数理解析研究所講究録
第 609 巻 1987 年 147-153

二次元射影空間の、完全四角形で分岐するKummer被覆のcohomology群(II)。

織田孝幸　（新潟大学理学部）　　（Takayuki Oda, Niigata Univ.）

§０。　始めに。

野田の東京理科大学で、７月あった代数分科会で話した事に続けて書く。幾つか定義、記号が必要になるので、代数分科会の記録の一部（§１、２の一部）をまず再掲する。あとは§４からはじめる。

§１（再掲）。　Kummer被覆。

(X:Y:Z)を２次元射影空間P^2の同次座標とする。方程式：

$$XYZ(Y-Z)(Z-X)(X-Y)=0$$

で定義される直線たちの配置を考えよう。そのときP^2の中でこの６本の直線X=0,Y=0,Z=0,Y=Z,Z=X,X=Yの補集合をＵと書く。あとで引用するために、この６本の直線に名前を付けよう。

$$l_1 : X=0,\quad l_2 : Y=0,\quad l_3 : Z=0$$
$$l_4 : Y-Z=0,\quad l_5 : Z-X=0,\quad l_6 : X-Y=0。$$

各l_iは直線を示すだけでなく、それを定義する線形型式も表すとする。例えば$l_1=X$ 等。以下、上の６本の直線上で分岐するP^2のアーベル被覆を問題にする。

自然数ｎを一つ固定する。ζを１の原始ｎ乗根とする。
２次元複素射影空間P^2の関数体は$\lambda=X/Z$，$\mu=Y/Z$とするとの複素数体$\mathbb{C}$上の２変数有理関数体$\mathbb{C}(\lambda,\mu)$になる。線形型式l_iたちの商l_i/l_jは関数体$\mathbb{C}(\lambda,\mu)$の元になる。$\mathbb{C}(\lambda,\mu)$のKummer拡大体Ｋ：

$$K=\mathbb{C}(\lambda,\mu,\sqrt[n]{\lambda},\sqrt[n]{\mu},\sqrt[n]{\lambda-1},\sqrt[n]{\mu-1},\sqrt[n]{\lambda-\mu})$$
$$=\mathbb{C}(\lambda,\mu,(l_i/l_j)^{1/n}\quad(1\leqq i,j\leqq n))$$

を考える。これは体$\mathbb{C}(\lambda,\mu)$のn^5次のアーベル拡大でそのGalois群Ａは巡回群$\mathbb{Z}/(n)$の５個の直和に同型である。ζを１の原始ｎ乗根とする。これをひとつ固定する。１のｎ乗根の全体のなす群をμ_nと記す。群μ_nからμ_nたち６個の直和

$\mu_n^{\oplus 6}$への対角写像を考える。このとき剰余群$\mu_n^{\oplus 6}/\mu_n$によって、Galois群A＝Gal(K/$\mathbb{C}$（λ,μ）)の表示を次のように与える：

$\sigma \in A$ に対して元 $(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_6) \bmod \mu_n$ を

$$\sigma((l_i/l_j)^{1/n})=\zeta_i/\zeta_j(l_i/l_j)^{1/n} \quad (\zeta_i\in\mu_n \ (1\leqq i\leqq 6))$$

によって定める。

A^*をAの指標群とする。これを次のようにして表示する。

$$A^*=\{(a_1,a_2,\ldots,a_6)\in\mathbb{Z}^6 \mid 0\leqq a_i<n, \sum_{i=1}^{6} a_i\equiv 0 \mod n\}$$

A^*と右辺の集合の同一視は次のようにして行う：

A^*の元$(a_1,a_2,\ldots,a_6)$が与えられているとき、これに対応する$\alpha:A\to C^*$は$\sigma=(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_6) \bmod \mu_n \in A$ に対して

$$\alpha(\sigma)=\prod_{i=1}^{6}\zeta_i^{a_i} \in\mu_n\subset\mathbb{C}^*$$

２次元複素射影空間P^2は$\mathbb{C}$（λ,μ）の一つのmodelを定める。これのKの中での正規化をX_n'と記す。X_n'のminimal-resolutionをX_nと書く。X_nは非特異極小モデルである。AはX_n'に双正則に作用する、従ってX_nの普遍性からX_nの双正則写像としても作用する。X_nのcohomology群を考える。

$H^i(X_n,\mathbb{C})$をX_nのｉ次元複素係数cohomology空間とする。Aの各指標αに対して$H^i(X_n,\mathbb{C})$の部分空間$H^i(\alpha)$を

$$H^i(\alpha)=\{\omega\in H^i(X_n,C) \mid \sigma^*(\omega)=\alpha(\sigma)(\omega),\quad \sigma\in A\}$$

で定義する。X_nは円分体$Q(\zeta)$上の自然なmodelを持ち、群Aの作用も$Q(\zeta)$上定義されている。X_nのｌ－進cohomology群$H^i(X_n,Q_\ell)$についても同様に、部分空間$H^i_\ell(\alpha)$を定義する。明らかに

$$H^i(X_n,\mathbb{C})=\bigoplus_{\alpha\in A^*}H^i(\alpha),\qquad H^i(X_n,Q_\ell)=\bigoplus_{\alpha\in A^*}H^i_\ell(\alpha)$$

という分解がある。

(1.1)　<u>定義</u>。A^*の元$\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_6)$を考える。

(i)　αがL-genericであるとは各ｉ$(1\leqq i\leqq 6)$に対して$a_i\not\equiv 0 \bmod n$ が成り立つときをいう。

(ii)　αがP-genericであるとは、４個の各３重点p_j($1 \leqq j \leqq 4$)それぞれに対して、それに交わる３本の直線をl_u, l_v, l_wとするときa_u, a_v, a_wに対して

$$a_u + a_v + a_w \equiv 0 \mod n$$

が成り立つときをいう。

(iii)αがL-genericかつP-genericのとき、αをgenericという。

§<u>2</u>（再掲）　<u>次元公式</u>。

(2.1)　<u>定理</u>（河野［K］）αをAのgenericな指標とせよ。このとき

もし$i \neq 2$ならば、　$H^i(\alpha) = H^i{}_l(\alpha) = \{0\}$で、

もし$i = 2$ならば、　$\dim H^2(\alpha) = \dim H^2{}_l(\alpha) = 2$。

以下、αがgenericであってある対称性をもつときるとき、２次元ℓ－進表現

$$\rho(\alpha) : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\zeta)) \to \mathrm{Aut}(H^2{}_\ell(\alpha))$$

を問題にする。

§<u>4</u>。　<u>自己同型群</u>。

$U = P^2 - \{XYZ(X-Y)(Y-Z)(Z-X) = 0\}$ の自分自身への双正則な写像全体のなす群Aut(U)を求めよう。

<u>命題</u>。　Aut(U)は５次対称群と同型である。

（証明）cf.若林功［W］。なを山崎－吉田[Y-Y]も見よ。

Aut(U)の表示を与える。

Aut(U)の元σ, α, β, γを関数体Kへの作用で与えることにし

$$\sigma(\lambda) = 1/\lambda \quad ; \quad \sigma(\mu) = 1/\mu$$

$$\alpha(\lambda) = \lambda/(\lambda - 1) \quad ; \quad \alpha(\mu) = (\lambda - \mu)/(\lambda - 1)$$

$$\beta(\lambda)=(-\lambda)/(\mu-1) \quad ; \quad \beta(\mu)=\mu/(\mu-1)$$
$$\gamma(\lambda)= -\lambda+1 \quad ; \quad \gamma(\mu)=-\mu+1$$

と定める。するとこれら４個の元は何れも位数２で$\sigma\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$の位数は３となる。表示：

$$\sigma^2=\alpha^2=\beta^2=\gamma^2=1 \quad ; \quad (\sigma\alpha)^3=(\alpha\beta)^3=(\beta\gamma)^3=1。$$

は５次対称群S_5の生成元と基本関係式である。

Ｆを、P^2の上で定めた直線配置の４個の３重点をblouwing-upして得られる代数曲面とするとＵの自己同型τ：$U\to U$は自然にＦの自己同型τ：$F\to F$に延びる（同じ記号で書く）。$\pi_1(U\times\overline{Q},*)$を$\underset{U}{\mathscr{U}}$のgeometric fundamental groupとすれば、τは$\pi_1(U\times\overline{Q},*)$の内部自己同型をmoduloとして自然に定まる自己同型：

$$\pi_1(\tau):\pi_1(U\times\overline{Q},*)\to\pi_1(U\times\overline{Q},*)$$

を誘導し、さらにそのアーベル化の自己同型：

$$\pi_1(\tau)^{ab}:\pi_1(U\times\overline{Q},*)^{ab}\to\pi_1(U\times\overline{Q},*)^{ab}$$

を誘導する。

さて$p:X_n\to F$というfinite morphismを考える。$\overline{Q}_\ell$のｐによるdirect image $p_*\overline{Q}_\ell$はＡの自然な作用をもち、それによって固有成分に分けると、分解：

$$p_*\overline{Q}_\ell=\bigoplus_{\alpha\in A^*}L(\alpha)$$

を得る。ここで$L(\alpha)$はＵに制限するとrank 1のsmooth $\overline{Q}_\ell$ sheafになる。これに対応する$\pi_1(U\times\overline{Q},*)$の表現を

$$R(\alpha):\pi_1(U\times\overline{Q},*)\to Aut(\overline{Q}_\ell)\cong\overline{Q}_\ell^*$$

と書く。$R(\alpha)$は$\pi_1(U\times\overline{Q},*)^{ab}$から$\overline{Q}_\ell^*$への準同型ともみなせ、

$$R(\alpha)\pi_1(\tau)^{ab}=R(\beta)$$

となる指標$\beta\in A^*$が存在する。このときαに対するℓ－進表現と、βに対するℓ－進表現とは同型になる。

次節で$\alpha=\beta$となるときを調べる。

§５。 genericで対称な指標について。

この節ではgenericな指標αに対しても、それがある対称性を持てば、対応する1－進表現はabelianであることを示す。de Rhamコホモロジー群のときの土屋－蟹江[T-K]の議論がそのままここで通用する。念のため説明する。

<u>定義</u>。　$\alpha=(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$が狭義の対称指標であるとは

$$a_1=a_2 \quad かつ \quad a_3=a_4$$

であるときをいう。

前節でさだめたU上のrank 1のsmooth $\overline{Q}_\ell$ sheaf $L(\alpha)$を思い出す。αが上でいう対称性をもつとき、τを関数体への作用：

$$\tau(\lambda)=\mu、\tau(\mu)=\lambda$$

で定まるUの自己同型とすると

$$(\#): \qquad R(\alpha)\pi_1(\tau)^{ab}=R(\alpha)。$$

τはUに固定点なしで作用するから自然なmorphism

$$\pi: U \to U/\langle\tau\rangle$$

は不分岐な被覆である。さて

$$1\to\pi_1(U\times\overline{Q},*)\to\pi_1(U/\langle\tau\rangle\times\overline{Q},*)\to\langle\tau\rangle\to 1$$

という完全列から(#)によって$R(\alpha)$を延長する表現

$$R'(\alpha): \pi_1(U/\langle\tau\rangle\times\overline{Q},*)\to Q_\ell^*$$

が得られ、これに対応する$U/\langle\tau\rangle$のsmooth Q_ℓ-sheafを$M(\alpha)$とすれば

$$\pi^*M(\alpha)=L(\alpha)。$$

さて$\chi(U, L(\alpha))$を

$$\chi(U, L(\alpha))=\sum_i(-1)^i\dim H^i(U\times\overline{Q}, L(\alpha))$$

で定めると、αがgenericであるから、$\chi(U, L(\alpha))=2$である。

$$\chi(U, L(\alpha))=\{\mathrm{rank}\ L(\alpha)\}\chi(U, Q_\ell)$$

に注意して

$$\chi(U/\langle\tau\rangle, M(\alpha))=1。$$

従ってLerayのspectral sequenceより

$$H^2(U/\langle\tau\rangle\times\overline{Q}, M(\alpha))$$

は１次元。よって

$$\pi_* L(\alpha) = M(\alpha) \oplus M'(\alpha)$$

となる$U/<\tau>$のrank１の$\mathbf{Q}_\ell$-sheaf$M'(\alpha)$が存在する。

$H^2_\ell(\alpha)=H^2(U\times\overline{\mathbf{Q}}, L(\alpha))$に注意して、$H^2_\ell(\alpha)$が$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}(\zeta))$不変な２つのrank１の部分空間に分解することが分かる。$\mathbf{Q}(\zeta)$の最大アーベル拡大を$\mathbf{Q}(\zeta)^{ab}$と書く。まとめて次を得る。

命題(5.1)　αがgenericで上の様な対称性を持つとする。このときαに対応するℓ－進表現

$\rho(\alpha)$：$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}(\zeta))\rightarrow\mathrm{Aut}(H^2_\ell(\alpha))$

は１次元の部分表現の直和に分解する。特にこれはabelianなℓ－進表現である。つまり$\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta)^{ab}/\mathbf{Q}(\zeta))$を通して$\rho(\alpha)$は分解する。

注意１。対称でgenericなαに対応するHodge構造はSelberg積分(cf［Ｓ］)で記述できるはずであるが、まだはっきりしない部分があるのでべつに論ずる。

注意２。対称でgenericなαの個数を求めることもできるが省略する。

§６。　例

ｎ＝２のとき、X_2はＫ３曲面で,singular、つまり代数cyclesが２０次元有る。genericな指標αは１個しかなく、これは対称である。

ｎ＝３のとき、genericなαは１２個でsymmetricなものなし。$H_2(\alpha)$の Hodge-typeは全て(1,0,1)である。

ｎ＝４のとき、genericなαは全部で９３個ある。Hodge typeをみると、(1,0,1)型が７３個、(0,1,1)と(1,1,0)型がそれぞれ１０ずつある。(0,1,1)型と(1,1,0)型は全て対称である。

ｎ＝５のとき。[Y-Y]とも関連するので、別の機会に論じたい。

上の例からみると，$H^2(\alpha)$にはαが genericのとき，代数サイクルはないように思われる。

文献表。

[H] Hirzebruch,F：Arrangements of lines and algebraic surfaces Progress in math. 36, Arithmetic and Geometry. 1983.

[I] 石田正典：The irregularities of Hirzebruch's examples of surfaces of general type with $c_1{}^2=3c_2$. Math. Ann.262,407-420(1983)

[K] 河野俊丈：Homology of a local system on the complement of hyperplanes. Preprint, 1986.

[Sa] 斉藤秀司：General fixed point formula for an algebraic surface and the theory of Swan representations for two-dimensional local rings

[Sh] 塩田徹治：Fermat hypersurfaces に関する一連の論文。 Math.Annalen 等を見よ。

[S] Selberg.A：Bemerkniger om et multipelt integral. Norsk Mat. Tidsskr., 26,71-78(1944)

[T-K]土屋昭博、蟹江幸博: Fock space representation of the Virasora algebra -Intetwining operators. Publ.RIMS.Kyoto Univ.22,259-327(1986)

[Y-Y]山崎正,吉田正章：On Hirzebruch's examples of surfaces with $c_1{}^2=3c_2$. Math. Ann.226,421-431(1984).

[W] 若林功 ：P^2－ {curves} の automorphism group