数理解析研究所講究録
第 609 巻 1987 年 22-31

Exact G-category の Q-construction

東工大 理 村山光孝 (Mitutaka Murayama)
京大 数理研 島川和久 (Kazuhisa Shimakawa)

序

Exact category M とその Q-構成 QM は Quillen[q] により定義され、M の代数的K-群は（圏の）分類空間 BQM のホモトピー群

$$K_i(M) = \pi_{i+1}(BQM) = \pi_i(\Omega BQM)$$

として定義された。（ΩX は X のループ空間。）

BQM は Waldhausen[w]の QQ-構成, shimakawa[s] の多重 Q-構成により無限ループ空間であることが示され（即ち ∃$\{X_n\}$, X_1 = BQM , BQM $\simeq$ $\Omega^n X_{n+1}$:ホモトピー同値）、代数的K-理論が一般（コ）ホモロジー論として定式化されている。

ここではこれを群Gの作用する場合に拡張することを考える。（c.f.[n]） その為に exact G-category M を定義し［ｓ］の方法に従って BQM が（上の X_n が G-空間で上のホモトピー同値が同変であるという意味で）同変無限ループ空間であること、即ち、次を示す。

定理

BQM と $\Omega^n BQ^{n+1}M^{[n+1]}$ は G-homotopy 同値。（$n \geq 1$）
従って BQM は同変無限loop空間。

2. Exact G-categories

Gを群とする。Mが <u>G-category</u> とは、Gが圏 M に各 $g \in G$ が functor であるように作用しているものとする。

小G-圏 M の対象集合、射集合は G-集合であり、その source, target, identity, composition functions は G-maps となる。
従って、その分類空間 BM は G-CW 複体（[m]）となる。
G-同変functor, natural transformation は、G-作用と可換なものとして定義される。 natural G-equivalence は 逆自然G-変換を持つものである。G-圏 M,N が G-equivalent とは、G-関手 $f:M \to N, h:N \to M$, 自然G-同値 $a:hf \cong Id_M$, $b:fh \cong Id_N$ が存在することである。

各部分群 $H<G$ による不動対象、射 M^H は又圏になり BM は G-CW 複体で $B(M^H)=(BM)^H$ が成り立つ。($M^H=\{m \in M \mid \forall g \in H, gm=m\}$)

例2.1 R を ring (with unity) で、G は R に (unitary) ring automorphism として作用しているとする。
GRM を全ての small G-R-modules M とその A-submodules N を対象とし、A-module homomorphisms を射とする圏とする。$g \in G$ に対し、$gM=M$ で gN は R-module であり、R-準同型 $f:N \to L$ に対し

$$(gf)(n) = gf(g^{-1}n)$$

で G-作用を定義すると、$gf:gN \to gL$ は A-準同型になり、GRM は G-category になる。（後ほど定義する small exact G-category M に対し、（非同変の場合と同様に）同変 embedding theorem が成り立つとすれば、ある1を持つ環 R が存在して M は

GRM の full G-subcategory となる。）

又、上の full subcategory で R 上有限生成射影的なもの全体を対象とするものを PG とすればこれも G-category である。

さらに PG の G-skeleton をとれば small G-category になる。

G-category内での同値関係がG-作用で保たれる($a \sim b \Rightarrow ga \sim gb$)時その同値類 $\{[a]\}$ にG-作用が $g[a]=[ga]$ で定義される。同値類 $[a]$ と同一の isotropy 部分群を持つ代表元 b ($G_{[a]}=G_b \equiv \{g \in G \mid gb=b\}$) が存在するとき b を $[a]$ の<u>同変代表元</u> (equivariant representative) という。

例２．２　部分対象は monomorphisms の次の同値関係による同値類である:　$f:b \rightarrowtail a \sim h:c \rightarrowtail a \leftrightarrow$ 同型 $k:b \cong c$ が存在して $f=hk$ 。

又、商対象は epimorphisms の次の同値関係による同値類である:

$f:a \twoheadrightarrow b \sim h:a \twoheadrightarrow c \leftrightarrow$ 同型 $k:b \cong c$ が存在して $h=kf$ 。

これらの同値関係はG-作用によって保たれる。零対象が存在してG-不変とすると kernel は部分対象であり cokernel は商対象だからこれらもG-作用によって保たれる。

Exact category の定義については Quillen[q] を参照して下さい。

定義２．３　M が <u>Exact G-category</u> とは、M は exact category $M=(M,E)$ であり (E は a family of short exact sequences) 、G は exact functors として作用し　(即ち、$g:M \rightarrow M$はadditiveで

$$(0 \rightarrow a \overset{i}{\rightarrowtail} b \overset{j}{\twoheadrightarrow} c \rightarrow 0) \in E \Rightarrow (0 \rightarrow ga \overset{gi}{\rightarrowtail} gb \overset{gj}{\twoheadrightarrow} gc \rightarrow 0) \in E、$$

i は admissible monomorphism, j は admissible epimorphism と

呼ばれ、 $\rightarrowtail$, $\twoheadrightarrow$ と表される。）次をみたす。

１）G-不変 zero object 0 をもつ。

２）同変 biproduct functor $\oplus: M \times M \to M$ が存在する。即ち

$\oplus$ は任意の $(a,b) \in M \times M$ の biproduct diagram :

$$(2.1) \quad a \underset{p_a}{\overset{i_a}{\rightleftarrows}} a \oplus b \underset{p_b}{\overset{i_b}{\leftrightarrows}} b$$

と $g \in G$ に対し、$g(a \oplus b) = ga \oplus gb$, $gi_c = i_{gc}$, $gp_c = p_{gc}$, $c = a, b$

をみたす。

３）任意の admissible subobjects, admissible quotients は

同変代表元を持つ。

４）M^H 内で kernelを持つ射 $f: a \to b$ に対し、$h: c \to a$ が存在して

$fh: c \to b$ が admissble epi. ならば、f もそうであり、

admissible mono. についても、この双対が成り立つ。

又 M が <u>Abelian G-category</u> とは、M は Abelian category

であり G は exact functors として作用し、１、２）及び

Ａ３）　任意の部分対象、商対象は同変代表元を持つ。

をみたすものとする。

例２．４　　例２．１の例は全て abelian G-category になり、その

全ての短完全列をEとすれば、M=(M,E)はexact G-category になる。

実際、GRM の $\oplus$ は２）をみたし、部分対象、商対象の同変代表元

としては像（の包含写像）、商加群（への射影）を取ればよい。

注意２．５　　Exact (abelian) G-category の基本的性質

１）　$a\oplus b$ は同変積であり同変和である。

即ち、　$f:c\to a, h:c\to b$ の積 $m(f,h)=i_a f+i_b h:c\to a\oplus b$ は同変である。実際 $m(gf,gh)=i_{ga}gf+i_{gb}gh=g(i_a f)+g(i_b h)$ $=g(i_a f+i_b h)=gm(f,h):gc\to ga\oplus gb$ より同変。和についても同様である。

２）　M の対象 a から b への射全体を M(a,b) とするとこれは $G_{(a,b)}$-加群である。

３）　E 内の短完全列の base, cobase change は同変である。

$(0\to a \overset{i}{\rightarrowtail} b \overset{j}{\twoheadrightarrow} c\to 0)\in E$, j の $f:d\to c$ による pull back(base change) を考える。 $s=jp_b-fp_d:b\oplus d\to c$, $w=\ker s:e\to b\oplus d$ $u=p_d w$, $v=p_b w$ とすると、

$$(2.2)\quad \begin{tikzcd} e \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & d \arrow[d, "f"] \\ b \arrow[r, "j"'] & c \end{tikzcd} \qquad (2.3)\quad \begin{tikzcd} e \arrow[r, "w"] & b\oplus d \arrow[r, "p_d"] \arrow[d, "p_b"'] & d \arrow[d, "f"] \\ & b \arrow[r, "j"'] & c \end{tikzcd}$$

(2.2) は pull back diagram である。今 $si_b=j:b\to b\oplus d\to c$ だから、 s,u は admissble, u を同変代表元に取れば、 $(j,f)\to(u,v)$ は同変である。　他も同様。

命題２．６

$H<G$, $M=(M,E)$ を exact G-category とすると、 $M^H=(M^H,E^H)$ は exact subcategory である。

証明

$0\in M^H$, $\oplus$ は制限により得られる。 $f,h:a\to b$ in $M^H, g\in H$ とすれば、 $g(f+h)=gf+gh=f+h$ より、 $f+h\in M^H$, 左右からの射の合成も同様。よって M^H は additive subcategory である。 E^H が[q],p91 の a,b,c) をみたすことは定義２．３と注意２．５（３）より得られる。

Q－構成

$M=(M,E)$ を exact G-category とする。M に通常の Q-構成[q] を行ったものを、QM とする。即ち、 $oQM=oM$ （oM は M の対象）。
QMの射 $[j,i]:a\to b$ は admissible mono. $i:c\rightarrowtail b$ と admissible epi. $j:c\twoheadrightarrow a$ の対 (j,i)の次の同値関係による同値類$[j,i]$である:
$(j,i)\sim(p,q)$ $\leftrightarrow$ $p:d\rightarrowtail a, q:d\twoheadrightarrow b$ で同型 $k:c\cong d$ が存在して

(2.4)
$$\begin{array}{ccccc} a & \overset{j}{\twoheadleftarrow} & c & \overset{i}{\rightarrowtail} & b \\ \| & & \downarrow k & & \| \\ a & \underset{p}{\twoheadleftarrow} & d & \underset{q}{\rightarrowtail} & b \end{array}$$

が可換になる。（このような同型は存在すれば一意的である。）
G-作用が exact であるからこの同値関係は作用によって保たれる。
従って、 $g[j,i]=[gj,gi]$ として QM にG-作用が入る。

ここで i を b の admissible subobject [i] の同変代表元とすれば、対応する j により (j,i) は $[j,i]$ の同変代表元になる。実際、 $g\in G_{[j,i]}$ とすれば $ga=a$, $gb=b$, $g\in G_{[i]}$ だから $gi=i$, $gc=c$, したがって (2.4)の同型 $k:c\cong gc$ は identity である($p=gj, q=gi=i, d=gc=c$)。よって $gj=j$, $gi=i$ で (j,i) は 同変代表元。

$H<G$ に対し、 $f:M^H\to M$ を inclusion functor とすると $(Qf)^H:Q(M^H)\to(QM)^H$ が誘導される。 今 $[j,i]\in(QM)^H$ $(H<G_{[j,i]})$

に対し (j,i) を同変代表元とすると、 $j,i \in M^H$。従って $(Qf)^H$ は同型である。 この標準的同型で両者を同一視して、次を得る。

命題2.7

$H < G$, M を exact G-category とすると $(QM)^H = Q(M^H)$,

さらに M が small ならば $(BQM)^H = BQ(M^H)$。

3. Multi-exact G-category と BQM の delooping

これ以降圏は全て小圏とする。 Multiple, multi-exact category の定義と性質は [s] を参照して頂きたいが、記号の紹介をかねて簡単に説明することにする。

C が A 上の n-fold category とは、C は共通の射集合 A を持つn個の圏 $C_1,,,C_n$, $C_k=(A;O_k)$, $O_k \subset A$, $k=1,,,n$ (即ち、$C=(A;O_1,,,O_n)$ は小集合の (n+1)-ad) で C_k の構造写像 (S_k=source, T_k=target, $\circ_k$=composition, identity=I_k=inclusion $:O_k \to A$) と C_i の構造写像が可換であるものである。($i \neq k$) 各 C_k は component と呼ばれる。 n-fold functor $F:C \to D$ とは、(n+1)-ad の写像で構造写像と可換なものである。

定義3.1 C が n-fold G-category とは、C は n-fold category で $g \in G$ が n-fold functor として作用しているものである。(A,O_k はG-集合で、構造写像はG-写像である。) n-fold functor F が n-fold G-functor とは作用と可換なものである。

例3.2 I を対象が {0,1} で identities 以外の射が $\lambda:0 \to 1$

のみからなる圏とする。圏 C に対し、全ての functor:$I^n \to C$ からなる集合上の n-fold category $C^{[n]}$ が [s],1.3 に定義されているが、C を G-圏とし、$C^{[n]}$ への G-作用を $(gf)(a)=gf(a)$（I への G-作用は trivial）で定義すると $C^{[n]}$ は n-fold G-category になる。　このとき、H<G に対し $(C^{[n]})^H=(C^H)^{[n]}$ である。

$k \in N=\{1,,,n\}$ と n-fold G-category C に対し、射集合が O_k で components が $(O_i;O_k \cap O_i)$, $i \in N-\{k\}$ である (n-1)-fold G-category を o_kC と書く。$(o_kC_i=(O_i;O_k \cap O_i))$ このとき、S_k, T_k, $\circ_k$ は(n-1)-fold G-functor である。

P を p個の元からなる $N=\{1,,,n\}$ の部分集合とする。

定義３．３　M が P-exact n-fold G-category とは M は P-exact n-fold category で $g \in G$ が P-exact n-fold functor として作用していて次をみたすものである:　$p,q \in P, p \neq q$, $i \in N, i \neq p$ とする。

１） M_p は exact G-category $M_p=(M_p,E_p)$ で o_iM_p は M_p の exact G-subcategory である。（P-exact n-fold category の定義により M_i の構造写像($S_i:M_p \to o_iM_p$,etc) は exact G-functor で若干条件が付いたものになる。）

２） E_q は $M_p \underset{o_qM_p}{\times} M_p$ の exact G-subcategory である。

（注意:　P-exact n-fold category の定義は（）内を含めて殆ど１、２）から G- を除いたものに等しい。）

例３．４　M を exact G-category とすると $M^{[n]}$ は N-exact n-fold G-category（略して n-fold exact G-category という）に

なり、$(M^{[n]})^H=(M^H)^{[n]}$ は n-fold exact subcategory になる。
(c.f. [s],2.4)

[s],2.6 により P-exact category M に対し、$(QM_D;o_iM_D)$（構造写像は QS_i, etc.）を j-th component とする $(P-\{p\})$-exact category QpM が定まるが命題２．７（の上）と同様にして次を得る。

命題３．５

P-exact n-fold G-category M に対し QpM は $(P-\{p\})$-exact n-fold G-category であって、$H<G$ に対し $(Q_DM)^H=Q_D(M^H)$ である。

n-fold exact G-category M に対し $Q^nM=Q_n\cdot\cdot\cdot Q_1M$ と置く。
M の nerve は n-fold simplicial G-set であり、その幾何学的実現を BM とかき、これは M の分類空間と呼ばれる。

[s],3.4 により $S^1\wedge BQ^nM^{[n]}\rightarrow BQ^{n+1}M^{[n+1]}$ の adjont としてホモトピー同値 $e:BQ^nM^{[n]}\rightarrow \Omega BQ^{n+1}M^{[n+1]}$ が得られ([s],3.2)、これらは容易に G-map であることが分かる。

定理

exact G-category M に対し、BQM と $\Omega^nBQ^{n+1}M^{[n+1]}$ は G-homotopy 同値である。（ｎ≧１）
従って BQM は同変無限loop空間。
（これは、定義２．３の条件４）を除いても成立する。）

証明　　いま $H<G$ に対し

$(BQ^n M^{[n]})^H = B((Q^n M^{[n]})^H) = BQ^n(M^{[n]})^H = BQ^n(M^H)^{[n]}$

で M^H は exact category であるから、e^H はホモトピー同値。よって同変Whitehead theoremにより定理を得る。（G が有限群の時は[a] による。離散群の場合にも拡張できる。）

参考文献

[a] S. Araki and M. Murayama: G-homotopy types of G-complexes and representation of G-cohomology theories Publ. RIMS Kyoto Univ.,14(1978) 23-222

[m] T. Matumoto: On G-CW complexes and a theorem of J.H.C. Whitehead, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I, 18 (1971)51-68

[n] 西田吾郎：同変代数的K-理論の定義，第４回代数セミナー報告集

[q] D. Quillen: Higher Algebraic K-theory I, LNM 341

[s] K. Shimakawa: Multiple categories and Algebraic K-theory, J. Pure Appl. Alg. 41 (1986) 285-304

[w] F. Waldhausen: Algebraic K-theory of generalized free products, Ann. Math. 108(1978) 135-256