数理解析研究所講究録
第 609 巻 1987 年 95-108

Dedekind 環上の Chevalley 群と K_2

筑波大学　阿部英一（Eiichi Abe）
筑波大学　森田純（Jun Morita）

本稿における我々の目的は、Dedekind domain 上の Chevalley 群の群構造を調べることである。まず、A を Dedekind domain、$p(\neq 0) \in A$ を素元とし、次の条件 (*) を考える。

(*) $A^{\times} \longrightarrow (A/(p))^{\times}$ なる自然な写像が上への写像である。ここに、$A^{\times}$, $(A/(p))^{\times}$ は、可逆元のなす乗法群を表わす。また、(p) は素イデアル，従って、Dedekind domain では極大イデアルとなり、$A/(p)$ は体であることに注意する。この様な条件の下で、環 $R = A[\frac{1}{p}]$ 上の Chevalley 群の構造を調べる。我々は、その Chevalley 群が Tits 系の構造を持つということを示し、さらに、その群論的応用を見出す。我々の結果は、岩堀－松本 [1] によって得られた、$\mathfrak{p}$-進体上の Chevalley 群の Tits 系に関する結果を、さらには、Laurent 多項式環上の Chevalley 群における Tits 系の結果 (cf. [2]) を

含んでいる。

Laurent 多項式環上の Chevalley 群は、アフィン型の Kac-Moody 群とみなせるが、我々は、Kac-Moody 群に関する論文 Peterson-Kac [3] に於て用いられた手法を基本道具として使う。必ずしも、体や局所環とは限らない場合について考察するので、色々な応用が得られる。例えば、Dedekind domain が universal か否か、quasi-universal か否か についての十分条件を得ることができるし（実は、これが K_2 の構造と結びつく）、また、ある種の岩沢分解についての結果も得られる。§1 で記号の説明と準備をし §2 で主定理を提示する。§3, §4 で、その応用を論じる。さらに詳しいことは、Abe-Morita [4] を参照されたし。

1. Chevalley 群と Steinberg 群. Φ を被約かつ既約なルート系とし、基本ルートを $\Pi = \{a_1, \cdots, a_\ell\}$ とする。Φ 型の複素単純リー環 $\mathfrak{g}$ と、$\mathfrak{g}$ の有限次元の忠実表現 ρ をとる。ρ と $\mathfrak{g}$ の Chevalley basis より、Chevalley-Demazure 群スキームと呼ばれるアフィン群スキーム $G_\rho(\Phi, \cdot)$ が $\mathbb{Z}$ 上で定義される。これは、Φ と ρ のウエイト格子 L_ρ だけで定まる群関手である。L_ρ が基本ウエイト格子（resp. ルート格子）に一致するとき、$G_\rho(\Phi, \cdot)$ を simply connected

(resp. adjoint type) と呼び. $G_{sc}(\Phi, \cdot)$ (resp. $G_{ad}(\Phi, \cdot)$) で表わす。

各ルート $a \in \Phi$ に対し. $\mathbb{G}_a$ から $G_\rho(\Phi, \cdot)$ への自然変換 x_a が存在する。すなわち. x_a は. 可換環 R $(\ni 1)$ の加法群 $\mathbb{G}_a(R) = R^+$ から $G_\rho(\Phi, R)$ への群準同型を引き起こす。それも x_a で表わし. x_a の image を $U_a = \{x_a(t) \mid t \in R\}$ とする。このとき. $E_\rho(\Phi, R) = \langle U_a \mid a \in \Phi \rangle$ を. $G_\rho(\Phi, R)$ の基本部分群という。$U^\pm(R) = \langle U_a \mid a \in \Phi^\pm \rangle$ とおく。もし R が. 体. 半局所環、ユークリッド整域のいずれかであれば. $G_{sc}(\Phi, R) = E_{sc}(\Phi, R)$ となる。一般に、$l > 1$ ならば. $E_\rho(\Phi, R) \lhd G_\rho(\Phi, R)$ である。各 Φ に対し. $K_1(\Phi, R) = G_{sc}(\Phi, R) / E_{sc}(\Phi, R)$ とおく。(以下、必要のない時は. ρ を省く。)

$E(\Phi, R)$ の元 $x_a(t)$ は次の関係式を満たす。

(A) $\quad x_a(s)\, x_a(t) = x_a(s+t)$,

(B) $\quad [x_a(s), x_b(t)] = \prod_{\substack{ia+jb \in \Phi \\ i,j > 0}} x_{ia+jb}(N_{abij} s^i t^j)$

($\forall a, b \in \Phi$, $a+b \neq 0$, $s, t \in R$, N_{abij} はリー環 $\mathfrak{g}$ により定まる整数)。各 $a \in \Phi$, $u \in R^\times$ に対し.

(W) $\quad w_a(u) = x_a(u)\, x_{-a}(-u^{-1})\, x_a(u)$

(H) $\quad h_a(u) = w_a(u)\, w_a(-1)$

で、$E(\Phi, R)$ の元 $w_a(u)$, $h_a(u)$ を定める。$N(R) = \langle w_a(u) \mid$

$a\in\Phi,\ u\in R^\times\rangle$, $H(R)=\langle h_a(u)\mid a\in\Phi,\ u\in R^\times\rangle$ とおく。このとき、$H(R)\triangleleft N(R)$ かつ $N(R)/H(R)\simeq W=W(\Phi)$, Φ の Weyl 群, を得る。$T(R)=\mathrm{Hom}(L_\rho, R^\times)$ とおくと、$H(R)\subset T(R)<G(\Phi,R)$ となり、また、$T(R)$ は $U^\pm(R)$ を正規化する。

さて、次の生成元と定義基本関係式で与えられる群を $St(\Phi,R)$ で表わし、Steinberg 群と呼ぶ。

生成元： $\hat{x}_a(t)$ 　 $a\in\Phi,\ t\in R$

基本関係式： (A), (B) で $x_a\to\hat{x}_a$ としたもの, 及び

(B$'$) $\hat{w}_a(u)\hat{x}_a(t)\hat{w}_a(-u)=\hat{x}_{-a}(-u^{-2}t)$,

ただし、$\hat{w}_a(u)$ は (W) と同様に定める。（後出の $\hat{h}_a(u)$ も (H) と同様に定める。） このとき、自然な写像 π が $\pi(\hat{x}_a(t))=x_a(t)$ により得られる： $St(\Phi,R)\xrightarrow{\pi}E_{sc}(\Phi,R)$ 。いま、$K_2(\Phi,R)=\mathrm{Ker}\,\pi$ とすれば、次の完全系列を得る。

$$1\longrightarrow K_2(\Phi,R)\longrightarrow St(\Phi,R)\longrightarrow G_{sc}(\Phi,R)\longrightarrow K_1(\Phi,R)\to 1$$

$E(\Phi,R)$ において、

(C) $h_a(u)h_a(v)=h_a(uv)$, $a\in\Phi,\ u,v\in R^\times$

が成り立つので、

$$c_a(u,v):=\hat{h}_a(uv)\hat{h}_a(u)^{-1}\hat{h}_a(v)^{-1}$$

は、$K_2(\Phi,R)$ の元である。c_a を Steinberg symbol for a と呼ぶ。$C(R)=\langle c_a(u,v)\mid u,v\in R^\times,\ a\in\Phi\rangle$ とおく。さらに、

$a\in\Phi$, $s,t\in R$, $1+st\in R^\times$ に対して.

(D) $x_a(s)\,x_{-a}(t)=x_{-a}(\frac{t}{1+st})\,h_a(1+st)\,x_a(\frac{s}{1+st})$

が成り立つ。よって.

$d_a(s,t)=\hat{x}_{-a}(-\frac{t}{1+st})\,\hat{x}_a(s)\,\hat{x}_{-a}(t)\,\hat{x}_a(-\frac{s}{1+st})\,\hat{h}_a(1+st)^{-1}$

は、$K_2(\Phi,R)$ のえである。d_a を Dennis-Stein symbol for a と呼ぶ。$D(R)$ を、すべての $d_a(s,t)$ で生成される $St(\Phi,R)$ の正規部分群とする。このとき、$C(R)<D(R)<K_2(\Phi,R)$ であり、また $E_{sc}(\Phi,R)\simeq St(\Phi,R)/K_2(\Phi,R)$ に注意する。

$E_u(\Phi,R)=St(\Phi,R)/C(R)$, $E_q(\Phi,R)=St(\Phi,R)/D(R)$ とおく。R が universal (resp. quasi-universal) for Φ であるとは、$E_u(\Phi,R)\simeq E_{sc}(\Phi,R)$ (resp. $E_q(\Phi,R)\simeq E_{sc}(\Phi,R)$) と定義する。これは、$A_n$ 型のときの J. Silvester の定義を一般の場合に拡張したものである。例えば、体 k, 体 k 上の一変数多項式環 $k[X]$, $\mathbb{Z}$ などは、$\forall\Phi$ に対して、universal である。

2. アフィン Weyl群に附随する Tits 系. $\Phi_a=\Phi\times\mathbb{Z}$ とおいて、Φ_a のえをアフィン・ルートと呼ぶ。σ_α $(\alpha=(a,n))$ によって、Φ_a 上の置換：$\beta=(b,m)\longmapsto(\sigma_a(b),\,m-\frac{2(b,a)}{(a,a)}n)$ を表わす。σ_α $(\alpha\in\Phi_a)$ で生成される Φ_a 上の置換群を、W_a で表わし、アフィン Weyl 群という。$\alpha=(a,n)$ に対し.

$\alpha+m=(a,n+m)$ と書くことにする。

$\alpha_i=(-a_i,0)$, $i=1,\cdots,\ell$, $\alpha_{\ell+1}=(a_0,1)$ とおく。ここに、a_0 は Φ の最高ルートである。さらに、$\Pi_a=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{\ell+1}\}$ とおくと、$\forall\alpha\in\Phi_a$ は、Π_a の元の $\mathbb{Z}$ 係数結合で $\alpha=\sum_{i=1}^{\ell}m_i\alpha_i$ ($m_i\in\mathbb{Z}$) と表わされる。しかも、m_i は、同時に $m_i\geq 0$ か ≤ 0 のいずれかになる。それに合わせて、Φ_a^+, Φ_a^- を定めておく。

W_a は、$S_a=\{\sigma_\alpha\mid\alpha\in\Pi_a\}$ で生成され、さらに (W_a,S_a) は、Coxeter 系となる。$\ell(w)$ を $w\in W_a$ の長さ、$N(w)$ を $\#|\{\alpha\in\Phi_a^+\mid w(\alpha)\in\Phi_a^-\}|$ と定める。このとき、次を得る。

<u>命題1</u>. $w\in W$, $s=\sigma_\alpha\in S_a$ ($\alpha\in\Pi_a$) とするとき、

(1) $\ell(w)=N(w)$.

(2) $\ell(ws)>\ell(w)\ \Rightarrow\ w(\alpha)\in\Phi_a^+$.

さて、ここで、A を Dedekind domain, P を nonzero prime ideal $\subseteq A$ とする。(A,P) が admissible pair であるとは、

(A1) $P=(p)$: 単項イデアル

(A2) $A^\times\longrightarrow(A/P)^\times$ が上への写像

が成り立つときにいう。その時、$R=A[\frac{1}{p}]$ とおく。$t(\neq 0)\in R$ に対し、$t=up^r$ (u は p と素), $u\in A$, $r\in\mathbb{Z}$ と一意なる分解が得られるから、$\nu(t)=r$ と定義しておく。また

$\nu(0)=\infty$ とする。このとき、写像 $\nu : R \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ は、

(V1) $\quad \nu(s+t) \geq \min\{\nu(s), \nu(t)\}$

(V2) $\quad \nu(st) = \nu(s) + \nu(t)$

をみたす。以下、(A, P) は admissible pair と仮定する。

ここで、$\alpha = (a, n) \in \Phi_a$ に対し、$E(\Phi, R)$ の元を、

$$x_\alpha(u) = x_a(up^n) \qquad \forall u \in A$$

$$w_\alpha(u) = x_\alpha(u)\, x_{-\alpha}(-u^{-1})\, x_\alpha(u) \qquad \forall u \in A^\times$$

$$h_\alpha(u) = w_\alpha(u)\, w_\alpha(-1) \qquad \forall u \in A^\times$$

で定め、$U_\alpha = \{x_\alpha(u) \mid u \in A\} \simeq A^+$ とおく。$N(R)$、$H(A)$ を、前節での様に定める。$U^+(A,P) = \langle U_\alpha \mid \alpha \in \Phi_a^+ \rangle$、$B(A,P) = \langle U^+(A,P), H(A) \rangle$ とおく。この時、次を得る。

__定理 2__. (1) $B(A,P) \cap N(R) = H(A)$, $N(R)/H(A) \simeq W_a$.

(2) $(E(\Phi,R), B(A,P), N(R), S_a)$ は Tits 系である。

(3) $E(\Phi,R) = \bigsqcup_{w \in W_a} B(A,P)\, w\, B(A,P)$: Bruhat 分解が成立。

__例__. いくつか例を考えてみる。

(1) F を $\mathfrak{p}$-進体、A をその整数環、P をその素イデアルとする。このとき、(A, P) は admissible pair となり、$R = A[\frac{1}{p}]$ $(P=(p))$ は F 自身となる。従って、上の結果は、岩堀-松本 [1] の Bruhat 分解と一致する。

(2) $A = F[X]$ を、体 F 上の一変数多項式環、$P=(X)$ としたとき、(A, P) は admissible pair となり、$R = A[\frac{1}{X}]$

$=F[X,X^{-1}]$ は Laurent 多項式環となる。従って、上の結果は、[2] におけるものと一致する。

(3) $A=\mathbb{Z}$, $P=(2)$ or (3) とする。このとき、(A,P) は、admissible pair となる。従って、$E(\Phi,\mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$, $E(\Phi,\mathbb{Z}[\frac{1}{3}])$ は、Tits 系の構造をもつ。一般に、S' を $\mathbb{Z}$ の乗法的集合とし、$\pm S' \bmod p$ が $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$ を生成しているとする。($p \notin S' \cup -S'$: 素数)。このとき、$S=S'\cup\{p\}$、$A=S^{-1}\mathbb{Z}$, $P=(p)$ とすれば、(A,P) は admissible pair となり、$R=A[\frac{1}{p}]=S^{-1}\mathbb{Z}$ は、今までの議論に乗るので、$E(\Phi,R)$ は Tits 系の構造をもつ。

3. 或る種の Dedekind 環上の Chevalley 群の群表示

(A,P) を admissible pair, $P=(p)$, $R=A[\frac{1}{p}]$ とする。$E(\Phi,R)$ においてと同様に、$E_u(\Phi,R)$ において、部分群 $B_u(A,P)$, $H_u(A)$, $N_u(R)$ を定める。$E_q(\Phi,R)$ においても、同じ様に、$B_q(A,P)$, $H_q(A)$, $N_q(R)$ を定義する。このとき、$H_u(A) \triangleleft N_u(R)$, $H_q(A) \triangleleft N_q(R)$ が言えて、さらに、$N_u(R)/H_u(A) \simeq N_q(R)/H_q(A) \simeq W_a$ が成り立つ。しかも、定理2と同様に、次が成立する。

定理3. $(E_u(\Phi,R), B_u(A,P), N_u(R), S_a)$ 及び $(E_q(\Phi,R), B_q(A,P), N_q(R), S_a)$ は Tits 系である。

定理2及び定理3の結果を用いて、universality 並びに quasi-universality に関する、次の遺伝定理を導くことができる。

定理4. A が universal for Φ ならば R もそうである。同様に、A が quasi-universal ならば R もそうである。

証明（短いので証明します。）A : universal とする。このとき、次の可換図形で、下の写像は同型である。

$$\begin{tikzcd} E_u(\Phi,R) \arrow[r, "\pi"] & E_{sc}(\Phi,R) \\ E_u(\Phi,A) \arrow[u] \arrow[r, "\sim"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & E_{sc}(\Phi,A) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

よって、とくに、$B_u(A,P) \simeq B(A,P)$ である。一方、

$$E_u(\Phi,R) = B_u(A,P)\,N_u(R)\,B_u(A,P)$$

$$E_{sc}(\Phi,R) = B(A,P)\,N(R)\,B(A,P)$$

が、Tits 系より言えるから、$\mathrm{Ker}\,\pi \subseteq B_u(A,P)$ を得る。従って、π は同型である。すなわち、R は universal である。quasi-universal についても全く同様である。□

系5. (1) $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$, $\mathbb{Z}[\frac{1}{3}]$ は universal for $^{\forall}\Phi$ である。

(2) $S=\{p_1,\cdots,p_m\}$ を素数の有限集合とし、各 i $(1\le i\le m)$ に対し、$\{\pm1, p_1,\cdots,p_{i-1}\}$ **mod** p_i が $(\mathbb{Z}/(p_i))^{\times}$ を生成するとする。このとき、$S^{-1}\mathbb{Z}$ は universal for $^{\forall}\Phi$ である。

注意. (1) 我々の method は、rank 1 のときも含めて、すべての type Φ について有効である。

(2) 系5(2) の例としては、たとえば、$S=\{2,5,97\}$ なども、条件をみたす。すなわち、$\mathbb{Z}[\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{1}{97}]$ はすべての Φ に対し、universal である。

(3) 系5(2) の条件は、必ずしも必要ではない。実際、$S=\{5,7\}$ とすると、$\mathbb{Z}[\frac{1}{5},\frac{1}{7}]$ は universal for A_n $(n\geq 2)$ が知られている。しかし、S は、系5(2) の条件は満たしてはいない。

例. 次の様な特殊なものも、我々の考察の対象になっている。$\mathbb{F}_3$ を3元体、$A=\mathbb{F}_3[X,X^{-1}]$ を $\mathbb{F}_3$ 上の Laurent 多項式環、$P=(X^2+X-1)$ とする。このとき、(A,P) は、admissible pair となり、また A は universal for ${}^{\forall}\Phi$ である。従って、定理4により、$\mathbb{F}_3[X,\frac{1}{X},\frac{1}{X^2+X-1}]$ も universal for ${}^{\forall}\Phi$ となる。

4. 岩沢分解.

ここでは、Dedekind domain 上の Chevalley 群 において、或る種の岩沢分解についての結果を述べる。さて、A,P,R は、今までの通りとする。このとき、定理2の直接の応用として次を得る。

$$E(\Phi, A) = B(A,P)\,N(A)\,B(A,P),$$

$$\begin{aligned} E(\Phi, R) &= B(A,P)\,N(R)\,B(A,P) \\ &= B(A,P)\,H(R)\,N(A)\,B(A,P) \\ &= B(A,P)\,H(R)\,E(\Phi,A) \\ &= E(\Phi,A)\,H(R)\,E(\Phi,A) \end{aligned}$$

<u>注意</u>. 通常、AをP.I.D.，Kをその商体としたとき、

$G(\Phi,K) = U^{\pm}(K)\,T(K)\,G(\Phi,A)$　を、岩沢分解という。

(cf. [5]，$\mathbb{C}$の場合の．いわゆる岩沢分解の類似物である。)

さらに、$A \subset A' \subset K$ (A': 部分環) としたとき、

$$G(\Phi,A') = U^{\pm}(A')\,T(A')\,G(\Phi,A)$$

$$E(\Phi,A') = U^{\pm}(A')\,H(A')\,(E(\Phi,A') \cap G(\Phi,A))$$

が従う。

さて、我々の場合に話を戻そう。(A_1, P_1), (A_2, P_2)を admissible pairs とする（つまり．必ずしもP.I.D.とは限らない場合にも、何がしかの分解を与えようという目論みである）。次の条件が満たされるとき、(A_2, P_2)は(A_1, P_1)の admissible extension であると言う。

(A3)　$A_1 \subset A_2$,　$P_1 \subset P_2$.

(A4)　$A_1^{\times} \longrightarrow (A_2/P_2)^{\times}$ が上への写像である。

例えば、$(\mathbb{Z}[\sqrt{-1}], (1+\sqrt{-1}))$ は $(\mathbb{Z}, (2))$ の admissible extension であり．また、(A, P) が admissible pair ならば (A_P, PA_P)

は、(A,P) の admissible extension である。

<u>定理6</u>. (A_2,P_2) を (A_1,P_1) の admissible extension とする。

(1) $E(\Phi,A_2)=B(A_2,P_2)E(\Phi,A_1)$ が成立。

(2) $p_1=p_2$ $(P_1=(p_1),\ P_2=(p_2))$, $R_i=A_i[\frac{1}{p_i}]$ なるとき、

$$\begin{aligned}E(\Phi,R_2)&=B(A_2,P_2)E(\Phi,R_1)\\&=B(A_2,P_2)H(R_1)E(\Phi,A_1)\end{aligned}$$

が成立。

<u>例</u> $E(\Phi,\mathbb{Z}[\sqrt{-1}])=B(\mathbb{Z}[\sqrt{-1}],(1+\sqrt{-1}))E(\Phi,\mathbb{Z})$ が成り立つ。

また、(A,P) を admissible pair としたとき、

$$E(\Phi,A_P)=B(A_P,PA_P)E(\Phi,A)$$

が成り立つ。

<u>系7</u>. (A,P) を admissible pair とし、K を A の商体、$P=(p)$ とする。このとき、

$$\begin{aligned}G(\Phi,K)&=T(K)U^-(K)U^+(PA_P)E(\Phi,A)\\&=T(K)U^-(A_P)U^+(PA_P)E(\Phi,A[\tfrac{1}{p}])\end{aligned}$$

が成立。

<u>補足</u>. 定義より明白なのであるが、可換環 $R(\ni 1)$ に対し、

(1) R : universal for $\Phi \Leftrightarrow K_2(\Phi,R)=C(R)$,

(2) R : quasi-universal for $\Phi \Leftrightarrow K_2(\Phi,R)=D(R)$

であることに注意して、おわりとする。

文献表.

[1] N. Iwahori - H. Matsumoto : On some Bruhat decompositions and the structure of the Hecke rings of $\mathfrak{p}$-adic Chevalley groups, Publ. Math. IHES 25 (1965), 5–48.

[2] J. Morita : Tits' systems in Chevalley groups over Laurent polynomial rings, Tsukuba J. Math. 3 (1979), 41–51.

[3] D.H. Peterson - V.G. Kac : Infinite flag varieties and conjugacy theorems, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 80 (1983), 1778–1782.

[4] E. Abe - J. Morita : Some Tits systems with affine Weyl groups in Chevalley groups over Dedekind domains, preprint (1986).

[5] R. Steinberg : Lectures on Chevalley groups, Yale Univ. Lecture notes, 1968.

可換環上の Chevalley 群に関しては:

[A] E. Abe : Chevalley groups over local rings, Tohoku Math. J. 21 (1969), 474–494.

[B] A. Borel : Properties and linear representations of Chevalley groups, Seminar on algebraic groups and related

finite groups, Springer LN 131 (1970), 1-55.
[S] M.R. Stein: Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings, Amer. J. Math. 93 (1971), 965-1004.

などを参照して下さい。

〒305
茨城県新治郡桜村 筑波大学数学系
阿部英一
森田純