数理解析研究所講究録
第609巻 1987年 109-122

Baum－Connes 予想の周辺

都立大理　高井博司

§1. 序　古くから数学の異分野間の交流はそれぞれの分野に多大の恩恵をもたらしてきた。幾何学と解析学を結ぶ Atiyah－Singer 指数定理は最近 Connes によって更に新理論へと発展した。この理論の骨格をなすのが C^*－環の K－理論である。この理論が強力な武器になる実例は Connes, Kasparov, Mischenko, Pimsner－Voiculescu, Rosenberg 達が与えている。特に，微分（位相）力学系と葉層構造について Baum と Connes が予想した謂ゆる "Baum－Connes 予想" は，位相幾何学及び微分幾何学と C^*－環論を結ぶ境界線上に位置して大変重要な意味を持っている。彼らの予想とは，葉層化多様体又は微分（位相）力学系を与えたとき，その解析的 K－群と幾何的 K－群が K－指数写像で同型になるという主張である。この予想が肯定的であれば，その系として一般 Novikov 予想，Gromov－Lawson－Rosenberg 予想，及び一般 Kadison 予想等の位相幾

何，微分幾何，及び C^*-環でなされた予想も肯定的に解決される。現在まで得られている諸結果は全て Baum-Connes 予想の正当性を裏付けている。だが統一的見地からの結果は何一つ得られていない。

本報告は，こうした事情を把握しつつ，上記予想についての問題構成，諸結果，展望等について書くことが目的である。

§2. 問題構成　　任意の葉層化多様体 $(M,\mathcal{F})$ に対して，そのホロノミー亜群を $\mathcal{G}$ とし，その上の半密度バンドル $\Omega^{1/2}$ のコンパクト台をもつ連続断面全体を $C_c(\mathcal{G},\Omega^{1/2})$ とする。この集合に次の様な $*$-環の演算を入れる：

$$(f g)(\gamma) = \int_{\gamma_1\gamma_2=\gamma} f(\gamma_1)\, g(\gamma_2) , \qquad f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})}$$

更に次のノルムを入れる：

$$\|f\| = \sup_{x\in M} \| L_x(f) \|$$

ただし，L_x は $C_c(\mathcal{G},\Omega^{1/2})$ から $\mathcal{G}_x$ 上の $\Omega^{1/2}$ の L^2-断面全体 $L^2(\mathcal{G}_x,\Omega^{1/2})$ のなす Hilbert 空間上への表現であり

$$(L_x(f)\xi)(\gamma) = \int_{\gamma_1\gamma_2=\gamma} f(\gamma_1)\, \xi(\gamma_2) \qquad (x\in M)$$

で与えられる。今 $C_c(\mathcal{G},\Omega^{1/2})$ の上記ノルムによる完備化を $C^*_r(M,\mathcal{F})$ と書き $(M,\mathcal{F})$ の C^*-環という。

さて $C^*_r(M,\mathcal{F})$ の K-群 $K(C^*_r(M,\mathcal{F}))$ を $K_a(M,\mathcal{F})$ で表わして $(M,\mathcal{F})$ の解析的 K-群ということにする。一方，$(M,\mathcal{F})$ の純

幾何的構成によるK-群の定義は次の様にしてなされる。

Xを固有G-多様体，$\mathcal{V}^*$をX上のG-軌道によって定まる葉層の法バンドル$\mathcal{V}$の双対バンドル，ν^*を$\mathcal{F}$の法バンドルνの双対バンドル，$\rho^*(\nu^*)$をXからMへの自然なG-写像ρによるν^*の引き戻しとする。$\mathcal{V}^*\oplus\rho^*(\nu^*)$上のG-ベクトルバンドル$\xi$を考え，組$(X,\xi)$を$(M,\mathcal{F})$のK-コサイクルということにする。すべての$(M,\mathcal{F})$のK-コサイクルの族$\Gamma(M,\mathcal{F})$に次の意味での同値関係を導入する。$(X_1,\xi_1),(X_2,\xi_2)\in\Gamma(M,\mathcal{F})$に対して，

$$(X_1,\xi_1)\sim(X_2,\xi_2) \Leftrightarrow \begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\rho_1"'] & X \arrow[d, "\rho"] & X_2 \arrow[l, "\varphi_2"'] \arrow[dl, "\rho_2"] \\ & M & \end{tikzcd}$$ なる可換

図形をもつ固有G-多様体X，G-写像ρ,φ_1,φ_2が存在して，$\varphi_1!(\xi_1)=\varphi_2!(\xi_2)$がなりたつ。ただし，$\varphi_1!,\varphi_2!$はそれぞれ$\mathcal{V}_1^*\oplus\rho_1^*(\nu^*)$, $\mathcal{V}_2^*\oplus\rho_2^*(\nu^*)$上のG-ベクトルバンドルから$\mathcal{V}^*\oplus\rho^*(\nu^*)$上のG-ベクトルバンドルへのGysin写像を意味する。そのとき，$\Gamma(M,\mathcal{F})/\sim$はG-ベクトルバンドルの直和に関して可換群になる。これを$(M,\mathcal{F})$の幾何的K-群といい，$K_g(M,\mathcal{F})$と書くことにする。

さて次にK-指数写像と呼ばれる$K_g(M,\mathcal{F})$から$K_a(M,\mathcal{F})$への準同型写像を説明する。$(M,\mathcal{F})$のK-コサイクル(X,ξ)について，前述の自然なG-写像$\rho: X\to M$がはめ込み写像ならば，Tを$\rho^{-1}(m)$ $(m\in M)$の余接ベクトルバンドルとすると，

$\tilde{\nu}^* \oplus \rho^*(\nu^*)$ は T 上のベクトルバンドルで，そのファイバーは $\nu^* \oplus \nu^*$ となる．従って G-ベクトルバンドルの Thom 同型定理より，ξ は T 上の G-ベクトルバンドルと思ってよい． $\xi_m = \xi|_{T_m}$ とすると，ξ の定義より，ξ_m は $\rho^{-1}(m)$ 上の楕円型微分作用素 D_m の表象を与える． D を G-同変微分作用素場 $m \mapsto D_m$ とすると，ξ は D の表象と思える。この場合作用素 D の K-理論的指数 index(D) = [Ker D] − [coker D] は G-不変性より $K_a(M, \mathcal{F})$ の元を定める．もし ρ がしずめ込みでなければ次の可換図形を考える：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\rho"'] & M \times X \arrow[d, "\pi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

ただし，$j(x) = (\rho(x), x)$ ，$\pi(m, x) = m$ $(x \in X,\ m \in M)$ である。前述の議論と同様にして G-ベクトルバンドルの Thom 同型定理より ξ は $M \times X$ 上の G-葉層の法バンドル $\tilde{\nu}_{M\times X}$ の双対バンドル $\tilde{\nu}^*_{M\times X}$ と ν^* の π による引き戻し $\pi^*(\nu^*)$ との直和 $\tilde{\nu}^*_{M\times X} \oplus \pi^*(\nu^*)$ 上の G-ベクトルバンドルと同一視出来る． π はしずめ込みであるから，前段階と同様にして ξ の K-理論的指数写像が $K_a(M, \mathcal{F})$ の元として定まる．これを $\mu(X, \xi)$ と書くと，μ は (X, ξ) の同値類の元の取り方に依らない。従って，μ は $K_g(M, \mathcal{F})$ から $K_a(M, \mathcal{F})$ への準同型写像を定める．これが K-指数写像である．

<u>Baum-Connes 予想 I</u>　K-指数写像 μ は常に $K_g(M, \mathcal{F})$ から $K_a(M, \mathcal{F})$ への同型写像である．

一方 微分力学系 (M, G, φ) を与えたとき，φ が自由作用であれば，G-軌道全体 $\mathcal{F}$ は M の葉層をつくる．その C^*-環 $C^*_r(M,\mathcal{F})$ は C^*-接合積 $C_0(M)\times_\varphi G$ と同型になり，$K_a(M,\mathcal{F}) = K(C_0(M)\times_\varphi G)$ となる．又 $K_g(M,\mathcal{F})$ は定義より次に定義する可換群 $K_g(M,G)$ と同型になる：固有 G-多様体 X から M への G-写像 π に対して，$T^*(X)\oplus\pi^*(T^*(M))$ 上の G-ベクトルバンドル ξ を考えたとき，組 (X,ξ,π) の全体 $\Gamma(M,G)$ に $\Gamma(M,\mathcal{F})$ の場合と同様にして同値関係を入れる．即ち，$(X_1,\xi_1,\pi_1)\sim(X_2,\xi_2,\pi_2) \Longleftrightarrow$

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & X \arrow[d, "\pi"] & X_2 \arrow[l, "\rho_2"'] \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

を定める X, π, ρ_1, ρ_2 が存在して $\rho_1!(\xi_1) = \rho_2!(\xi_2)$ がなりたつ．ただし $\rho_j!$ は $T^*(X_j)\oplus\pi_j^*(T^*(M))$ 上の G-ベクトルバンドルから $T^*(X)\oplus\pi^*(T^*(M))$ 上の G-ベクトルバンドルへの Gysin 写像である．$K_g(M,G) = \Gamma(M,G)/\sim$ とおくと自然な和で可換群になる．そこで Baum-Connes 予想 I を考慮すると，微分(位相)力学系に対する次の予想が考えられる．$K_a(M,G) = K(C_0(M)\times_\varphi G)$ とおくと，

<u>Baum-Connes 予想 II</u>　任意の微分(位相)力学系 (M, G, φ) に対して，$K_g(M,G)$ から $K_a(M,G)$ への K-指数写像 μ は常に同型写像である．

予想 I, II が肯定的であれば，位相幾何，微分幾何 及び C^*-環

における重要な未解決予想を肯定的に解くことができる。それらを順次説明していくことにする。

Mを向き付けられた閉多様体とし，$P_j \in H^{4j}(M, Q)$をそのj次有理 Pontrjagin 類とする。即ち，i_Qを$H^*(M, \mathbf{Z})$から$H^*(M, Q)$への埋め込みとしたとき，$P_j = (-1)^j i_Q(C_{2j}(T_C(M)))$である。そこで，全 Hirzebruch L－類 $L(M)$を考える。即ち，

$$L(M) = 1 + \frac{P_1}{3} + \frac{1}{45}(7P_2 - P_1^2) + \cdots\cdots$$

である．πをMの基本群とすると$H^*(\pi, Q)$はπの分類空間$B\pi$のQ－係数コホモロジー$H^*(B\pi, Q)$に同型である．fをMから$B\pi$への分類写像とすると，$x \in H^*(\pi, Q)$に対して

$$\sigma_x(M) = \langle L(M) \vee f^*(x), [M] \rangle$$

を考え(一般)高次符号数ということにする．ただしf^*はfの$H^*(\cdot, Q)$への持ち上げであり，$[M]$はMの基本類である．そのとき，一般 Novikov 予想とは次の形で述べられる：

（一般 Novikov 予想）　Mを向き付けられた閉多様体としたとき，(一般)高次符号数 $\sigma_x(M)$はMの homotopy 不変である。

次に，Mを向き付けられたスピン閉多様体とし，高次$\hat{A}$－種数 $\rho_x(M)$を考える．即ち，

$$S_x(M) = \langle \hat{A}[M] \vee f^*(x), [M] \rangle \quad , x \in H^*(\pi, Q)$$

である。ただし，$\hat{A}(M)$ は M の全 $\hat{A}$-類であり，

$$\hat{A}(M) = 1 - \frac{P_1}{24} - \frac{1}{32\cdot 45}\left(P_2 - \frac{7}{4}P_1^2\right) - \cdots\cdots$$

で定義する。そのとき，Gromov-Lawson-Rosenberg 予想とは次の形で述べられる：

（Gromov-Lawson-Rosenberg 予想）　M を向き付けられたスピン閉多様体とする。もし M が正のスカラー曲率を持つならば，高次 $\hat{A}$-種数 $S_x(M)$ （$x \in H^*(\pi, Q)$）は 0 である。

ちなみに K3-曲面 K^4 については $S_1(K^4) = 2$ であるので正のスカラー曲率を持たない。（もし M が正のスカラー曲率を持てば，$S_1(M) = 0$ である。）

話を C^*-環に移すと，力学系 (M, G, φ) について，M を一点とすると，$C_0(M) \times_\varphi G$ は C^*-群環 $C_r^*(G)$ となるが，一般 Kadison 予想とは次の形で述べられる：

（一般 Kadison 予想）　ねじれ元を持たない離散群 G の正則群環 $C_r^*(G)$ は $0, 1$ 以外に射影元を持たない。

現在までのところ，$G = F_n$ $(n \geq 2)$，即ち n 個の元から作った自

由群についてのみ検証されている。

実際，これらの予想は Baum－Connes 予想 II について，M を一点としたとき肯定的ならば解決する。

§3. 諸結果　　現在まで得られている全ての結果は予想 I，II を肯定するものであり，反例を作ろうとする動きはない。又統一的見地からの結果は何一つ得られていない状況である。

最初にこの予想が作られる端緒になった例は Connes によって得られた次の結果である：

定理 1（Connes）　　C^*-力学系（$\mathfrak{A}, G, \alpha$）に対して，G が単連結可解 Lie 群ならば，$K_j(\mathfrak{A} \times_\alpha G)$ は $K_{j+\dim G}(\mathfrak{A})$（$j=0,1$）に同型である。

何故ならば，微分力学系（$M, G, \mathcal{F}$）について，G が単連結可解 Lie 群ならば，$K_g(M, G) = K(B\tau/S\tau)$ である．ただし，τ は BG 上のベクトルバンドルで，ファイバーは $T^*(M)$ となるもので，$B\tau$，$S\tau$ はそれぞれ τ の球及び球面バンドルである．G は実数群 $\mathbb{R}$ の重複半直積群であるから BG は $\mathbb{R}^{\dim G}$（実際は一点）にホモトピー同値である．よって Bott の周期性より，$K_g(M, G) = K^{\dim G}(M)$ がなりたつ．一方，$K_a(M, G) = K(C_0(M) \times_\varphi G)$ より，

定理1を適用すると，予想IIはGが単連結可解Lie群ならば，肯定的であることが分かる．

群Gがコンパクトであれば，予想IIは本質的にはAtiyah-Singer指数定理である：

<u>定理2（Atiyah-Singer）</u>　微分力学系$(M, G, \mathcal{G})$について，Gがコンパクトならば予想IIがなりたつ．

定理1及び2より，Gが非コンパクト半単純Lie群であるとき当面の問題となる．KをGの極大コンパクト部分群とし，G/KがG-不変スピン^{c}構造をもつと仮定する．そのとき定義より，$K_g(M, G) = K_g^{\dim G/K}(M, K)$がなりたつ．よって定理2より，$K_a(M, G) = K_a^{\dim G/K}(M, K)$を示せば予想IIがなりたつ．次の結果は実階数1の半単純Lie群作用への可能性を示唆するものである：

<u>定理3（Kasparov）</u>　Gを連結Lie群とし，Kをその極大コンパクト部分群とする．G/KがG-不変スピン^{c}構造をもつと仮定して，$G/H \sim_{loc} SO_0(n,1) \times C$なる従順正規部分群$H$とコンパクト群$C$が存在するならば，$K_a(M, G) = K_a^{\dim G/K}(M, K)$がなりたつ．

特に M が一点のときにはもっと広いクラスの群に対して予想Ⅱの正当性が裏付けられている：

<u>定理 4（Penington－Wasserman）</u>　G を簡約可能な Lie 群とし，K をその極大コンパクト部分群とし，G/K は G－不変スピン^c－構造をもつと仮定する。そのとき，$K_a(pt, G) = K_a^{\dim G/K}(pt, K)$ がなりたつ。

上記結果は Lie 環のルート系を駆使して構造解析を行なうもので群作用に一般化すると技術的に困難な点を多々引き起こすので方法論的修正が必要である。

G が離散群のとき（この場合が最大の焦点である），現在まで得られている結果は次の二つである：

<u>定理 5（Kasparov）</u>　G をねじれ元をもたない離散群とし，連結 Lie 群に埋め込み可能ならば，$K_a(pt, G) = K_g(pt, G)$ がなりたつ。

<u>定理 6（Natsume）</u>　$K_a(pt, SL(2,\mathbb{Z})) = K_g(pt, SL(2,\mathbb{Z}))$

上記定理6は，ねじれ元を持つ群についての予想Ⅱの正当性

を示すものであるが，$SL(2,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6$ である事実を使って証明するので，$SL(n,\mathbb{Z})$ $(n\geq 3)$ には適用できない。定理5についての例としては，コンパクトリーマン面 M_g $(g\geq 2)$ の基本群 $\pi_1(M_g)$ や n 個の生成元をもつ自由群 F_n $(n\geq 1)$ 等がある。有限生成離散群全てについて予想IIを示すことは位相幾何，代数位相の核心部分をつくものと思われるので今後の展開に期待したい。

予想Iについては，現在までのところ統一的見地から得られた結果は何一つない状態である。しかし，得られた例は反例を与えるものはなく全て予想Iの正当性を示すものばかりである。

<u>定理7 (Connes)</u>　葉層化多様体 $(M,\mathcal{F})$ について，$\mathcal{F}$ が単連結可解 Lie 群作用の軌道から成るものならば，予想Iがなりたつ。

古典的例である Reeb 葉層については次の結果がある：

<u>定理8 (Torpe)</u>　二次元トーラス上の Reeb コンポネントについて予想IIがなりたつ。又三次元球面上の Reeb 葉層に対しても予想IIは正しい。

負曲率をもつ多様体上での例としては次の結果がある：

<u>定理 9 (Takai)</u>　　旁等負空間上の Anosov 葉層について予想Ｉがなりたつ。

多様体が Anosov 葉層をもてば，その階数は必ず 1 であるが，次の結果は任意の階数の多様体についても予想Ｉが肯定的であることを示唆する例を与えている：

<u>定理 10 (Takai)</u>　　任意の自然数 n に対して，予想Ｉがなりたつ階数 n の多様体とその上の葉層が存在する。

以上の葉層はホロノミーをもつ場合を含んでいるが，ホロノミーのない葉層については次の結果がある：

<u>定理 11 (Natsume)</u>　　n 次元多様体上のホロノミーをもたない余次元 1 の葉層について予想Ｉがなりたつ。

<u>定理 12 (Takai)</u>　　n 次元コンパクト多様体上の位相推移的 Anosov 微分同相から作られる葉層に対して予想Ｉがなりたつ。

Anosov flow に対する葉層については目下進行中である。又任意多様体の Anosov 作用から入る葉層についても計算可能と思われる。

§4. 今後の課題　　予想 I, II の解決を目指す為にも次の問題の解決は重要な意味をもっている。

問題 1　　任意多様体上の葉層に対して、もし全ての葉が（K-方向性を保って）一点可縮ならば、予想 I はなりたつか？

定理 7, 12 は問題 1 をサポートする例を与えている。定理 6 は次の問題へのヒントを与えている。ただし $SL(n,\mathbb{Z})$ $(n\geq 3)$ はアマルガム積ではないので方法論的に大改革を行なう必要があると思われる。

問題 2.　　微分力学系（M, $SL(n,\mathbb{Z})$, φ）$(n\geq 3)$ について、予想 II がなりたつか？

文献

(1) P.Baum and A.Connes, Geometric K-theory for Lie groups and foliations, Preprint (1982).

(2) A.Connes, A survey of foliations and operator algebras, Proc.Symp.Pure Math., 38 (1982) I , 521-628.

(3) M.Gromov and H.B.Lawson, Spin and scalar curvature in the presence of a fundamental group, Ann.Math.,111(1980),209-230

(4) G.G.Kasparov, Group C*-algebras and higher signatures, Preprint (1981).

(5) G.G.Kasparov, The index of invariant elliptic operators, K-theory,and Lie group representations, Preprint (1982).

(6) T.Natsume, On $K_*(C^*(SL_2(Z)))$, J.Operator Theory, 13(1985), 103-118.

(7) T.Natsume, The C*-algebras of codimension one foliations without holonomy, Math.Scand., 56(1985),96-104.

(8) M.Penninton, Oxford thesis, (1982).

(9) J.Rosenberg, C*-algebras,positive scalar curvature,and the Novikov conjecture, Publ.Math IHES.,58(1983),197-212.

(10) H.Takai, KK-theory of C*-algebras for Anosov foliations, Research Notes in Math., 123 (1985), Pitman.

(11) H.Takai, C*-algebras of Anosov foliations, Springer Lecture Notes in Math., 1132 (1985), 509-516.

(12) H.Takai, C*-algebras of Anosov foliations II,in prep.

(13) A.M.Torpe, K-thepry for the leaf space of foliations by Reeb componenents, J.Func.Anal., 61(1985),15-71.