数理解析研究所講究録
第 608 巻 1987 年 93-104

可換環の微分作用素

広大 学校教育 石橋康徳

(Yasunori Ishibashi)

§1 準備

kを体とし，Rをk-代数とする。k-線形写像D : $R \to R$と$a \in R$に対して，$[D, a] = Da - aD$とおく．$[D, a]$はRからR自身へのk-線形写像である．RからR自身へのk-線形写像全体のつくるR-加群を$\mathrm{Hom}_k(R, R)$と表し，その部分加群$\mathrm{Diff}^n(R)$を次のように帰納的に定義する．

$\mathrm{Diff}^n(R) = 0 \quad (n < 0)$.

$\mathrm{Diff}^n(R) = \{D \in \mathrm{Hom}_k(R, R) \mid [D, a] \in \mathrm{Diff}^{n-1}(R), \forall a \in R\}$

$(n \geq 0)$とおく．$\mathrm{Diff}^n(R)$の元をR上のn階のk-微分作用素（あるいは単にn階の微分作用素）という．

次のことが成り立つ．

(1) $\mathrm{Diff}^0(R) = \mathrm{Hom}_R(R, R) \cong R$.

(2) $\mathrm{Diff}^1(R) = R \oplus \mathrm{Der}(R)$, $\mathrm{Der}(R)$はR上のk-導

分のつくる加群を表す。

(3) $\mathrm{Diff}^n(R) \subset \mathrm{Diff}^{n+1}(R)$.

(4) $D \in \mathrm{Diff}^n(R)$, $D' \in \mathrm{Diff}^m(R)$ に対して, $DD' \in \mathrm{Diff}^{n+m}(R)$, $[D, D'] = DD' - D'D \in \mathrm{Diff}^{n+m-1}(R)$.

(5) $\mathrm{Diff}^\infty(R) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Diff}^n(R)$ とおくと, $\mathrm{Diff}^\infty(R)$ は k-代数で, R を部分環として含む。

k-線形写像 $D: R \to R$ が, R 上の n 階の k-導分(あるいは単に n 階の導分)であるとは

$\forall a_0, a_1, \cdots, a_n \in R$ に対して,

$$D(a_0 a_1 \cdots a_n) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+1} \sum_{i_1 < \cdots < i_s} a_{i_1} \cdots a_{i_s} D(a_0 \cdots \hat{a}_{i_1} \cdots \hat{a}_{i_s} \cdots a_n)$$

が成り立つときをいう。n 階の k-導分全体のつくる $\mathrm{Hom}_k(R, R)$ の部分加群を $\mathrm{Der}^n(R)$ と表す。$\mathrm{Der}^0(R) = 0$, $\mathrm{Der}^1(R) = \mathrm{Der}(R)$ である。$\mathrm{Der}^n(R) = 0$ $(n < 0)$ とおく。

$\mathrm{Diff}^n(R)$ と $\mathrm{Der}^n(R)$ の関係は次の通りである。

(6) k-線形写像 $D: R \to R$ に対して,

$$D \in \mathrm{Diff}^n(R) \Leftrightarrow D - D(1) \in \mathrm{Der}^n(R).$$

(7) $\mathrm{Der}^n(R) = \{ D \in \mathrm{Diff}^n(R) \mid D(1) = 0 \}$.

(8) $\mathrm{Diff}^n(R) = R \oplus \mathrm{Der}^n(R)$.

今後, k は標数 0 の体を表すことにする。

$\mathrm{Diff}^n(R)$ の任意の元が積 $D_1 \cdots D_n$ $(D_1, \cdots, D_n \in \mathrm{Diff}^1(R))$ の有限和の形に表されるとき, $\mathrm{Diff}^n(R)$ は $\mathrm{Diff}^1(R)$ で生成さ

れるという。また，任意の正整数 n に対して，$\mathrm{Diff}^n(R)$ が $\mathrm{Diff}^1(R)$ で生成されるとき，$\mathrm{Diff}^\infty(R)$ は $\mathrm{Diff}^1(R)$ で生成されるという。次のことが成り立つ。

(9) R を k 上のアフィン環とし，$\mathfrak{p}$ を R の素イデアルとする。R ($R_\mathfrak{p}$) が正則環ならば，$\mathrm{Diff}^\infty(R)$ ($\mathrm{Diff}^\infty(R_\mathfrak{p})$) は，$\mathrm{Diff}^1(R)$ ($\mathrm{Diff}^1(R_\mathfrak{p})$) で生成される (cf. [2])。

(10) $R = k[x_1, \cdots, x_s]/J$ とおく。このとき，$\mathrm{Diff}^n(R)$ の元と $\{D \in \mathrm{Diff}^n(k[x_1, \cdots, x_s]) \mid D(J) \subset J\}$ の元とは自然な対応で1対1に対応する。$J = (x_1^2 + \cdots + x_s^2)$ の場合を考えてみよう。

$$\begin{aligned} D = &(x_1 - x_2 - \cdots - x_s)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (-x_1 + x_2 - \cdots - x_s)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\ &+ \cdots + (-x_1 - \cdots - x_{s-1} + x_s)\frac{\partial^2}{\partial x_s^2} + 2\sum_{i<j}(x_i + x_j)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \\ &+ (s-2)\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

とおくと，$D \in \mathrm{Diff}^2(k[x_1, \cdots, x_s])$ で，$D(J) \subset J$ である。したがって，$D \in \mathrm{Diff}^2(R)$。一方，$D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(R)$ に対して，$D_1 D_2(x_i^2) \in (x_1, \cdots, x_s)^2$ である。したがって，$D \notin \mathrm{Diff}^1(R)\mathrm{Diff}^1(R)$。ゆえに，$\mathrm{Diff}^2(R)$ は $\mathrm{Diff}^1(R)$ で生成されない。

(11) $R = k[x_1, x_2, x_3]/(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)$ とおく。$\mathrm{Diff}^\infty(R)$ は有限生成 k-代数でもないし，左ネーター環でも右ネーター環でもない (cf. [1])。

中井予想：

R を k 上のアフィン整域とし，$\mathfrak{p}$ を R の素イデアルとする．$\mathrm{Diff}^{\infty}(R_{\mathfrak{p}})$ が $\mathrm{Diff}^{1}(R_{\mathfrak{p}})$ で生成されるならば，$R_{\mathfrak{p}}$ は正則局所環である。

Zariski－Lipman 予想：

R を k 上のアフィン整域とし，$\mathfrak{p}$ を R の素イデアルとする。R－加群 $\mathrm{Der}(R_{\mathfrak{p}})$ が自由加群ならば，$R_{\mathfrak{p}}$ は正則局所環である。

中井予想と Zariski-Lipman 予想とは密接な関連があり，中井予想が真であれば，Zariski－Lipman 予想が真であることが証明されている（cf. [8]）．中井予想に関して次の結果を得た（これまでのところは，$\dim R = 1$ の場合に予想が正しいことが示されているだけである（[6]））．

定理 1（[4], Theorem 4）．R は代数閉体 k 上の次数環で，2次元の完交環とする。このとき，$\mathrm{Diff}^{\infty}(R)$ が $\mathrm{Diff}^{1}(R)$ で生成されるならば，$R \cong k[x_1, x_2]$ である．

定理 2（[5], Theorem 2.3）．有限群 $G \subset GL(n, k)$ が多項式環 $R = k[x_1, \cdots, x_n]$ に自然に作用しているとする．このとき，$\mathrm{Diff}^{\infty}(R^G)$ が $\mathrm{Diff}^{1}(R^G)$ で生成されるならば，

R^G は多項式環に同型である。

定理3（[5], Theorem 3.3). Sを体k上のアフィン整域, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)$, $R = S_{\mathfrak{p}}$とする。Gは$\mathrm{Aut}(R)$の有限群で, Gの元によって与えられるRの剰余体の自己同型はすべて恒等変換とする。このとき, $\mathrm{Diff}^{\infty}(R^G)$が$\mathrm{Diff}^{1}(R^G)$で生成されるならば, R^Gは正則局所環である。

本講演では定理1の証明を中心に述べる。

§2. 定理1の証明

本節では定理1の証明の概略を解説する。詳細については, [4]を参照して下さい。

$R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$を$k$上の有限生成次数整域とする。$R_0 = k$, $R = k[R_1]$として, $R = k[x_1, \cdots, x_s]/\mathfrak{P}$（$\mathfrak{P}$は斉次素イデアル）と表す。

Rの微分作用素Dが, 任意のiに対して$D(R_i) \subset R_{i+l}$をみたすとき, Dをl次の斉次微分作用素という。オイラー導分$I = \sum_{i=1}^{s} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$を考える。イデアル$\mathfrak{P}$は斉次であるから, $I(\mathfrak{P}) \subset \mathfrak{P}$。したがって, $I \in \mathrm{Diff}^{1}(R)$である。$I$は0次の斉次微分作用素である。$n$階の微分作用素で,

且つ ℓ 次の斉次微分作用素であるもの全体のつくる k ーベクトル空間を $\mathrm{Diff}_\ell^n(R)$ と表し，$\mathrm{Diff}_\ell^\infty(R)=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Diff}_\ell^n(R)$ とおく。

$\dim R\geq 2$，$X=\mathrm{Spec}(R)$，$X_0=X-\{\mathfrak{m}\}$ $(\mathfrak{m}=\bigoplus_{i\geq 1}R_i)$，$\overline{X}=\mathrm{Proj}(R)$ とおく。X_0 上の n 階の k ー微分作用素の芽の層を $\mathrm{Diff}^n(X_0)$ と表し，$\mathrm{Diff}^\infty(X_0)=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Diff}^n(X_0)$ とおく。また，X_0 上の n 階の k ー微分作用素 D で，$[I,D]=\ell D$ をみたすようなものの芽の層を $\mathrm{Diff}_\ell^n(X_0)$ と表す。自然な射影：$X_0\to X$ を π と表し，$\Delta_\ell^n=\pi_*(\mathrm{Diff}_\ell^n(X_0))$ とおく。

補題1. $\operatorname{depth} R_{\mathfrak{m}}\geq 2$ のとき，次のことが成り立つ。

(i) $H^0(X_0,\mathrm{Diff}^\infty(X_0))\cong\mathrm{Diff}^\infty(R)$.

(ii) $H^0(\overline{X},\Delta_\ell^n)\cong\mathrm{Diff}_\ell^n(R)$.

(iii) $\Delta_\ell^n\cong\Delta_0^n\otimes\mathcal{O}_{\overline{X}}(\ell)$.

$\sigma_1=\Delta_0^1$，$\sigma_n=\Delta_0^n/\Delta_0^{n-1}$ $(n\geq 2)$ とおく。完全列

$$0\longrightarrow\Delta_\ell^{n-1}\longrightarrow\Delta_\ell^n\longrightarrow\sigma_n\otimes\mathcal{O}_{\overline{X}}(\ell)\longrightarrow 0$$

から，次のようなコホモロジー群の完全列を得る。

$$\begin{array}{cccccc}
 & \mathrm{Diff}_\ell^{n-1}(R) & & \mathrm{Diff}_\ell^n(R) & & \\
 & \wr\| & & \wr\| & & \\
0\to & H^0(\overline{X},\Delta_\ell^{n-1}) & \to & H^0(\overline{X},\Delta_\ell^n) & \to & H^0(\overline{X},\sigma_n\otimes\mathcal{O}_{\overline{X}}(\ell)) \\
\to & H^1(\overline{X},\Delta_\ell^{n-1}) & \to & H^1(\overline{X},\Delta_\ell^n) & \to & H^1(\overline{X},\sigma_n\otimes\mathcal{O}_{\overline{X}}(\ell))
\end{array}\tag{12}$$

$$\to H^2(\bar{X}, \Delta_\ell^{n-1}) \to \cdots .$$

補題2. $\bar{X} = \mathrm{proj}(R)$ は正則スキームとする。$\mathcal{J}$ を $\bar{X}$ の接ベクトル束とすると，次のような X 上の層の完全列が存在する。

$$0 \to \sigma_{n-1} \xrightarrow{\theta} \sigma_n \to S^n(\mathcal{J}) \to 0 .$$

ただし，θ はオイラー導分 I による乗法で，$\sigma_0 = \mathcal{O}_{\bar{X}}$ である。

層の完全列

$$0 \to \sigma_{n-1} \otimes \mathcal{O}_{\bar{X}}(\ell) \to \sigma_n \otimes \mathcal{O}_{\bar{X}}(\ell) \to S^n(\mathcal{J}) \otimes \mathcal{O}_{\bar{X}}(\ell) \to 0$$

から，次のようなコホモロジー群の完全列を得る。

$$(13)\quad \begin{aligned} 0 &\to H^0(\bar{X}, \sigma_{n-1} \otimes \mathcal{O}_{\bar{X}}(\ell)) \xrightarrow{\phi_{n,\ell}} H^0(\bar{X}, \sigma_n \otimes \mathcal{O}_{\bar{X}}(\ell)) \\ &\xrightarrow{\psi_{n,\ell}} H^0(\bar{X}, S^n(\mathcal{J}) \otimes \mathcal{O}_{\bar{X}}(\ell)) \to H^1(\bar{X}, \sigma_{n-1} \otimes \mathcal{O}_{\bar{X}}(\ell)) \\ &\to H^1(\bar{X}, \sigma_n \otimes \mathcal{O}_{\bar{X}}(\ell)) \to H^1(\bar{X}, S^n(\mathcal{J}) \otimes \mathcal{O}_{\bar{X}}(\ell)) \\ &\to H^2(\bar{X}, \sigma_{n-1} \otimes \mathcal{O}_{\bar{X}}(\ell)) \to \cdots . \end{aligned}$$

$\dim R = 2$ で，次数環 R は完交環とする。$\mathfrak{a}$ は斉次多項式から成る正則列 $f_1, \cdots, f_{s-2}$ で生成される。代数曲線 $\bar{X} = \mathrm{proj}(R)$ は特異点をもたないとし，$\bar{X}$ の接ベクトル束 $\mathcal{J}$ の双対束を $\omega_{\bar{X}}$ と表す。このとき，$\omega_{\bar{X}} \cong \mathcal{O}_{\bar{X}}(a)$ $(a = \sum_{j=1}^{s} \deg(f_j) - s)$ である。このとき，次のことが成り立つ。

補題3．$a>0$とする。完全列(13)において，$\ell \geq na+1$ならば，$\psi_{n,\ell}$は全射である。また，$\ell \leq na$ならば，$\psi_{n,\ell}$は零写像である。したがって，$\ell \leq na$ならば，$\phi_{n,\ell}$は同型である。

定理1の証明には，さらに次の結果を使う。

補題4（[13]）．$R=\bigoplus_{i\geq 0} R_i$は2次元の正規次数環で，$\mathfrak{m}=\bigoplus_{i\geq 1} R_i$に特異点をもつとする。このとき，$(R, \mathfrak{m})$が巡回商特異点（cyclic quotient singularity）でないならば，Rの斉次導分で次数が正でないものはオイラー導分だけである。

定理1の証明の概略．$\mathrm{Diff}^\infty(R)$が$\mathrm{Diff}^1(R)$によって生成されるので，Rは正規である（[4], Theorem 3）．$R_{\mathfrak{m}}$（$\mathfrak{m}=\bigoplus_{i\geq 1} R_i$）が正則であることを示せばよい。$R$が$\mathfrak{m}$に特異点をもつと仮定してみよう．

$(R, \mathfrak{m})$が巡回商特異点のとき，Rは次数が負の斉次導分をもたない（cf. [13]）．しかし，この場合にはRの斉次微分作用素で次数が負のものを構成できる。したがって，$\mathrm{Diff}^\infty(R)$は$\mathrm{Diff}^1(R)$で生成されない。これは仮定に反する。

$(R, \mathfrak{m})$ が巡回商特異点でないとき，$\dim \bar{X} = 1$ であるから完全列 (12) において $H^2(\bar{X}, \Delta_\ell^{m-1}) = 0$ となる．リーマンロッホの定理により，$\ell > ma$ (a は補題3の前で定められた整数) ならば，$H^1(\bar{X}, \Delta_\ell^{m-1}) = 0$．したがって，$\ell \geq ma+1$ ならば，

$$H^0(\bar{X}, \sigma_m \otimes \mathcal{O}_{\bar{X}}(\ell)) \cong \mathrm{Diff}_\ell^m(R) / \mathrm{Diff}_\ell^{m-1}(R).$$

一方，完全列 (13) から

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\psi_{m, ma+1}) &= H^0(\bar{X}, \mathcal{J}^{\otimes m} \otimes \mathcal{O}_{\bar{X}}(ma+1)) \\ &= H^0(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(1)) \neq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\psi_{m, ma+1}) &\cong H^0(\bar{X}, \sigma_m \otimes \mathcal{O}_{\bar{X}}(ma+1)) / H^0(\bar{X}, \sigma_{m-1} \otimes \mathcal{O}_{\bar{X}}(ma+1)) \\ &\cong \mathrm{Diff}_{ma+1}^m(R) / (I\,\mathrm{Diff}_{ma+1}^{m-1}(R) + \mathrm{Diff}_{ma+1}^{m-1}(R)). \end{aligned}$$

R の斉次導分で次数が正でないものはオイラー導分 I だけである（補題4）．したがって，

$$\mathrm{Diff}_{ma+1}^m(R) \supsetneqq \mathrm{Diff}_{ma+1}^m(R) \cap \{\mathrm{Diff}^1(R) \text{ で生成される微分作用素}\}.$$

ゆえに，$\mathrm{Diff}^\infty(R)$ は $\mathrm{Diff}^1(R)$ によって生成されない。これは仮定に反する。以上で，$a > 0$ の場合に矛盾を導いたが，$a \leq 0$ の場合の議論はもっと簡単になる。詳細については，[4] を参照して下さい。

§3．補遺

定理 2, 3 の証明には次の補題が鍵になる。

補題 5 ([5], proposition 1.2). R を k-代数とし，G を $\mathrm{Aut}(R)$ の有限群とする。G の k への作用は自明とする。$X = \mathrm{Spec}(R)$ の閉集合 Z で次の二条件をみたすものが存在すると仮定する。

(i) 任意の $\mathfrak{p} \in Z$ に対して，$\mathrm{depth}\, R_{\mathfrak{p}} \geq 2$.

(ii) 自然な射：$X \to Y = \mathrm{Spec}(R^G)$ は Z の外ではエタールである。

このときには，制限写像：$\mathrm{Diff}^n(R)^G \to \mathrm{Diff}^n(R^G)$ は同型である。ただし，$\mathrm{Diff}^n(R)^G$ は n 階の G-不変微分作用素全体のつくる R^G-加群を表す。

定理 2, 3 の証明の詳細については，[5] を参照して下さい。

最後に，可換環の微分作用素に関するいくつかの研究をあげておくことにする。

(i) X が 3次元アフィン空間の錐の場合 ([1], [9], [12]).

(ii) X が特異点もつ代数曲線の場合 ([10], [11], [15]).

(iii) X が非特異代数多様体の場合 ([14]).

(iv) 微分作用素の延長について ([16]).

References

[1] J. N. Bernstein, I. M. Gelfand and S. I. Gelfand: Differential operators on the cubic cone, Russian Math. Surveys, 27 (1972), 169 - 174.

[2] A. Grothendieck: Éléments de Géométrie Algébrique IV, IHES, Publ. Math. 32 (1967).

[3] R. G. Heynemann and M. Sweedler: Affine Hopf algebras, J. Algebra, 13 (1969), 192 - 241.

[4] Y. Ishibashi: Remarks on a conjecture of Nakai, J. Algebra, 95 (1985), 31 - 45.

[5] Y. Ishibashi: Nakai's conjecture for invariant subrings, Hiroshima Math. J., 15 (1985), 429 - 436.

[6] K. R. Mount and O. E. Villamayor: On a conjecture of Y. Nakai, Osaka J. Math., 10 (1973), 325 - 327.

[7] Y. Nakai: High order derivations I, Osaka J. Math., 7 (1970), 1 - 27.

[8] C. J. Rego: Remarks on differential operators on algebraic varieties, Osaka J. Math., 14 (1977), 481 - 486.

[9] B. Singh: Differential operators on a hypersurface,Nagoya Math. J., 103 (1986), 67 - 84.

[10] S. P. Smith and J. T. Stafford: Differential operators on an affine curve, preprint.

[11] S. P. Smith: Curves, differential operators and finite dimensional algebras, preprint.

[12] J.-P. Vigué: Opérateurs différentiels sur les cônes normaux de dimension 2, C. R. Acad. Sc. Paris, 278, Sér. A, (1974), 1047 - 1050.

[13] J. Wahl: Derivations of negative weight and non-smoothability of certain singularities, Math. Ann., 258 (1982), 383 - 398.

[14] J. E. Björk: Rings of Differential Operators, North-Holland Mathematical Library, Amsterdam, 1979.

[15] J.-P. Vigué: Opérateurs différentiels sur les espaces analytiques, Invent. Math., 20 (1973), 313 - 336.

[16] Y. Nakai and Y. Ishibashi: Extensions of high order derivations, Algebraic and Topological Theories, Kinokuniya, 1985, 578 - 588.