数理解析研究所講究録
第608巻 1987年 127-138

非可換不変式論

名大．理、寺西鎮男
(Yasuo Teranishi)

以下では、K：標数零の体　V：K上の有限次元ベクトル空間，G：GL(V)の部分群とする．

群GのVへの自然な作用は、Vのtensor algebra $K\langle V\rangle$への作用に拡張される：

$$K\langle V\rangle = K \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus V^{\otimes n} \oplus \cdots,$$

ここで　$V^{\otimes n}$：Vのn回tensor積．

tensor algebra $K\langle V\rangle$のGによるfixed ringを$K\langle V\rangle^G$であらわす．Dicks-Formanek [2]とKharchenko [3]は独立に次の事を証明した：　定理1.(Dicks-Formanek, Kharchenko)

Gが有限群のとき

$K\langle V\rangle^G$が有限生成

$\Longleftrightarrow$ Gが$K\langle V\rangle$にscalar倍として作用する．

従ってGの作用がtrivialな場合を除いては、$K\langle V\rangle^G$は有限生成にはならなくて、この事は、

E. Noether による 可換環の場合の 次の定理と比較すると面白い.

<u>定理2</u>(E. Noether) G が有限群のとき, V 上の多項式環 $K[V]$ の G による fixed ring $K[V]^G$ は有限生成である.

定理1 がもっと一般の群に対して成立するか否かを 筆者は知りませんが, 後に(§2)古典的な不変式論の非可換版に対して成立することを示します.

定理1と並んで, 可換不変式論の場合と比較して, いちじるしい現象は次の定理です.

<u>定理3</u>, (Lane [4], Kharchenko [3])
G が $GL(V)$ のかってな部分群のとき $K\langle V\rangle^G$ は K 上の free associative algebra である.

§1. Kharchenko の問題.

定理1によってほとんどの場合 $K\langle V\rangle^G$ は有限生成にならないのであるが, Kharchenko は、次の問題を提出した:

n 次対称群 S_n は $V^{\otimes n}$ の上に、place permutation として作用する. このとき. 良く知られている様に、S_n の作用と $GL(V)$ の作用は commute しているので: $K\langle V\rangle^G_n$ $(= K\langle V\rangle^G \cap V^{\otimes n})$ に S_n は作用する. Kharchenko の問題というのは, 次の主張は正しいか? ということを問うものです.

「G が有限群のとき. 有限個の $K\langle V\rangle^G$ の元が存在して、それらの生成する環を R としたとき, S_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって R を動かしたとき. $K\langle V\rangle^G$ の元がすべて得られる.」

実際. 上の主張はかなり一般的に正しく、次の定理が Capelli の恒等式を用いて比較的容易に証明されます.

<u>定理4.</u> G が linearly reductive な群のとき, Kharchenko の主張「…」は正しい.

§2. 非可換(古典的)不変式論

19世紀の不変式論では、もっぱら n-ary form の不変式論が考察された。ここでは、それの非可換版を取り扱う。次数 r の n-ary form

$$f = \sum \frac{r!}{r_1! \cdots r_n!} a_{r_1 \cdots r_n} x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}, \quad r_1 + \cdots + r_n = r$$

を考える。

変数 $x_1, \cdots, x_n$ が一次変換

$$x_i = \sum g_{ji} x_j' \qquad g = (g_{ij}) \in SL(n, K)$$

を受ける時、n-ary form f は次の形に変形される：

$$f' = \sum \frac{r!}{r_1! \cdots r_n!} a'_{r_1 \cdots r_n} x_1'^{r_1} \cdots x_n'^{r_n}.$$

斉次多項式 $J(a_{r_1 \cdots r_n}) \in K[a_{r_1 \cdots r_n}]$ が

$$(*) \quad J(g(a_{r_1 \cdots r_n})) = J(a_{r_1 \cdots r_n}),$$

ただし $g(a_{r_1 \cdots r_n}) = a'_{r_1 \cdots r_n}$

をみたすとき $J(a_{r_1 \cdots r_n})$ は不変式であると言う。1890年頃、D. Hilbert は不変式のなす環 $K[a_{r_1 \cdots r_n}]^{SL(n)}$ は有限生成であるという有名な定理を証明した。ここではこの古典的

な不変式論の非可換版を考える．以下では，

$K\langle a_{r_1}, \cdots r_n\rangle$ で $a_{r_1}, \cdots r_n$ 達で生成された free associative algebra をあらわすことにする．$K\langle a_{r_1}, \cdots r_n\rangle$ は自然に graded ring になる

$$K\langle a_{r_1}, \cdots r_n\rangle = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} K\langle a_{r_1}, \cdots r_n\rangle_d .$$

$K\langle a_{r_1}, \cdots r_n\rangle$ の homogeneous な元 $J(a_{r_1}, \cdots r_n)$ が条件(*) を満足するとき，非可換不変式ということにする．このとき非可換不変式全体は graded ring になり

$$K\langle a_{r_1}, \cdots r_n\rangle^{SL(n)} = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} K\langle a_{r_1}, \cdots r_n\rangle_d^{SL(n)} ,$$

$$\left(K\langle a_{r_1}, \cdots r_n\rangle_d^{SL(n)} = K\langle a_{r_1}, \cdots r_n\rangle^{SL(n)} \cap K\langle a_{r_1}, \cdots r_n\rangle_d \right)$$

と分解する．

定理2により，非可換不変式環 $K\langle a_{r_1}, \cdots r_n\rangle$ は K 上の free associative algebra になるが，我々の目的は，$K\langle a_{r_1}, \cdots r_n\rangle$ の free generating set を具体的に求める事である．

2.1. $GL(n)$ の表現

ここでは，後に用いるために，$GL(n)$ の表現に関する基本的な事柄をまとめておく

以下

$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$: 深さ n の Young diagram

Y_λ : shape が λ の Young tableau

$w(Y_\lambda)$: weight of Y_λ

(Y_λ が 1 を i_1 個 2 を i_2 個, etc 含む時 数列 $(i_1, i_2, \cdots)$ を Y_λ の weight という)

$K(n, r, d)$: 深さ n の長方形の$\overbrace{\text{Young tableaux}}^{\text{column strict な}}$ で weight が $(\underbrace{r, \cdots, r}_{d})$ の ものの なす 集合.

とする.

例. $K(2,2,4)$ は次の Young tableaux からなる:

$$Y_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 \\ \hline\end{array}, \quad Y_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 4 \\ \hline\end{array}, \quad Y_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 4 & 4 \\ \hline\end{array}.$$

Littlewood - Richardson rule を用いると, 容易に次の proposition が得られる

Prop. 1.

$$\dim K\langle a_{r_1 \cdots r_n} \rangle_d^{SL(n)} = |K(n, r, d)|.$$

2.2. $K\langle a_{r_1\cdots r_n}\rangle^{SL(n)}$ の free generating set の構成

V を K 上の n 次元ベクトル空間として $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を V の基底とする. $S^r(V)$ で V の r 回対称テンソルの空間を現わすとき写像:

$$\alpha_1^{r_1}\cdots\alpha_n^{r_n} \longmapsto a_{r_1\cdots r_n} \quad (r_1+\cdots+r_n=r)$$

は $SL(n)$ - isomorphism $\varphi: K\langle S^r(V)\rangle \longrightarrow K\langle a_{r_1\cdots r_n}\rangle$ をひきおこす。$k_1, \cdots, k_n, d$ を不等式 $k_1 < k_2 < \cdots < k_n \leq d$ を満足する自然数とする。

$\overset{d}{\otimes} K[V]$ の tensor $\langle k_1, \cdots, k_n\rangle$ を次の様に定める:

$$\langle k_1, \cdots, k_n\rangle := \sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma \; 1\otimes\cdots\otimes\alpha_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\alpha_{\sigma(2)} \otimes\cdots\otimes\alpha_{\sigma(n)}\otimes\cdots\otimes 1,$$

ここで σ は $\{1, 2, \cdots, n\}$ の置換すべてにわたり, $\alpha_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(2)}, \cdots, \alpha_{\sigma(n)}$ はそれぞれ k_1 - 番目, k_2 - 番目, $\cdots$, k_n - 番目の場合にあらわれ, その他の場合はすべて 1 である

定義から $\langle k_1, \cdots, k_n\rangle$ は $SL(n)$ の作用で不変である.

$K(n,r,d)$ の 元

$$\begin{bmatrix} i_1 & j_1 & \cdots & m_1 \\ i_2 & j_2 & \cdots & m_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ i_n & j_n & \cdots & m_n \end{bmatrix}$$

に 対して、

$$\langle i_1, \cdots, i_n \rangle \langle j_1, \cdots, j_n \rangle \cdots \langle m_1, \cdots, m_n \rangle$$

を 考える. Y は 数字 $1, 2, \cdots, d$ を 各々 r 回 ずつ ふくむので、 これは、 $\overset{d}{\otimes} S^r(V)$ の 中の tensor である. 今、

$$F(Y, a) := \varphi(\langle i_1, \cdots, i_n \rangle \langle j_1 \cdots j_n \rangle \cdots \langle m_1, \cdots, m_n \rangle)$$

とおくと、 $F(Y, a)$ は、 $K\langle a_{r_1 \cdots r_n} \rangle$ の (非可換) 不変式 である. この様にして $K\langle n, r, d)$ の 各 Y に 対して, 不変式 $F(Y, a)$ が 構成 できる. さらに、 これらの 不変式 は 一次独立 であること が 証明でき、従って 次の 定理 を 得る.

定理 5. 不変式の 集合 $\{F(Y, a), Y \in K(n, r, d)\}$ は d 次の 不変式の なす ベクトル 空間 $K\langle a_{r_1 \cdots r_n} \rangle_d^{SL(n)}$

の基底である.

<u>例</u>. (Almkvist, Dicks and Formanek [ ])

r 次の binary form

$$f = \sum \binom{r}{k} a_k \, x_1^k x_2^{n-k}$$

を考える. $K(2, r, 2)$ は唯一つの元

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hline 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \hline \end{array}$$

を持つ.

従って次数 2 の不変式は

$$F(Y, a) = \varphi\left((\alpha_1 \otimes \alpha_2 - \alpha_2 \otimes \alpha_1)^r \right)$$

$$= \sum (-1)^{r-k} \binom{r}{k} a_k \, a_{r-k}$$

で与えられる.

$Y_1 \in K(n, r, d_1)$, $Y_2 \in K(n, r, d_2)$ に対して $K(n, r, d_1 + d_2)$ の元 $Y_1 \hat{\oplus} Y_2$ を次の様にして定義する:

Y_1 に右から Y_2 をつけ加えて、Y_2 の各元 i を $i + d_1$ でおきかえる.

例へば、

$$Y_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}\,, \qquad Y_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 \\ \hline \end{array}$$

の時、

$$Y_1 \hat{\oplus} Y_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 4 & 6 & 7 & 7 \\ \hline \end{array}\,.$$

演算 $\hat{\oplus}$ は、非可換だが、associative であることが、直ちにわかる. 定義から、

$$F(Y_1 \hat{\oplus} Y_2, a) = F(Y_1, a)\, F(Y_2, a)$$

となるので、$F(Y_1 \hat{\oplus} Y_2, a)$ は次数のより低い不変式の積として書きあらわすことができる. そこで次の用語を定義しよう.

Young tableau $Y \in K(n, r, d)$ は $Y = Y_1 \hat{\oplus} Y_2$, と
$(Y_1 \in K(n, r, d_1),\ Y_2 \in K(n, r, d_2),\ d = d_1 + d_2,\ d_1, d_2 \geqq 1)$

書くことができる時，分解可能 そうでない時分解不能であるという．

そこで，目標であった次の定理が得られる：

<u>定理 6.</u> 分解不能なすべての Young tableaux に対応する不変式 $F(Y, a)$ 達は，$K\langle a_{r_1 \cdots r_n}\rangle^{SL(n)}$ の free generating set になる．

分解不能な Young tableaux はいくらでも存在するので，次の定理が得られる：

<u>定理 7.</u> 非可換不変式環 $K\langle a_{r_1 \cdots r_n}\rangle^{SL(n)}$ は有限生成でない．

証明等はすべて，省略することになってしまったが それらについては，筆者の論文 [6] を見ていただきたい．

References

1. G. Almkvist, W. Dicks and E. Formanek, Hilbert series of fixed free algebra and noncommutative classical invariant theory, J. Algebra 93 (1985), 189 - 214

2. W. Dicks and E. Formanek, Poincaré series and a probrem of S. Montgomery, Linear and Multilinear Algebra 12 (1982), 21 - 30

3. V.K. Kharchenko, Algebra of invariants of free algebras, Algebras i Logika 17 (1978), 478 - 487 (in Russian); English translation: Algebra and Logic 17 (1978), 316 - 321

4. I.G. Lane, Free algebras of rank two and their automorphisms, Ph.D. thesis, Betford College, London, 1976.

5. E. Formanek and A.H. Schofield, Groups acting on the ring of two 2 x 2 generic matrices and a coproduct decomposition of its trace ring, Proc. of the A.M.S. Volume 95, Number 2, 1985

6. Y. Teranishi, Noncommutative classical invariant theory (preprint)