ の右作用となる。

(2) $A = R[G]$，群環とする。ここで G は有限群とは限らない。$G \ni \sigma$，$\Delta(\sigma) = \sigma\otimes\sigma$，$\varepsilon(\sigma) = 1$，$S(\sigma) = \sigma^{-1}$ とする。

$\rho : B \longrightarrow B\otimes R[G]$，$\rho(b) = \sum\limits_{\sigma\in G}^{\text{finite}} b_\sigma \otimes \sigma$ としよう。

coaction の条件は、

$$(b_\sigma)_\tau = \delta_{\sigma,\tau} b_\sigma, \quad b = \sum_{\sigma\in G} b_\sigma, \quad (bb')_\sigma = \sum_{\sigma = xy} b_x b'_y, \quad 1_\sigma = \delta_{1,\sigma}$$

となる。従って $B_\sigma := \{ b\in B \mid \rho(b) = b\otimes\sigma \}$ とおくと、

$$B = \bigoplus_{\sigma\in G} B_\sigma \ (\text{as } R\text{-module}), \quad B_\sigma B_\tau \subset B_{\sigma\tau}, \quad 1\in B_1$$

このようにして、$R[G]$-comodule algebra とは G-graded algebra に他ならないことがわかった。（invariants が1-成分に対応する）

(3) $A = R[G]^*$（ただし G は有限群とする）のとき、

right $R[G]^*$-comodule algebra = left $R[G]$-module algebra = left G-algebra となり．invariants $=\{b\in B \mid \sigma(b)=b, {}^\forall\sigma\in G\}$.

(4) 基礎環 R の標数を p（素数）とし，$q=p^e$ $(e\in\mathbb{N})$ とする。$A=R[X]/(X^q)=R[x]$ $(\overline{X}=x)$ とする。$\Delta(x)=x\otimes 1+1\otimes x$, $\varepsilon(x)=0$, $S(x)=-x$ によって A は Hopf algebra になる。map $\rho: B\longrightarrow B\otimes R[x]$ に対し，$\rho(b)=\sum_{i=0}^{q-1}D_i(b)\otimes x^i$ で表わすとき，ρ が coaction の条件は

$$D_r(bc)=\sum_{i=0}^{r}D_i(b)D_{r-i}(c),\quad 1\le r\le q-1.\ (b,c\in B)$$

$$D_0=id_B,\quad D_iD_j=\binom{i+j}{i}D_{i+j}\ (\text{if } i+j<q),\ =0\ (\text{if } i+j\ge q).$$

$$D_r(1_B)=0\quad (r\ge 1)$$

となる。すなわち，$\{D_0=id_B, D_1,\cdots,D_{q-1}\}$ は iterative higher derivation of length q on B, $C=\{b\in B \mid D_1(b)=\cdots=D_{q-1}(b)=0\}$.

(5) $A=R[x]^*$ のとき（上の dual Hopf algebra），right $R[x]^*$-comodule algebra とは left $R[x]$-module algebra のことで，B に $d^q=0$ なる derivation $d: B\longrightarrow B$ を考えたことになる。$C=\{b\in B \mid d(b)=0\}$ である。

一般論にもどる。A を Hopf algebra，(B,ρ) を right A-comodule algebra，$C=\{b\in B \mid \rho(b)=b\otimes 1\}$ とする。right B-module M と map $\rho_M: M\longrightarrow M\otimes A$ の対 (M,ρ_M)

が次の条件をみたすとき (A,B)-Hopf module であるという:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\rho_M} & M\otimes A \\ \downarrow{\scriptstyle\rho_M} & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\Delta} \\ M\otimes A & \xrightarrow{\rho_M\otimes 1} & M\otimes A\otimes A \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\rho_M} & M\otimes A \\ & \searrow \circlearrowright \swarrow{\scriptstyle 1\otimes\varepsilon} & \\ & M\otimes R & \end{array}, \quad \rho_M(mb)=\sum m_{(0)}b_{(0)}\otimes m_{(1)}b_{(1)}$$

(ただし. $\rho_M(m)=\sum m_{(0)}\otimes m_{(1)}$ とかく)

上の最初の2つの条件は M が right A-comodule になるということである。(A,B)-Hopf modules の圏を $\mathbb{M}_B^A$ で表わす。射は B-module かつ A-comodule map とする。$^\forall M\in\mathbb{M}_B^A$ に対し, $M_0=\{m\in M \mid \rho_M(m)=m\otimes 1\}$ は right C-module であり. $M\mapsto M_0$ は $\mathbb{M}_B^A$ から right C-modules の圏 $\mathbb{M}_C$ への functor となる。これは left adjoint をもつ:

$\mathbb{M}_C\ni V\longmapsto V\otimes_C B\in\mathbb{M}_B^A$, ここで $V\otimes_C B$ は次によって Hopf module とみる:

$$(v\otimes_C b)b'=v\otimes_C bb' \quad ; \quad v\otimes_C b\longmapsto\sum v\otimes_C b_{(0)}\otimes b_{(1)}$$

adjunctions は次の通り.

$$\begin{cases} \Phi_V: V\longrightarrow (V\otimes_C B)_0, & v\longmapsto v\otimes_C 1 \\ \Psi_M: M_0\otimes_C B\longrightarrow M, & m\otimes_C b\longmapsto mb. \end{cases}$$

$^\forall M\in\mathbb{M}_B^A$ に対し, Ψ_M が同型になるとき, $\mathbb{M}_B^A$ は弱い構造定理をもつという. さらに Φ_V が同型 ($^\forall V\in\mathbb{M}_C$) になるとき. $\mathbb{M}_B^A$ は強い構造定理をもつという.

$B\otimes A$ は $(b\otimes a)\cdot b'=(b\otimes a)\rho(b')$, $b\otimes a\longmapsto b\otimes\Delta(a)$ によって (A,B)-Hopf module になるが、$\Psi_{B\otimes A}$ を調べよう.

$B \xrightarrow{\sim} (B\otimes A)_0$, $b \longmapsto b\otimes 1$, $\sum b_i\varepsilon(a_i) \longleftrightarrow \sum b_i\otimes a_i$ に注意すると、$\Psi_{B\otimes A}$ は次の β と一致する：

$$\beta : B\otimes_C B \longrightarrow B\otimes A, \quad b'\otimes_C b \longmapsto \sum b' b_{(0)}\otimes b_{(1)}$$

この写像 β が全単射なとき、拡大 B/C は A-Galois であると呼ぶことにする。このようにして、$\mathbb{M}_B^A$ が弱い構造定理をもてば、B/C は A-Galois となる。

A から B への map ϕ が次の図式を可換にするとき、integral と呼ぼう：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B \arrow[d, "\rho"] \\ A\otimes A \arrow[r, "\phi\otimes 1"] & B\otimes A \end{tikzcd}$$

つまり、ϕ は A-comodule map.

さらに、$\phi(1_A)=1_B$ をみたすとき total integral という。また $\mathrm{Hom}(A,B)$ の convolution 積 $*$ に関して可逆な integral が存在するとき、B は cleft であるという。cleft の条件は大変強いもので、例えば次の結果がある（[5], Thm 9）。

B が cleft $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} B/C \text{ が A-Galois で、かつ} \\ B \simeq C\otimes A \ (\text{as left } C\text{- and right } A\text{-comodule}) \end{cases}$

このとき、$\mathbb{M}_B^A$ は強い構造定理をもつ。

[total integral の働き] cleft タイプではないが、total integral $\phi: A \to B$ をもつ場合には次の結果がある。
(1) ([3], (1.6)), $\mathbb{M}_B^A \ni {}^\forall M$ は relative injective A-comodule になる。 (2) $\mathbb{M}_B^A \ni {}^\forall M$ に対し、$tr_M : M \longrightarrow M$ を次で定

義する： $tr_M(m) = \sum m_{(0)}\phi(S(m_{(1)}))$, $m \in M$

このとき．$tr_M(m) \in M_0$ となり．$n \in M_0$ に対しては

$tr_M(n) = n$ となる。特に $tr_B : B \longrightarrow C$ は left C-projection

となり．${}_CC \oplus {}_CB$ となる。また．$\mathcal{M}_C \ni {}^\forall V$ に対し．

$\Phi_V : V \xrightarrow{\sim} (V \otimes_C B)_0$ がいえる。

(3) N を M_0 の C-submodule とすると．$NB \cap M_0 = N$。

特に．$M \in \mathcal{M}_B^A$ が Artinian (or Noetherian) B-module

なら．M_0 は Artinian (or Noetherian) C-module．

(4) integral ϕ の image $\mathrm{Im}\,\phi$ が C の B における centralizer B^C に含まれるなら．${}_CC_C \oplus {}_CB_C$ となる。

B/C が A-Galois ならこの逆が成立（[3], (2.4)）．

(5) A が可換で．$\mathrm{Im}\,\phi \subset \mathrm{Center}(B)$ のとき．B-split

する $\mathcal{M}_B^A$ の任意の完全列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ は必ず (A, B)-split する（[3], (1.7)）．この結果は $\mathrm{Im}\,\phi \subset R \cdot 1_B$

のとき A が非可換でも成り立つ。

[例] $A = R[G]$ のとき（すなわち，G-graded algebra B）．

$\phi : R[G] \longrightarrow B$ が integral とは．$\phi(\sigma) \in B_\sigma$ $({}^\forall\sigma \in G)$

をみたすことである。$\phi(1) = 1_B$ のときが total である．

特に．$\phi(\sigma) = \delta_{1,\sigma}$ とおくと．ϕ は total integral となる。

つまり G-graded algebra は必らず total integral をもつ．

Hopf module は G-graded B-module になる。すなわち、right B-module $M = \bigoplus_{\sigma \in G} M_\sigma$ (as R-modules) で $M_\sigma B_\tau \subset M_{\sigma\tau}$ をみたすものが $(R[G], B)$-Hopf module となる。上の $\phi(\sigma) = \delta_{1,\sigma}$ なる total integral に対応する trace map tr_M は、$M \longrightarrow M_0$, $m \longmapsto m_1$ となる。cleft の条件は、"$B_\sigma \cap U(B) \neq \phi$, $\forall \sigma \in G$" となる。また Galois の条件は、"$B_\sigma B_\tau = B_{\sigma\tau}$, $\forall \sigma, \tau \in G$" となる。すなわち、$B/C$ が $R[G]$-Galois $\Leftrightarrow$ B が strongly G-graded with $B_1 = C$.

[例] G-algebra B を考えよう。このとき $A = R[G]^*$ である。Hopf module は 左G-作用をもつ right B-module M で、$\sigma(mb) = \sigma(m)\sigma(b)$, $\sigma \in G$, $m \in M$, $b \in B$ となるものである。total integral は必らずしも存在しない。$\sum_{\sigma \in G} \sigma(b) = 1$ なる $b \in B$ の存在と同値になる ([3], (1.8))。対応する trace map $tr_M : M \longrightarrow M_0$ は $tr_M(m) = \sum_{\sigma \in G} \sigma(mb)$ となる。Galois の条件は古典的な意味の'G-Galois'と一致する (すなわち、$\exists \sum b_i \otimes c_i \in B \otimes_C B$ s.t. $\sum b_i \sigma(c_i) = \delta_{1,\sigma}$)。cleft の条件は、"$\exists b \in B$ s.t. $\sum_{\sigma \in G} \sigma^{-1}(b)\sigma \in U(B[G])$".

[例] B に iterative higher derivation $\{D_0 = id_B, D_1, \cdots, D_{q-1}\}$ を考える。$A = R[x] \left(= R[X]/(X^q)\right)$ である。Hopf module

は. right B-module M と $\{d_0=1_M, d_1, \cdots, d_{g-1}\} \subset End(M)$ の組で. $d_i d_j = \binom{i+j}{i} d_{i+j}$, $d_r(mb) = \sum_{i=0}^{r} d_i(m) D_{r-i}(b)$ をみたすもの。total integral の存在は次と同値になる: $\exists t \in B$ s.t. $D_1(t)=1, D_2(t)=\cdots=D_{g-1}(t)=0$ ([4]参照)

これに対応する tr_M は次の通り.

$$tr_M(m) = m - d_1(m)t + d_2(m)t^2 - d_3(m)t^3 + \cdots \pm d_{g-1}(m)t^{g-1}.$$

また $A=R[x]$ は primitive element x で生成されているから. total integral は $*$-可逆になる。

[例] B に $d^g=0$ なる derivation d を考える。$A=R[x]^*$ の場合である. Hopf module とは. right B-module M と $\delta^g=0$ なる $\delta \in End(M)$ の組で. $\delta(mb)=\delta(m)b+md(b)$ をみたすものとなる。"$\exists b \in B$ s.t. $d^{g-1}(b)=1$" が total integral の存在と同値になる。対応する trace map は、$tr_M(m) = m - \delta(m)d^{g-2}(b) + \delta^2(m)d^{g-3}(b) - \cdots \pm \delta^{g-1}(m)b$. この場合も total integral は $*$-可逆である。

[ガロア性] 一般論にもどる。$\beta: B \otimes_C B \longrightarrow B \otimes A$ が全射のとき. どのような条件の下でこの β が全単射になるか調べることは重要である。Kreimer-竹内は[7]で. 次の事実を証明した: A が R 上有限生成射影的のとき. β が全射なら全

単射 (i.e., B/C は A-Galois) になる。さらに B は左(または右) C-加群として有限生成射影的となる。

一般の場合は $\mathrm{Im}\,\phi \subset \mathrm{center}(B)$ なる total integral の存在の下で、β が全射なら全単射になることが最近わかった。これは [3], (2.5) の改良である。

またガロア性と構造定理との関係を与える次の事実 ([6], (2.11)) は重要である。

(a) B/C が A-Galois で B が平坦左 C 加群なら、$\mathbb{M}_B^A$ は弱い構造定理をもつ。

(b) B/C が A-Galois で、$\mathrm{Im}\,\phi \subset B^C$ なる total integral をもてば、$\mathbb{M}_B^A$ は強い構造定理をもつ。

[例] A, B を体上の commutative Hopf algebra とし、$f: B \longrightarrow A$ を全射な Hopf algebra map とする。このとき、B は $\rho: B \xrightarrow{\Delta_B} B \otimes B \xrightarrow{1 \otimes f} B \otimes A$ により right A-comodule algebra となる。f が全射だから、$\beta: B \otimes_C B \longrightarrow B \otimes A$ は全射になる ([3], p2157)。ここで C は $\{b \in B \mid (1 \otimes f)\Delta_B(b) = b \otimes 1\}$ で、B の left coideal となる。従ってもし total integral $\phi: A \longrightarrow B$ が存在すれば、上の一般論より B/C は A-Galois かつ強い構造定理をもつ。特に A は $a \cdot b = a f(b)$, $a \longrightarrow \Delta_A(a)$ により $A \in \mathbb{M}_B^A$ だから、

$R\otimes_C B \simeq A$ となる($A_0=R$). $0\to C^+\to C\xrightarrow{\varepsilon} R\to 0$ に $\otimes_C B$ をapplyすると. $R\otimes_C B\simeq B/C^+B$. 従って A は B/C^+B と同型(Hopf algebraとして)になる.

なお. A から B へのcoalgebra map g で $f\circ g=id_A$ なるものが存在すれば. $g(1_A)=1_B$ と仮定してよいから. この g が A から B へのtotal integralを与えている。

[宮下-Ulbrich 作用] strongly G-graded algebra $B=\bigoplus_{\sigma\in G} B_\sigma$ に対し. 群 G は $C=B_1$ のcentralizer B^C に自己同型として自然に作用する。これがいわゆる宮下自己同型である。Ulbrich[8]は有限生成射影的なHopf algebra A による A-Galois拡大 B/C に対し. B^C への A-action $B^C\otimes A\to B^C$ を定義した。$A=R[G]$ のときは丁度宮下自己同型を与えている。我々は一般のHopf algebra A に対し. A-Galois拡大 B/C とalgebra map $\alpha: B\to E$ が与えられれば. C の E におけるcentralizer E^C (α を通して E を B-bimoduleとみる)に自然な A-action $E^C\otimes A\to E^C$ が存在し. その invariantsが E^B となることを示したい。

まず A から E への R-module map全体 $\mathrm{Hom}(A,E)$ は B から E へのleft C-module map全体 $\mathrm{Hom}_{C-}(B,E)$ と次の対応 π で1対1になる。$f\longmapsto \pi(f)$, $\pi(f)(b)=\sum b_{(0)}f(b_{(1)})$.

理由は次の図形の可換性からくる。

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(A, E) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{C-}(B, C) \\ \mathrm{Hom}_{B-}(B\otimes A, E) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(\beta, E)", "\sim"'] & \mathrm{Hom}_{B-}(B\otimes_C B, E) \arrow[u, "\wr"'] \end{tikzcd}$$

簡単な計算により，$\mathrm{Im} f \subset E^C \iff \pi(f)$ が C-bimodule map．従って次の同型が得られた。

$$\pi : \mathrm{Hom}(A, E^C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{C,C}(B, E).$$

この同型 π を利用して，E^C に A-action を導入する。$x \in E^C$ に対し，$B \ni b \longmapsto xb \in E$ は C-bimodule map だから，$\hat{x} \in \mathrm{Hom}(A, E^C)$ で $\pi(\hat{x})(b) = xb$, $^\forall b \in B$ なるもの $\hat{x}$ が唯一つ存在する。$\hat{x}(a) = x^a$ $(a \in A)$ とかくことにする。このとき，$E^C \otimes A \ni x \otimes a \longmapsto x^a \in E^C$ は E^C の A-action であり，その invariants $\left(= \{x \in E^C \mid x^a = \varepsilon(a)x, {}^\forall a \in A\}\right)$ は E^B ($= B$ の E における centralizer) と一致することがわかる。

例えば，strongly G-graded B/C に対しては，E^C への G-action $(x, \sigma) \longrightarrow x^\sigma$ で，$xb = bx^\sigma$, $^\forall b \in B_\sigma$ をみたすものが唯一つ存在する。また G-Galois 拡大 B/C に対して（ただし G は有限群），E^C は G-graded algebra となり，その grade は次のようになる。

$$(E^C)_\sigma = \{x \in E^C \mid xb = \sigma(b)x, {}^\forall b \in B\}, \quad \sigma \in G.$$

A が有限生成射影的のとき，E^C への A-action を left A^*-coaction の言葉でいえば，E^C に次の条件をみたす left A^*-coaction $\lambda : E^C \longrightarrow A^* \otimes E^C$, $\lambda(x) = \sum x_{(-1)} \otimes x_{(0)}$ が唯一つ存在する：

$$x b = \sum \langle x_{(-1)}, b_{(1)} \rangle b_{(0)} x_{(0)}, \quad x \in E^C, \ b \in B.$$

一般には E^C/E^B は A^*-Galois にならない。$E = B$, $\alpha = id_B$ のときを考えれば，B^C は left A^*-comodule algebra となり，その invariants は B の中心 $Z(B)$ となる。B/C の分離性と total integral $A^* \longrightarrow B^C$ の存在が同値になる。また B の東屋性と B^C/R の A^*-Galois 性の間に密接な関係がある。これらに関しては，[6] を参照。

参考文献

[1] Y. Doi, Comm. Algebra 11 (1983), 243–255.

[2] ——, 〃 12 (1984), 1155–1169.

[3] ——, 〃 13 (1985), 2137–2159.

[4] ——, $R[X]/(P(X))$-Galois extensions について．1986年1月 阪大「代数群，リー環…」報告集

[5] Y. Doi and M. Takeuchi, Comm. Algebra 14 (1986), 801–818.

[6] —— and ——, Hopf-Galois extensions of algebras, the Miyashita-Ulbrich action, and Azumaya algebras (Preprint)

[7] H. F. Kreimer and M. Takeuchi, Indiana U.M.J. 30 (1981).

[8] K.-H. Ulbrich, Comm. Algebra 10 (1982), 655–672.