数理解析研究所講究録
第 608 巻 1987 年 34-46

多項式環への μ_p－作用について

福井大 教育　小野田信春　（Nobuharu Onoda）

体 k 上の affine group scheme $\mathrm{Spec}\,(k[X]/(X^{\ell}-1))$ を慣例に従い μ_{ℓ} で表わすものとする。affine scheme $\mathrm{Spec}\,(B)$ に μ_{ℓ} が act することと、Hopf algebra $A = k[X]/(X^{\ell}-1)$ が B に co-act することとは同値である。ここで、A の B への coaction とは、k-algebra homomorphism $\rho : B \longrightarrow B \otimes_k A$ で次の 2 つの diagram を可換にするものであった：

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & B \otimes_k A \arrow[d, "id \otimes \Delta"] \\
B \otimes_k A \arrow[r, "\rho \otimes id"] & B \otimes_k A \otimes_k A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\sim"'] & B \otimes_k A \arrow[d, "id \otimes \varepsilon"] \\
 & B \otimes_k k
\end{tikzcd}
$$

但し、ここで、Δ, ε は各々 comultiplication および counit を表わし、次で定義される：

$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes_k A \qquad \Delta(x) = x \otimes x$$

$$\varepsilon : A \longrightarrow k \qquad \varepsilon(x) = 1$$

以下では、特に B が多項式環 $k[x_1, \cdots, x_n]$ の場合を考察する。

例えば、$k=\mathbb{C}$（複素数体）のときは、μ_q は1の原始 q 乗根 ζ で生成される巡回群であり、その作用が linear、即ち、$GL_n(\mathbb{C})$ の内部分群として B に自然に作用するとすれば、その不変部分環 C は（適当な変数変換の後）ある整数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ $(0 \le \lambda_i < q)$ が存在して

$$C = \mathbb{C}[X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \mid \lambda_1 i_1 + \cdots + \lambda_n i_n \equiv 0 \pmod q)]$$

となることはすぐわかる。これは、μ_q の作用が対角化可能であることによる。ここでは、体 k の標数が $p>0$ かつ $q=p^m$ の場合にも類似の事実が成立することを示してみたい。この場合は、$Y = X-1$ とおけば、$A = k[Y]/(Y^q)$ であり、

$$\Delta(y) = y \otimes 1 + 1 \otimes y + y \otimes y \qquad \varepsilon(y) = 0$$

となる。このような Hopf algebra が B に coact することと、ある種の higher derivation を B に与えることとは同値である。そこで、以下ではこの立場から考えることにする。なお、多少なりとも一般化できる部分は一般化した形で述べることにする。但し、扱かう環は全て可換と仮定する。

1. coaction に付随する higher derivation

以下、k は標数 $p>0$ の体で、R は与えられた k-algebra とする。$q=p^m$ とし、$u \in R$ を固定するとき、$A = R[x]/(x^q)$

に、comultiplication Δ と counit ε を次で定義して Hopf algebra の構造を入れる：

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + u\, x \otimes x \qquad \varepsilon(x) = 0$$

いま、R-algebra B と A の B への coaction

$$\rho : B \longrightarrow B \otimes_R A$$

が与えられたとき、$D_i \in \mathrm{Hom}_R(B, B)$　$(i = 0, \cdots, g-1)$ を次で定義する：

$$\rho(b) = D_0(b) \otimes 1 + D_1(b) \otimes x + \cdots + D_{g-1}(b) \otimes x^{g-1} \qquad (\forall b \in B)$$

<u>Lemma</u> 1　$\mathbb{D} = \{D_0, D_1, \cdots, D_{g-1}\}$ とおくと、$\mathbb{D}$ は R 上の higher derivation であり、次を満たす。

$$(*) \qquad D_i D_j = \sum_r \frac{r!}{(r-i)!\,(r-j)!\,(i+j-r)!} u^{i+j-r} D_r \qquad (\forall i, j)$$

（証明）ρ が R-algebra homomorphism であることと、$(id \otimes \varepsilon)\rho = id$ より $\mathbb{D}$ が higher derivation であることはすぐわかる。条件式 $(*)$ は $(id \otimes \Delta)\rho = (\rho \otimes id)\rho$ のいいかえである ∎

<u>注意</u>　$(*)$ は $D_i D_j = \sum_\ell \binom{j}{\ell}\binom{i+\ell}{j} u^{j-\ell} D_{i+\ell}$ とも表せる。

この Lemma は B に A の coaction を与えることと、$(*)$ を満たす higher derivation $\mathbb{D}$ を B に与えることとが同値であることを示している。そこで、このような higher derivation $\mathbb{D}$ を具体的に

決定してみることにする。そのために次のような記号を導入する。

定義　自然数 n と非負整数 i に対し、n_i で n を P 進数展開したときの P^i の係数を表わすものとする：

$$n = n_0 + n_1 P + \cdots + n_s P^s + \cdots$$

定義　$D \in \mathrm{Hom}_R(B, B)$ と非負整数 i に対し、$\binom{D}{iu} \in \mathrm{Hom}_R(B, B)$ を、$\binom{D}{iu} = D(D-u)(D-2u)\cdots(D-(i-1)u)$ で定める。

このとき、示したいのは次の定理である。

定理 2　higher derivation $\mathbb{D} = \{D_0, D_1, \cdots, D_{g-1}\}$ が A の co-action を与えるための必要十分条件は、次の 3 条件を満たすことである：

$$(1)\quad D_{p^i} D_{p^j} = D_{p^j} D_{p^i} \qquad (0 \leq {}^\forall i, {}^\forall j < m)$$

$$(2)\quad {D_{p^i}}^P = u^{(P-1)p^i} D_{p^i} \qquad (0 \leq {}^\forall i < m)$$

$$(3)\quad D_n = \prod_{i=0}^{m-1} \binom{D_{p^i}}{n_i u^{p^i}} \qquad (0 \leq {}^\forall n < g)$$

（証明）まず必要性を示す。そこで、$\mathbb{D}$ は (*) を満たす higher derivation と仮定する。いくつかの step に分けて考えることにする。

Step 1　(イ) 自然数 n, m に対し、$\binom{n}{m} \equiv \prod_i \binom{n_i}{m_i} \pmod{P}$

(ロ)　$n_i < m_i \ ({}^\exists i)$ ならば $\binom{n}{m} \equiv 0 \pmod{P}$

（証明）(イ) は、一般に、$n = n'P + r$, $m = m'P + s$ $(0 \leq r, s < P)$

とするとき、$\binom{n}{m} \equiv \binom{r}{s}$ $(\mathrm{mod}\ p)$ が成立することより容易にわかる。(ロ)は(イ)より明らか ∎

<u>Step</u> 2　$p^s \mid i$, $j < p^s$ $({}^{\exists}s)$ ならば $D_i D_j = D_{i+j}$

(証明) 仮定より、$D_i D_j = \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{\ell}\binom{i+\ell}{j} u^{j-\ell} D_{i+\ell}$ が成立するが、いま、$\ell < j$ ならば $(i+\ell)_k = \ell_k < j_k$ $(0 \leq {}^{\exists}k < s)$、従って Step 1 より $\binom{i+\ell}{j} = 0$ となる。よって、$D_i D_j = \binom{j}{j}\binom{i+j}{j} D_{i+j}$ となるが、ここで再び Step 1 より、$\binom{i+j}{j} = \binom{i}{0}\binom{j}{j} = 1$ ゆえ $D_i D_j = D_{i+j}$ を得る ∎

<u>Step</u> 3　$D_n = D_{n_0} D_{n_1 p} \cdots D_{n_{m-1} p^{m-1}}$　$(0 \leq {}^{\forall}n < q)$

(証明) $n = n_0 + n_1 p + \cdots + n_{m-1} p^{m-1}$ ゆえ、Step 2 より明らか ∎

<u>Step</u> 4　$D_{ip^s} = \binom{D_{p^s}}{i u^{p^s}}$ かつ $D_{p^s}{}^{p} = u^{(p-1)p^s} D_{p^s}$　$(0 \leq {}^{\forall}i < p)$

(証明) $D_{p^s} D_{ip^s} = \sum_{\ell=0}^{p^s} \binom{p^s}{\ell}\binom{ip^s+\ell}{p^s} u^{p^s-\ell} D_{ip^s+\ell}$ において、$0 < \ell < p^s$ ならば、Step 1 より $\binom{p^s}{\ell} = 0$ ゆえ、従って

$$D_{p^s} D_{ip^s} = \binom{p^s}{0}\binom{ip^s}{p^s} u^{p^s} D_{ip^s} + \binom{p^s}{p^s}\binom{ip^s+p^s}{p^s} D_{ip^s+p^s}$$
$$= i u^{p^s} D_{ip^s} + (i+1) D_{(i+1)p^s}$$

よって、$1 \leqslant i \leqslant p-2$ に対しては $D_{(i+1)p^s} = \frac{1}{i+1} D_{ip^s}(D_{p^s} - i u^{p^s})$ が成り立ち、これから前半の結論は明らかである。また、$i = p-1$ に対しては、$D_{p^s} D_{(p-1)p^s} = (p-1) u^{p^s} D_{(p-1)p^s}$ となり、従って、$D_{(p-1)p^s}(D_{p^s} - (p-1)u^{p^s}) = 0$ よって、

$$D_{p^s}(D_{p^s} - u^{p^s}) \cdots (D_{p^s} - (p-1)u^{p^s}) = D_{p^s}(D_{p^s}{}^{p-1} - (u^{p^s})^{p-1}) = 0$$

となり、$D_{p^s}{}^{p} = u^{(p-1)p^s} D_{p^s}$ を得る ∎

以上で必要性が示せた。次に十分性、即ち、$\mathbb{D}$ が条件(1)(2)(3)を満たすとき、(*)が成立することを示す。これもいくつかの段階に分けて行う。

<u>Step</u> 5 $\quad D_n = D_{n_0} D_{n_1 p} \cdots D_{n_{m-1} p^{m-1}} \qquad (0 \le {}^\forall n < q)$

(証明) 条件(1)(3)より明らか∎

<u>Step</u> 6 $\quad D_{ip^s} D_{jp^s} = \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{\ell}\binom{i+\ell}{j} u^{(j-\ell)p^s} D_{(i+\ell)p^s} \qquad (0 \le {}^\forall j \le {}^\forall i < p)$

(証明) j についての帰納法で示す。

$$\begin{aligned} D_{ip^s} D_{p^s} &= D_{ip^s}(D_{p^s} - iu^{p^s} + iu^{p^s}) \\ &= \frac{1}{i!} D_{p^s}(D_{p^s} - u^{p^s}) \cdots (D_{p^s} - iu^{p^s}) + iu^{p^s} D_{ip^s} \end{aligned}$$

ここで、条件(2), (3)より、

$$\frac{1}{i!} D_{p^s}(D_{p^s} - u^{p^s}) \cdots (D_{p^s} - iu^{p^s}) = \begin{cases} (i+1) D_{(i+1)p^s} & (0 < i < p-1) \\ \frac{1}{i!}(D_{p^s}^p - u^{(p-1)p^s} D_{p^s}) = 0 & (i = p-1) \end{cases}$$

従って、$D_{ip^s} D_{p^s} = iu^{p^s} D_{ip^s} + (i+1) D_{(i+1)p^s}$ が任意の i に対し成立し、$j=1$ のときは正しい。次に、j で正しいとすると、

$$\begin{aligned} D_{ip^s} D_{(j+1)p^s} &= D_{ip^s} \cdot \frac{1}{j+1} D_{jp^s}(D_{p^s} - ju^{p^s}) \\ &= \frac{1}{j+1}(D_{p^s} - ju^{p^s}) \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{\ell}\binom{i+\ell}{j} u^{(j-\ell)p^s} D_{(i+\ell)p^s} \\ &= \frac{1}{j+1}\Big\{ \sum_{\ell} \binom{j}{\ell}\binom{i+\ell}{j} u^{(j-\ell)p^s} D_{(i+\ell)p^s} D_{p^s} \\ &\qquad - \sum_{\ell} ju^{p^s} \binom{j}{\ell}\binom{i+\ell}{j} u^{(j-\ell)p^s} D_{(i+\ell)p^s} \Big\} \end{aligned}$$

ここで、$\sum_{\ell} \binom{j}{\ell}\binom{i+\ell}{j} u^{(j-\ell)p^s} D_{(i+\ell)p^s} D_{p^s}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\ell} \binom{j}{\ell}\binom{i+\ell}{j} u^{(j-\ell)p^s} \{ (i+\ell) u^{p^s} D_{(i+\ell)p^s} + (i+\ell+1) D_{(i+\ell+1)p^s} \} \\ &= \sum_{\ell} (i+\ell)\binom{j}{\ell}\binom{i+\ell}{j} u^{(j+1-\ell)p^s} D_{(i+\ell)p^s} + \sum_{\ell} (i+\ell+1)\binom{j}{\ell}\binom{i+\ell}{j} u^{(j-\ell)p^s} D_{(i+\ell+1)p^s} \end{aligned}$$

$$\therefore\ D_{ip^s} D_{(j+1)p^s} = \frac{1}{j+1}\left\{ \sum_{\ell} (i+\ell-j)\binom{j}{\ell}\binom{i+\ell}{j} u^{(j+1-\ell)} D_{(i+\ell)p^s} + \sum_{\ell} \binom{j}{\ell}\binom{i+\ell}{j}(i+\ell+1)\, u^{(j-\ell)p^s} D_{(i+\ell+1)p^s} \right\}$$

ここで、簡単な計算から、

$$(i+\ell-j)\binom{j}{\ell}\binom{i+\ell}{j} + \binom{j}{\ell-1}\binom{i+\ell-1}{j}(i+\ell) = (j+1)\binom{j+1}{\ell}\binom{i+\ell}{j+1}$$

よって、$D_{ip^s} D_{(j+1)p^s} = \sum_{\ell} \binom{j+1}{\ell}\binom{i+\ell}{j+1} u^{(j+1-\ell)} D_{(i+\ell)p^s}$ となり $j+1$ のときも成立する∎

<u>Step</u> 7　$\mathbb{D}$ は(*)を満たす。

（証明）$\sum_{\ell} \binom{j}{\ell}\binom{i+\ell}{j} u^{j-\ell} D_{i+\ell}$ において、$\ell_k > j_k$（$\exists k$）ならば、Step 1 より $\binom{j}{\ell} = 0$ である。従って、$\ell_k \leqslant j_k$（$\forall k$）を満たす ℓ についてのみ和を考えればよい。このとき、$i_0+\ell_0 < p+j_0$ ゆえ、$i_0+j_0 \geq p$ ならば $\binom{i+\ell}{j} = 0$ である。よって $i_0+\ell_0 < p$ としてよい。すると、$i_1+j_1 < p+j_1$ ゆえ、今と同様に $i_1+j_1 \geqslant p$ ならば $\binom{i+\ell}{j} = 0$ となる。よって $i_1+\ell_1 < p$ としてよい。以下、この議論をくり返して、$\ell_k \leq j_k$（$\forall k$）のとき、$i_{k'}+j_{k'} \geq p$（$\exists k'$）ならば $\binom{i+\ell}{j} = 0$ となることがわかる。従って、Step 6 より、

$$\sum_{\ell} \binom{j}{\ell}\binom{i+\ell}{j} u^{j-\ell} D_{i+\ell} = \prod_{s=0}^{m-1} \sum_{t=0}^{j_s} \binom{j_s}{t}\binom{i_s+t}{j_s} u^{(j_s-t)p^s} D_{(i_s+t)p^s}$$

$$= \prod_{s=0}^{m-1} D_{i_s p^s} D_{j_s p^s} = \left(\prod_{s=0}^{m-1} D_{i_s p^s}\right)\left(\prod_{s=0}^{m-1} D_{j_s p^s}\right) = D_i D_j \ ∎$$

以上で十分性が示せた。従って、全体として、定理2の証明も完了したことになる∎

特に、$R=k$, $u=1$ の場合を考えて次を得る。

系3　affine group scheme μ_q の affine scheme Spec(B) への作用を与えることと、B に条件

(1)　$D_{p^i} D_{p^j} = D_{p^j} D_{p^i}$　$(0 \leq {}^\forall i, j < m)$

(2)　$D_{p^i}{}^p = D_{p^i}$　$(0 \leq {}^\forall i < m)$

(3)　$D_n = \prod_{i=0}^{m-1} \binom{D_{p^i}}{n_i}$　$(0 \leq {}^\forall n < q)$

を満たす k 上の higher derivation $\mathbb{D} = \{D_0, D_1, \cdots, D_{q-1}\}$ を与えることとは同値である。

2. 多項式環への線形作用

記号や仮定はもとのままとする。ここでは、Hopf algebra $A = R[X]/(X^q)$ の R-algebra B への coaction ρ が与えられたときに、その不変部分環

$$C = \{ b \in B \mid \rho(b) = b \otimes 1 \}$$

について考えることにする。ρ に対応する higher derivation を前節同様 $\mathbb{D} = \{D_0, D_1, \cdots, D_{q-1}\}$ とおく。

Lemma 4　$C = \{ b \in B \mid D_{p^i}(b) = 0 \quad (0 \leq {}^\forall i < m) \}$

(証明)　$\rho(b) = \sum_{s=0}^{q-1} D_s(b) \otimes x^s$ ゆえ、定理2より結論は明らかである ∎

<u>Lemma</u> 5　　$b^{q} \in C$　　$(\forall b \in B)$

（証明）　$D_{p^i}(b^{p^{i+1}}) = 0$　$(\forall b \in B)$　が各 i に対して成立することがいえれば、Lemma 4 より結論を得る。i についての帰納法でこれを示す。$i=0$ のとき、D_1 は k-derivation であるから、$D_1(b^p) = p b^{p-1} D_1(b) = 0$．　$i-1$ で正しいと仮定する。このとき、定理 2 より、$D_s(b^{p^i}) = 0$　が　$0 \leqq {}^{\forall}s < p^i$　に対し成り立つことがわかる。従って、$D_{p^i}(b^{p^{i+1}}) = D_{p^i}(b^{p^i} \cdots b^{p^i}) =$

$$p(b^{p^i})^{p-1} D_{p^i}(b^{p^i}) + \sum_{\substack{s_1+\cdots+s_p = p^i \\ 0 \leqq s_i < p^i}} D_{s_1}(b^{p^i}) \cdots D_{s_p}(b^{p^i}) = 0 \quad ∎$$

従って、次の系を得る。

<u>系</u> 6　R が Noether 環で、B が finitely generated R-algebra ならば、不変部分環 C も finitely generated R-algebra であり、かつ B は finite C-module である。

（証明）　Lemma 5 より、$B^{q} \subset C \subset B$　かつ B は finite B^{q}-module である。従って全体の結論は明らかである ∎

以下では、R が整域でかつ B が多項式環 $R[X_1, \cdots, X_n]$ の場合を考える。このとき、A の B への coaction ρ が線形であるという概念、および、それが対角化可能であるという概念を次のように定義する。

<u>定義</u>　Hopf algebra $A = R[X]/(X^q)$ の多項式環 $R[X_1, \cdots, X_n]$ への coaction ρ が線形であるとは、各 s （$0 \leqslant s < q$）に対し、ある n 次行列 $M_s \in M_n(R)$ が存在して

$$\begin{pmatrix} D_s(X_1) \\ \vdots \\ D_s(X_n) \end{pmatrix} = M_s \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

と表わせることをいう。また、このとき、この coaction ρ が対角化可能であるとは、適当な正則行列 $P \in GL_n(R)$ を選んで、$P^{-1}M_sP$ が各 s に対し、対角行列にできることをいう。

<u>Lemma</u> 7　A の $R[X_1, \cdots, X_n]$ への coaction ρ が対角化可能であるための必要十分条件は、ある正則行列 $P \in GL_n(R)$ および、$0 \leqslant \lambda_{ij} < p$ を満たす自然数 λ_{ij} （$0 \leqslant i < m$, $1 \leqslant j \leqslant n$）が存在して、

$$P^{-1}M_{p^i}P = \begin{pmatrix} \lambda_{i1}u^{p^i} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{in}u^{p^i} \end{pmatrix} \qquad (\forall i)$$

とできることである。

（証明）必要性を示す。定理2より、$M_{p^i}^{\,p} = u^{(p-1)p^i}M_{p^i}$ が成立する。よって、M_{p^i} の固有値は、k の素体を $\mathbb{F}_p$ （$\cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$）で表わすとき、$\lambda_{ij}u^{p^i}$ （$\exists \lambda_{ij} \in \mathbb{F}_p$）の形をしている。このことから結論は明らかである。十分性は次の Lemma より出る ∎

<u>Lemma</u> 8　$D_{p^i}(X_j) = \lambda_{ij}u^{p^i}X_j$ （$0 \leqslant \exists \lambda_{ij} < p$）が各 i, j に対し成立するとき、$\lambda_j = \lambda_{0j} + \lambda_{1j}p + \cdots + \lambda_{m-1j}p^{m-1}$ とおけば、

$$D_s(x_j) = u^s \binom{\lambda_j}{s} x_j \qquad (0 \leq {}^\forall s < q,\ 1 \leq {}^\forall j \leq n)$$

（証明） 仮定と定理2より、

$$\begin{aligned} D_s(x_j) &= \prod_{i=0}^{m-1} D_{p^i}(D_{p^i} - u^{p^i}) \cdots (D_{p^i} - (s_i-1)u^{p^i})(x_j) \\ &= \prod_{i=0}^{m-1} u^{s_i p^i} \lambda_{ij}(\lambda_{ij}-1) \cdots (\lambda_{ij}-(s_i-1)) x_j \\ &= \prod_{i=0}^{m-1} u^{s_i p^i} \binom{\lambda_{ij}}{s_i} x_j \\ &= u^{s_0 + s_1 p + \cdots + s_{m-1}p^{m-1}} \binom{\lambda_{0j} + \lambda_{1j} p + \cdots + \lambda_{m-1j} p^{m-1}}{s_0 + s_1 p + \cdots + s_{m-1} p^{m-1}} x_j \\ &= u^s \binom{\lambda_j}{s} x_j \quad \blacksquare \end{aligned}$$

<u>Lemma</u> 9　Lemma 8と同じ仮定のもとに次が成立する：

$$D_s(x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}) = u^s \binom{\lambda_1 i_1 + \cdots + \lambda_n i_n}{s} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

（証明） Lemma 8 より、 $D_s(x_{\ell_1} \cdots x_{\ell_t}) = \sum_{s_1+\cdots+s_t=s} D_{s_1}(x_{\ell_1}) \cdots D_{s_t}(x_{\ell_t})$

$$= \sum_{s_1+\cdots+s_t=s} u^{s_1}\binom{\lambda_{\ell_1}}{s_1} \cdots u^{s_t}\binom{\lambda_{\ell_t}}{s_t} x_{\ell_1} \cdots x_{\ell_t} = u^s \binom{\lambda_{\ell_1} + \cdots + \lambda_{\ell_t}}{s} x_{\ell_1} \cdots x_{\ell_t}$$

従って結論を得る $\blacksquare$

以上のことから、次が示せる。

<u>定理</u> 10　$A = R[X]/(X^q)$ の $R[x_1, \cdots, x_n]$ への coaction ρ が対角化可能ならば、ある整数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ($0 \leq \lambda_i < q$) が存在して

$$C \cong R[\, x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \mid \lambda_1 i_1 + \cdots + \lambda_n i_n \equiv 0 \pmod{q} \,]$$

（証明） まず、coaction ρ が線形ならば、C は R 上 monomials で生成されることに注意する。結論を示すには、最初から、Lemma 8 の仮定が満たされているとしてよい。このとき、$\lambda_1, \cdots \lambda_n$ を Lemma 8 と同じとするとき、Lemma 9 より、

$$D_{p^s}(x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}) = u^{p^s}\binom{\lambda_1 i_1+\cdots+\lambda_n i_n}{p^s}\,x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$$
$$= u^{p^s}(\lambda_1 i_1+\cdots+\lambda_n i_n)_s\,x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$$

従って、$D_{p^s}(x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}) = 0$ が各 s $(0\leqslant s<m)$ に対して成り立つための必要十分条件は、$(\lambda_1 i_1+\cdots+\lambda_n i_n)_s = 0$ $({}^{\forall}s)$ となることであり、これは、$\lambda_1 i_1+\cdots+\lambda_n i_n \equiv 0 \pmod{q}$ と同値である。従って Lemma 4 より主張を得る∎

特に、μ_q の線形作用については、次が成立する。

<u>Lemma</u> 11　μ_q の $k[x_1,\cdots,x_n]$ への線形作用は対角化可能である。

(証明)　D_{p^i} を表現する行列 $M_{p^i}\in M_n(k)$ は系3より、$M_{p^i}^p = M_{p^i}$ を満たし、従って対角化可能である。しかも、$M_{p^i}M_{p^j} = M_{p^j}M_{p^i}$ が成立するから、各 i に対し、同時に対角化できる。従って Lemma 7 より結論を得る∎

<u>系</u> 12　μ_q が $k[x_1,\cdots,x_n]$ に線形作用するとき、不変部分環を C とすれば、ある整数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ $(0\leqslant\lambda_i<q)$ が存在して、

$$C \cong k[x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n} \mid \lambda_1 i_1+\cdots+\lambda_n i_n \equiv 0 \pmod{q}]$$

(証明)　Lemma 11 と定理 10 より明らかである∎

最後に、次のことに注意して本稿を終えることにする。

<u>*Lemma*</u> 13　μ_q が $k[X_1,\cdots,X_n]$ に作用するとき、その不変部分環 C は Cohen-Macaulay 環である。

（証明）$Y=X+1$ とおけば、$k[X]/(X^q)=k[Y]/(Y^q-1)$ であり、これは q 次の巡回群から作られた群環に、自然な Hopf algebra の構造を入れたものである。よく知られているように、一般に、群環から自然に作られた Hopf algebra がある環に coact するとき、その不変部分環はもとの環の直和因子になる。よってこの場合、$k[X_1,\cdots,X_n]$ は C を（C-module として）直和因子にもち、従って、C は Cohen-Macaulay 環となる ∎