数理解析研究所講究録
第 609 巻 1987 年 175-190

代数的K-理論におけるHodge-Chern classについて

京大 数理研　島田信夫 (Nobuo Shimada)

代数的K-群の不変量としてのHodge-型 Chern 類 (Grothendieck, Gersten の意味での) について最も簡単な場合の expository な紹介が本稿の目的である.

単位元をもつ可換環 A に対して, $\Omega^1 = \Omega^1_A = \Omega^1_{A/\mathbb{Z}}$ を Kähler differentials の A-加群, $\Omega^i = \Omega^i_A = \Lambda^i(\Omega^1)$ をその A 上の外積巾, $\Omega^* = \Omega^*_A = \sum_{i \geq 0} \Omega^i_A$ を外積代数とする.

離散群 G の表現 $\rho: G \to GL_n A$ (一般線型群) に対する Ω^*_A-係数の (Hodge-型) Chern 類 $c_i(\rho) \in H^i(G, \Omega^i_A)$ $(i \geq 1)$ は, 群 G のコホモロジー類 (ただし Ω^i_A に対する G の作用は自明なものとする) で, 次の性質をもつものとして特徴づけられる: ([Gr], [Ge])

0) $c_i(\rho) = 0$ for $i > n = \operatorname{rank} \rho$.

1) (函手性) 準同型 $f: H \to G$ に対して, $c_i(\rho \circ f) = f^* c_i(\rho)$.

2) $c_i(1_n) = 0$ $(i \geq 1)$, ただし $1_n: G \to GL_n A$ は trivial 表現.

3) (加法性又は Cartan formula) 表現の直和 $\rho' \oplus \rho'': G \xrightarrow{\Delta} G \times G \xrightarrow{\rho' \times \rho''} GL_m A \times GL_n A \xrightarrow{\oplus} GL_{m+n} A$ に対して

$$c(\rho' \oplus \rho'') = c(\rho') \cdot c(\rho'') \qquad (\text{cup 積}),$$

ただし $c(\rho) = 1 + c_1(\rho) + c_2(\rho) + \cdots$ は total Chern 類

4) (normalization) $\rho : G \to GL_n A$ に対して $c_1(\rho) \in H^1(G, \Omega_A^1)$ は，$c_1(\rho)(g) = d(\det \rho(g)) \cdot (\det \rho(g))^{-1}$ (cocycle として) で与えられる．

特に恒等表現 $id_n : GL_n A \to GL_n A$ の Chern 類 $c_i(id_n) \in H^i(GL_n A, \Omega_A^i)$ については，自然な包含写像 $GL_n A \overset{i_n}{\hookrightarrow} GL_{n+1} A$ に関して，$i_n^* c_i(id_{n+1}) = c_i(id_n)$ が成り立つから，ホモトピー可換図式

$$\begin{tikzcd} BGL_n A \arrow[r, "c_i(id_n)"] \arrow[d, "i_n"'] & K(\Omega_A^i, i) \\ BGL_{n+1} A \arrow[ur, "c_i(id_{n+1})"'] \arrow[u, phantom, shift left=6, "\simeq"] & \end{tikzcd}$$

(Eilenberg-MacLane 空間)

が得られ，それから写像 $c_i : BGL(A) = \varinjlim BGL_n A \to K(\Omega_A^i, i)$ がホモトピーを除いて一意に定まる．これは target $K(\Omega_A^i, i)$ が H-空間であるから $BGL(A)^+$ (Quillen's plus construction) を経由する：

$$\begin{tikzcd} BGL(A) \arrow[r, "c_i"] \arrow[d] & K(\Omega_A^i, i) \\ BGL(A)^+ \arrow[ur, "c_i"'] & \end{tikzcd}$$

ホモトピー群の写像に移って

$$c_i : K_i(A) = \pi_i(BGL(A)^+) \to \Omega_A^i$$

が定義される．これが表題の Chern 類である ([Ge])．

具体的な計算のためには，$c_i(\rho)$ の explicit formula や，次の product formula

$$c_{m+n}(a \cdot b) = -\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!(n-1)!} c_m(a) \cdot c_n(b), \quad (a \in K_m(A),\ b \in K_n(A))$$

等が重要であるので，以下これらについて述べたい．

§1. 表現のChern類

Gを離散群，$\rho : G \to GL_n A = Aut_A(A^n)$を表現とする．Chern類の函手性により$c_i(\rho) = \rho^* c_i(id_n)$であるから，先づ$c_i(id_n) \in H^i(GL_n A, \Omega^i)$を定義する．

そのため，Gersten (unpublished) に従って，群$GL_n A$の$M_n(\Omega^1_A) = \Omega^1 \otimes_A M_n(A)$-係数の1-cochain γ_nを以下の様に定義する．ここで$M_n(A)$は，A上のn次正方行列全体で，$GL_n A$の作用は，$m^g = g \cdot m \cdot g^{-1}$（行列の積）で与えられる．

$\gamma = \gamma_n : GL_n A \longrightarrow \Omega^1 \otimes M_n(A)$を，$g \longmapsto dg \cdot g^{-1} = (dg_{ij}) \cdot (g_{ij})^{-1}$（行列の積）で定義すると，コバウンダリーの計算は

$$\delta\gamma(g_1, g_2) = \gamma(g_2)^{g_1} - \gamma(g_1 g_2) + \gamma(g_1) = g_1 \cdot dg_2 \cdot g_2^{-1} \cdot g_1^{-1} - (dg_1 \cdot g_2 + g_1 \cdot dg_2) \cdot g_2^{-1} g_1^{-1}$$
$$+ dg_1 \cdot g_1^{-1} = 0$$

となり，γは1-cocycle，従って$H^1(GL_n A, \Omega^1 \otimes M_n(A))$の元を定める．係数のreduction $1 \otimes tr : \Omega^1 \otimes M_n(A) \longrightarrow \Omega^1$（ただし$tr$はtraceの意．）によって，$c_1(id_n) = (1 \otimes tr)\gamma \in H^1(GL_n A, \Omega^1)$が得られる．次の補題によりこれはnormalizationの条件を満足する．

<u>補題1.</u> $c_1(id_n)(g) = d(\det g) \cdot (\det g)^{-1}$, $g \in GL_n A$.

証）$(1 \otimes tr)\gamma(g) = (1 \otimes tr)(dg \cdot g^{-1})$を計算する．$g = (g_{ij})$, $g^{-1} = (\bar{g}_{ij})$とおく．またe_{ij}で，(ij)-成分が1，他は0なる行列を表わす．

$$dg \cdot g^{-1} = \sum_{i,j} dg_{ij} \otimes (e_{ij} \cdot g^{-1}) = \sum dg_{ij} \otimes \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & 0 & \\ \bar{g}_{j1} \cdots & \bar{g}_{ji} & \cdots \bar{g}_{jn} \\ & 0 & \end{pmatrix} \end{array} i ,$$

$$(1 \otimes tr)(dg \cdot g^{-1}) = \sum_{i,j} dg_{ij} \cdot \bar{g}_{ji} = d(\det g) \cdot (\det g)^{-1} \quad .」$$

$c_i(id_n)$ $(i>1)$ の定義のため，γ の cup 巾を考える必要がある．まず γ の係数 A-加群 $\Omega^1\otimes M_n(A)$（既出，A 上の tensor 積であるが簡単のため略記）のそれ自身との積

$$\left(\Omega^1\otimes M_n(A)\right)\times\left(\Omega^1\otimes M_n(A)\right) \xrightarrow{\ \cdot\ } \Omega^2\otimes\left(M_n(A)\otimes M_n(A)\right)$$

$$(\omega\otimes m\ ,\ \omega'\otimes m') \longmapsto (\omega\wedge\omega')\otimes(m\otimes m')$$

さらに巾 $\left(\Omega^1\otimes M_n(A)\right)^n = \Omega^n\otimes\left(M_n(A)^{\otimes n}\right)$ を考える．

1-cocycle $\gamma=\gamma_n \in C^1(GL_nA,\ \Omega^1\otimes M_n(A))$ の cup 巾

$$\gamma^i=\gamma\cup\cdots\cup\gamma : (GL_nA)^i \to \Omega^i\otimes M_n(A)^{\otimes i},$$

$$\gamma^i(g_1,\dots,g_i)=\gamma(g_1)\cdot\gamma(g_2)^{g_1}\cdot\gamma(g_3)^{g_1g_2}\cdots\gamma(g_i)^{g_1\cdots g_{i-1}}$$

はまた cocycle となり $H^i(GL_nA,\ \Omega^i\otimes M_n(A)^{\otimes i})$ の元を定める．

係数群の reduction $1\otimes\widetilde{tr}:\Omega^i\otimes M_n(A)^{\otimes i}\to\Omega^i\otimes A=\Omega^i$ として，

$$\Omega^i\otimes M_n(A)^{\otimes i}\xrightarrow{1\otimes\varphi}\Omega^i\otimes \mathrm{End}\,\Lambda^i(A^n)\xrightarrow{1\otimes \mathrm{trace}}\Omega^i\otimes A=\Omega^i$$

を定義する．ここで A-写像 $\varphi: M_n(A)^{\otimes i}\to\mathrm{End}\,\Lambda^i(A^n)$ は $\Lambda^i(A^n)$ の基のとり方に一応 depend して，次の様に定める：自由 A-加群 A^n の基 $\{e_1,\dots,e_n\}$ をとり，$\Lambda^i(A^n)$ の基を $\{e_{k_1}\wedge e_{k_2}\wedge\cdots\wedge e_{k_i}\ ;\ 1\le k_1<k_2<\cdots<k_i\le n\}$ としたとき，

$$\varphi(f_1\otimes f_2\otimes\cdots\otimes f_i)(e_{k_1}\wedge\cdots\wedge e_{k_i}) = f_1(e_{k_1})\wedge\cdots\wedge f_i(e_{k_i}),$$

$$f_1,\dots,f_i\in M_n(A)=\mathrm{End}\,A^n.$$

このとき trace $\varphi(f_1\otimes\cdots\otimes f_i)$ は基のとり方に依らず一意的に定まる．それを $\widetilde{tr}(f_1\otimes\cdots\otimes f_i)$ とかく．

そこで，$c_i(id_n)=(1\otimes\widetilde{tr})\gamma^i\in H^i(GL_nA,\ \Omega^i)$ $(i>1)$

が定義され，従って表現 $\rho: G \to GL_n A$ に対する $c_i(\rho) = \rho^* c_i(id_n) \in H^i(G, \Omega^i)$ $(i \geqq 1)$ が定義されたことになる．

表現の Hodge 型 Chern 類の性質のうち，0)，1)，2) および 4) は既に明らかであろう（0) は $\Lambda^i(A^n) = 0$ $(i > n)$ から）．

性質 3) (Cartan formula) を験すため，次の補題を準備する．

<u>補題2</u>. $f_i = \begin{pmatrix} f_i' & 0 \\ 0 & f_i'' \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} M_m(A) & 0 \\ 0 & M_n(A) \end{pmatrix} \subset M_{m+n}(A)$, $i = 1, \cdots, r$, のとき，

$$\widetilde{tr}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_r) = \sum_{i=0}^{r} \widetilde{tr}(f_1' \otimes \cdots \otimes f_i') \cdot \widetilde{tr}(f_{i+1}'' \otimes \cdots \otimes f_r'').$$

証) $A^{m+n} = A^m \oplus A^n$ の基 $\{e_1', \cdots, e_m', e_{m+1}'', \cdots, e_{m+n}''\}$ により，$\Lambda^r(A^m \oplus A^n)$ の基として $\{e_{k_1}' \wedge \cdots \wedge e_{k_i}' \wedge e_{k_{i+1}}'' \wedge \cdots \wedge e_{k_r}'' ; 1 \leqq k_1 < \cdots < k_i \leqq m, m+1 \leqq k_{i+1} < \cdots < k_r \leqq m+n\}$ をとれば明らか．」

さて 1-cocycle $\gamma = \gamma_n \in C^1(GL_n A, \Omega^1 \otimes M_n(A))$ の表わし方として，$\Omega^1 = \Omega_A^1$ の生成系 $\{\omega_i\}_{i \in I}$ を一つ固定しておけば，

$$\gamma(g) = \sum \omega_i \otimes m_i(g) \in \Omega^1 \otimes M_n(A)$$

とかける．従って

$$c_r(id_n) = (1 \otimes \widetilde{tr})\gamma^r$$

については，

$$c_r(id_n)(g_1, \cdots, g_r) = (1 \otimes \widetilde{tr})\gamma(g_1) \cdot \gamma(g_2)^{g_1} \cdots \gamma(g_r)^{g_1 \cdots g_{r-1}}$$
$$= \sum \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r} \cdot \widetilde{tr}\left(m_{i_1}(g_1) \otimes m_{i_2}(g_2)^{g_1} \otimes \cdots \otimes m_{i_r}(g_r)^{g_1 \cdots g_{r-1}}\right)$$

とかき表わすことができる．

表現の直和のモデルとして，$GL_m A \times GL_n A \xrightarrow{\pi_1 \oplus \pi_2} GL_{m+n} A$ を考えよう．これは $(g', g'') \longmapsto g' \oplus g'' = \begin{pmatrix} g' & 0 \\ 0 & g'' \end{pmatrix}$ で定義される．

$\gamma_m(g') = \sum \omega_i \otimes m_i'(g')$ ，$\gamma_n(g'') = \sum \omega_i \otimes m_i''(g'')$

とおけば，

$$\gamma_{m+n}(g' \oplus g'') = \sum \omega_i \otimes \left(m_i'(g') \oplus m_i''(g'')\right)$$

と考えてよい．

そこで $g_i = g_i' \oplus g_i''$ $(i = 1, \cdots, r)$ のとき

$$(1 \otimes \tilde{tr})\gamma_{m+n}^{r}(g_1, \cdots, g_r)$$

$$= \sum \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r} \cdot \tilde{tr}\Big\{\left(m_{i_1}'(g_1') \oplus m_{i_1}''(g_1'')\right) \otimes \left(m_{i_2}'(g_2')^{g_1'} \oplus m_{i_2}''(g_2'')^{g_1''}\right) \otimes \cdots$$

$$\cdots \otimes \left(m_{i_r}'(g_r')^{g_1' \cdots g_{r-1}'} \oplus m_{i_r}''(g_r'')^{g_1'' \cdots g_{r-1}''}\right)\Big\}$$

（補題2により）

$$= \sum \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r} \cdot \tilde{tr}\left(m_{i_1}'(g_1') \otimes m_{i_2}'(g_2')^{g_1'} \otimes \cdots \otimes m_{i_j}'(g_j')^{g_1' \cdots g_{j-1}'}\right) \cdot \tilde{tr}\left(m_{i_{j+1}}''(g_{j+1}'')^{g_1'' \cdots g_j''} \otimes \cdots\right.$$

$$\left.\cdots \otimes m_{i_r}''(g_r'')^{g_1'' \cdots g_{r-1}''}\right)$$

$$= \sum \left(\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_j} \cdot \tilde{tr}\left(m_{i_1}'(g_1') \otimes \cdots \otimes m_{i_j}'(g_j')^{g_1' \cdots g_{j-1}'}\right)\right) \wedge \left(\omega_{i_{j+1}} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r} \cdot \tilde{tr}\left(m_{i_{j+1}}''(g_{j+1}'') \otimes \cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdots \otimes m_{i_r}''(g_r'')^{g_{j+1}'' \cdots g_{r-1}''}\right)\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{r} (1 \otimes \tilde{tr})\gamma_m^{j}(g_1', \cdots, g_j') \wedge (1 \otimes \tilde{tr})\gamma_n^{r-j}(g_{j+1}'', \cdots, g_r'')$$

すなわち

$$(\pi_1 \oplus \pi_2)^* c_r(id_{m+n}) = \sum_{j=0}^{r} c_j(\pi_1) \cup c_{r-j}(\pi_2) \in H^r(GL_m A \times GL_n A, \Omega^r)$$

が得られた。ただし $GL_m \times GL_n \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} \begin{matrix} GL_m \\ GL_n \end{matrix}$ は projection.

可換図

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\Delta"] \arrow[rr, bend right, "\rho'"] \arrow[rrr, bend right=40, "\rho''"'] & G\times G \arrow[r, "\rho'\times\rho''"] & GL_mA \times GL_nA \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ & & GL_mA & GL_nA \end{tikzcd}$$

から $c_r(\rho'\oplus\rho'') = \sum_{j=0}^{r} c_j(\rho')\cdot c_{r-j}(\rho'')$ を得る.

次に表現の tensor 積に関しては, モデル $GL_m\times GL_n \xrightarrow{\pi_1\otimes\pi_2} GL_{mn}$ に対して

$$(\pi_1\otimes\pi_2)^*\gamma_{m+n}(a\times b) = \gamma_{m+n}(a\otimes b) = d(a\otimes b)\cdot(a\otimes b)^{-1} = da\cdot a^{-1}\otimes 1_n + 1_m\otimes db\cdot b^{-1}$$

従って $1\otimes t_r$ をほどこして

$$(\pi_1\otimes\pi_2)^* c_1(id_{mn}) = n\cdot c_1(\pi_1) + m\, c_1(\pi_2) \qquad (\text{上図参照})$$

或いは,

$$c_1(\rho'\otimes\rho'') = (\mathrm{rank}\,\rho'')\cdot c_1(\rho') + (\mathrm{rank}\,\rho')\cdot c_1(\rho'').$$

一般に表現の tensor 積の Chern 類についての公式

5) $c(\rho'\otimes\rho'') = c(\rho') * c(\rho'')$ （$*$の意味は後で述べる）

を示すためには, いわゆる splitting principle が必要であるので, 先づその概略から述べる.

簡単のため, $H^*(GL_nA, \Omega^*) = \sum_{i\geq 0} H^i(GL_nA, \Omega^i)$ とおく. ただし $H^0(GL_nA, \Omega^0) = A$. $\Delta_n = \Delta_nA = \left\{\begin{pmatrix} g_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_{nn}\end{pmatrix}\right\}$ で GL_nA の対角線型の部分群を表わす. $\eta = \eta_n : \Delta_n \to GL_n$ を自然な包含写像とする. このとき次の様な可換図式が得られる:

$$\begin{tikzcd}
H^*(GL_nA,\Omega^*) \arrow[d, "\eta^*"] & A[c_1,\dots,c_n] \arrow[l, hook'] \arrow[dr, "\eta^*", "\cong"'] & \\
H^*(\Delta_n,\Omega^*) & A[\alpha_1,\dots,\alpha_n] \arrow[l, hook'] & A[\alpha_1,\dots,\alpha_n]^{\Sigma_n} \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

：（$c_i = c_i(id_n)$ で生成された subalgebra の意味 以下同様）

ここで，$\alpha_i \in H^1(\Delta_n,\Omega^1)$ は $\alpha_i\begin{pmatrix} g_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_{nn}\end{pmatrix} = g_{ii}^{-1}\cdot dg_{ii}$ で定義される 1-cocycle（または 1-cohomology class）を意味し，Σ_n は n 次対称群で $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ の置換群と考える．$H^*(GL_nA,\Omega^*)$ 等は cup 積によって可換環となる（普通は $f\cup g \sim (-1)^{\deg f\cdot\deg g}\, g\cup f$ の様に，積の順序により符号がつくが，この場合，係数が外積代数であるため符号が消し合う）．

補題 3. $\eta^* c_i = \sigma_i(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) = \sum_{k_1<\cdots<k_i} \alpha_{k_1}\cdots\alpha_{k_i}$ （i 次 elem. symm. fc.）

証）
$$\begin{aligned}
\eta^* c_r\left(g^{(1)},\dots,g^{(r)}\right) &= (1\otimes \tilde{t_r})\,\gamma^r\left(g^{(1)},\dots,g^{(r)}\right)\\
&= \sum \alpha_{i_1}(g^{(1)})\wedge\cdots\wedge\alpha_{i_r}(g^{(r)})\cdot \tilde{t_r}\left(e_{i_1i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_ri_r}\right)\\
&= \sum_{i_1<\cdots<i_r} \alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_r}\left(g^{(1)},\dots,g^{(r)}\right)
\end{aligned}$$

ここで $g^{(k)} = \begin{pmatrix} g_{11}^{(k)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_{nn}^{(k)}\end{pmatrix} \in \Delta_n$， $e_{ii} = \begin{array}{c} \scriptstyle i \\ \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\end{array}$ ┘

さらに次の様な可換図式が必要である：

$$\begin{tikzcd}
H^*(GL_m\times GL_n,\Omega^*) \arrow[d] & A[c_1',\dots,c_m']\otimes A[c_1'',\dots,c_n''] \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\cong"', "(\eta_m\times\eta_n)^*"] & A[c_1,\dots,c_{mn}] \arrow[l, "(\pi_1\otimes\pi_2)^*"'] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cong"'] & H^*(GL_{mn},\Omega^*) \arrow[d] \\
H^*(\Delta_m\times\Delta_n,\Omega^*) & A[\alpha_1',\dots,\alpha_m']^{\Sigma_m}\otimes A[\alpha_1'',\dots,\alpha_n'']^{\Sigma_n} \arrow[l, hook'] & A[\alpha_1,\dots,\alpha_{mn}]^{\Sigma_{mn}} \arrow[l, "(\pi_1\otimes\pi_2)^*"] \arrow[r, hook] & H^*(\Delta_{mn},\Omega^*)
\end{tikzcd}$$

ここで，$\pi_1\otimes\pi_2 : \Delta_m\times\Delta_n \longrightarrow \Delta_{mn}$ を $\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{mm}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} b_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{nn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(b) & & \\ & \ddots & \\ & & a_{mm}(b)\end{pmatrix}$ としたとき，次の補題を得る：

補題4. $(\pi_1\otimes\pi_2)^*\alpha_{(i-1)n+j} = \alpha_i' + \alpha_j''$ $(1\le i\le m,\ 1\le j\le n)$.
$(\alpha_i' = \pi_1{}^*\alpha_i,\ \alpha_i\in H^1(\Delta_m,\Omega^1)\ ;\ \alpha_j'' = \pi_2{}^*\alpha_j,\ \alpha_j\in H^1(\Delta_n,\Omega^1))$.

上の可換図において，$(\pi_1\otimes\pi_2)^*c_\ell$が$c_i', c_j''$等の多項式で表わされることは，直接計算により験すことが出来るが，面倒なので省略させて頂く．また$A[c_1,\cdots,c_n]$等と恰も多項式環の様に書いたが，実はこれは$c_1,\cdots,c_n$で生成された subalgebra の意味である．

以上のことから，$(\pi_1\otimes\pi_2)^*\prod_{i=1}^{mn}(1+\alpha_i) = \prod_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}(1+\alpha_i'+\alpha_j'')$.
$c = c(id_{mn})\in H^*(GL_{mn},\Omega^*)$を total Chern class とするとき，
$\eta_{mn}^*c = \prod(1+\alpha_i)$，$\eta_{mn}\circ(\pi_1\otimes\pi_2) = (\pi_1\otimes\pi_2)\circ(\eta_m\times\eta_n)$より，

$$(\eta_m\times\eta_n)^*c(\pi_1\otimes\pi_2) = (\eta_m\times\eta_n)^*(\pi_1\otimes\pi_2)^*c = (\pi_1\otimes\pi_2)^*\eta_{mn}^*c = \prod_{i,j}(1+\alpha_i'+\alpha_j'')$$

これがα_i', α_j''のそれぞれにつき対称式であることから，$c_\ell(\pi_1\otimes\pi_2)$を$c_k' = c_k(\pi_1)$，$c_\ell'' = c_\ell(\pi_2)$の多項式として表わす具体的な表現5)が得られる．

§2. 代数的K-群，積 ([L1],[Q])

単位元をもつ(可換)環Aの高次代数的K-群$K_i(A)$ $(i\ge 1)$は Quillen により，一般線型群$GL(A) = \varinjlim_n GL_n(A)$の分類空間$BGL(A)$から，いわゆる plus construction により作られた空間$BGL(A)^+$のホモトピー群として定義された．$K_i(A) \overset{\mathrm{def}}{\equiv} \pi_i(BGL(A)^+)$ $(i\ge 1)$．この空間$BGL(A)^+$は，$BGL(A)$に2次元，および3次元の cell を適当に attach することによって得られ，次の性質で

特徴づけられる:

0) $BGL(A)^+$ は連結 CW 複体

1) 包含写像 $i : BGL(A) \hookrightarrow BGL(A)^+$ は,

$$i_* : H_*(BGL(A), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_*(BGL(A)^+, \mathbb{Z}) \quad (\text{同型})$$

および $i_* : \pi_1(BGL(A)) = GL(A) \to \pi_1(BGL(A)^+) \cong GL(A)/E(A)$ (自然な商写像) を induce する. ここで $E(A)$ は初等行列 $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} + \lambda e_{ij}$ $(i \neq j)$, $\lambda \in A$, で生成された部分群で, 交換子部分群 $[GL(A), GL(A)]$ と一致する.

2) $\pi_1(Y)$ が abelian gr. なる空間 Y (例えば H-空間) への $BGL(A)$ からの任意の連続写像 f は, ホモトピーの意味で i を経由する:

$$\begin{tikzcd} BGL(A) \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \arrow[d, phantom, "\simeq"] & BGL(A)^+ \arrow[dl, dashed, "\exists f^+"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

しかも, この f^+ はホモトピーを除いて unique である.

かくして $BGL(A)^+$ のホモトピー型は一意に定まる.

この plus 構成は, もっと一般に, 連結 CW 複体 X と, その基本群 $\pi_1(X)$ の perfect normal subgroup N (perfect の意味は $N = [N, N]$) の対 (X, N) に対して定義され, X_N^+, $i : X \hookrightarrow X^+$ $(= X_N^+)$, $\pi_1(X^+) \cong \pi_1(X)/N$ 等が上記の場合と同様の性質をもつように作られる. 例えば, $X = BGL_n(A)$ に対して, $N = E_n(A)$ (初等行列で生成された部分群) は, $n \geq 3$ の場合 perfect

となり，$BGL_n(A)^+$ が構成される．

上記の様な対 (X, N) と (Y, N') から積 $(X\times Y, N\times N')$ が生じ，$(X\times Y)^+ \xrightarrow{\simeq} X^+\times Y^+$ はホモトピー同値写像となる．

以下の応用に必要ないくつかの写像を定義する．

群の準同型 $\oplus : GL(A)\times GL(A) \to GL(A)$ が，

$$(\alpha\oplus\beta)_{ij} = \begin{cases} \alpha_{k\ell} & \text{if } i=2k-1,\ j=2\ell-1 \\ \beta_{k\ell} & \text{if } i=2k,\ j=2\ell \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

によって定義され，直和写像とよばれる．これから分類空間の写像 $BGL(A)\times BGL(A) \cong B(GL(A)\times GL(A)) \xrightarrow{B\oplus} BGL(A)$，さらに

$\mu_\oplus : BGL(A)^+\times BGL(A)^+ \simeq (BGL(A)\times BGL(A))^+ \longrightarrow BGL(A)^+$

が導びかれて，$BGL(A)^+$ は H-空間となる．この写像は $BGL(A)^+$ における"加法"である．

次に，(以下Aは可換環) $BGL(A)^+$ における"乗法"に相当する別な積を定義しよう．まず行列の tensor 積によって群の準同型 $: GL_m(A)\times GL_n(A) \longrightarrow GL_{mn}(A)$ が定義され，

それから $f_{m,n} : BGL_m(A)^+\times BGL_n(A)^+ \longrightarrow BGL_{mn}(A)^+ \longrightarrow BGL(A)^+$ が定義される．$(m, n\geqq 3)$ そこで $BGL(A)^+$ における加法を用いて

$$\gamma_{m,n} : BGL_m(A)^+\times BGL_n(A)^+ \longrightarrow BGL(A)^+$$

を，$\gamma_{m,n} = f_{m,n} + \iota\circ f_{m,n}\circ(id\times *) + \iota\circ f_{m,n}\circ(*\times id)$

で定義する，ここで $\iota : BGL(A)^+ \to BGL(A)^+$ は H-空間におけるホモトピー逆元（$id+\iota$ がホモトピー的に可縮）で，その存在は

連結H-空間において保証されている．*は1点(例えば基点)にうつす写像，idは恒等写像．別な表現では，

$$\gamma_{m,n}(x,y) = f_{m,n}(x,y) - f_{m,n}(x,y_0) - f_{m,n}(x_0,y),$$

ここに x_0 は $BGL_m(A)^+$ の基点，y_0 は $BGL_n(A)^+$ の基点．

写像 $f_{m,n}$ を $\gamma_{m,n}$ にとり直した理由は，次の図式のホモトピー可換性にある：

$$\begin{tikzcd}
BGL_m(A)^+ \times BGL_n(A)^+ \arrow[rr] \arrow[dr, "\gamma_{m,n}"'] & \simeq & BGL_{m+1}(A)^+ \times BGL_{n+1}(A)^+ \arrow[dl, "\gamma_{m+1,n+1}"] \\
& BGL(A)^+ &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
BGL_m(A)^+ \times BGL_n(A)^+ \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, "\gamma_{m,n}"'] & \simeq & BGL_m(A)^+ \wedge BGL_n(A)^+ \arrow[dl, dashed, "\hat{\gamma}_{m,n}"] \\
& BGL(A)^+ &
\end{tikzcd}$$

これによって(必要ならばtelescope構成を用いて)，写像 $\gamma_{m,n}$ の極限移行 $m\to\infty$, $n\to\infty$ が可能で，ホモトピー可換図

$$\begin{tikzcd}
BGL_m(A)^+ \times BGL_n(A)^+ \arrow[rr] \arrow[dr, "\gamma_{m,n}"'] & \simeq & BGL(A)^+ \times BGL(A)^+ \arrow[dl, "\gamma"] \\
& BGL(A)^+ &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
BGL(A)^+ \times BGL(A)^+ \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, "\gamma"'] & \simeq & BGL(A)^+ \wedge BGL(A)^+ \arrow[dl, "\hat{\gamma}"] \\
& BGL(A)^+ &
\end{tikzcd}$$

が定まる．ここで $X\wedge Y = X\times Y/X\vee Y$ はスマッシュ積，$X\vee Y = X\times y_0 \cup x_0\times Y$ は wedge 和．

代数的 K-群の積 $K_i(A)\times K_j(A)\to K_{i+j}(A)$ は，可換図

$$\begin{tikzcd}
S^i\times S^j \arrow[r, twoheadrightarrow] \arrow[dd, "a\times b"'] & S^i\wedge S^j = S^{i+j} \arrow[d, "a\wedge b"] \arrow[dd, bend left=60, "a\cdot b"] \\
 & BGL(A)^+\wedge BGL(A)^+ \arrow[d, "\hat{\gamma}"] \\
BGL(A)^+\times BGL(A)^+ \arrow[ur, twoheadrightarrow] \arrow[r, "\gamma"] & BGL(A)^+
\end{tikzcd}$$

により定義される．

§3. 代数的 K-群における Chern 類，product formula

表現の Chern 類 $c_i(id_n)\in H^i(GL_nA,\Omega^i_A)$ （§1 参照）は，
$H^i(GL_nA,\Omega^i_A)\cong H^i(BGL_n(A),\Omega^i_A)$ の元として，写像

$$c_i: BGL_n(A)\longrightarrow K(\Omega^i_A, i) \quad (\text{Eilenberg-MacLane 空間})$$

を定める（正確には，ホモトピー類）．序説に述べた様に，これは
写像 $c_i: BGL(A)\to K(\Omega^i_A, i)$ さらに $c_i: BGL(A)^+\to K(\Omega^i_A, i)$
を定め，ホモトピー群の写像

$$c_i: K_i(A)\longrightarrow \Omega^i_A \quad (i\geq 1)$$

を定める．これが K-群における Hodge-Chern 類の定義である（[Ge]）．

A が可換環のとき，tensor 積 $GL_m(A)\times GL_n(A)\to GL_{mn}(A)$ から

$$f_{m,n}: BGL_m(A)^+\times BGL_n(A)^+\simeq B(GL_m(A)\times GL_n(A))^+\to BGL_{mn}(A)^+\to BGL(A)^+$$

が導びかれ，それを modify して

$$\gamma_{m,n}=f_{m,n}+\iota\circ f_{m,n}(id\times *)+\iota\circ f_{m,n}(*\times id)\left(+f_{m,n}(*\times *)\right)$$

が定義された（§2）が，これは表現の言葉で言えば，

$$\gamma_{m,n}\sim(\overline{id}_m-\overline{1}_m)\otimes(\overline{id}_n-\overline{1}_n)$$

と解釈することができる．この式の右辺も m, n に関して極限移行が可能であり，従って積写像

$$\gamma : BGL(A)^+ \times BGL(A)^+ \longrightarrow BGL(A)^+$$

は $\varinjlim (\overline{id}_m - \overline{1}_m) \otimes (\overline{id}_n - \overline{1}_n)$ から導びかれたものと考えてよい．

そこで，次の図式

$$\begin{tikzcd}
S^m \times S^n \arrow[r] \arrow[d, "a \times b"'] & S^m \wedge S^n = S^{m+n} \arrow[d, "a \cdot b"] \\
BGL(A)^+ \times BGL(A)^+ \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "c_m \times c_n"'] & BGL(A)^+ \arrow[d, "c_{m+n}"] \\
K(\Omega^m, m) \times K(\Omega^n, n) \arrow[r, dashed, "\Phi_\#"] \arrow[dr] & K(\Omega^{m+n}, m+n) \\
& K \wedge K \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}$$

を考えよう．上の四角形は(ホモトピー)可換である(§2)．下の四角形は，$\Phi : \Omega^m_A \otimes \Omega^n_A \longrightarrow \Omega^{m+n}_A$ を，

$$\Phi(\xi \otimes \eta) = - \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!\,(n-1)!} \xi \wedge \eta$$

と置けば，可換となることを示そう．

先ず，上図における γ は，十分大なる r, s をとって

$$\gamma_{r,s} : BGL_r(A)^+ \times BGL_s(A)^+ \longrightarrow BGL(A)^+$$

で置き換えてよい．上述の注意により

$$c_{m+n}\left((\overline{id}_r - \overline{1}_r) \otimes (\overline{id}_s - \overline{1}_s) \right)$$

の計算を行う．そのため splitting principle を用いて，ℓ, ℓ' を

共に1次元表現として，total Chern 類を計算する：

$$c((\ell-1_1)\otimes(\ell'-1_1)) = c(\ell\otimes\ell')\cdot c(\ell)^{-1}\cdot c(\ell')^{-1}$$

$$= (1+c_1(\ell)+c_1(\ell'))\cdot(1+c_1(\ell))^{-1}\cdot(1+c_1(\ell'))^{-1}$$

形式的に $id_r = \ell_1 + \cdots + \ell_r$ ，$id_s = \ell_1' + \cdots + \ell_s'$ （直和）とおけば，

$$(id_r - 1_r)\otimes(id_s - 1_s) = \sum(\ell_i - 1_1)\otimes(\ell_j' - 1_1)$$

従って，$c((id_r - 1_r)\otimes(id_s - 1_s)) = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s}\left[(1+c_1(\ell_i)+c_1(\ell_j'))\cdot(1+c_1(\ell_i))^{-1}\cdot(1+c_1(\ell_j'))^{-1}\right]$

$$= \prod_{i,j}(1+\alpha_i+\beta_j)(1+\alpha_i)^{-1}(1+\beta_j)^{-1}$$

（ただし $c(id_r) = \prod_i(1+\alpha_i)$，$c(id_s) = \prod_j(1+\beta_j)$）．これは α_i, β_j に関する対称多項式であるから，α_i の基本対称式 $c_k(id_r)$，β_j の基本対称式 $c_{k'}(id_s)$ 等の多項式として表わされる：

$$1 + \sum_{k\geq 1} Q_k(c_1(id_r), \cdots, c_k(id_r); c_1(id_s), \cdots, c_k(id_s)).$$

$$Q_{m+n} \equiv -\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!(n-1)!}c_m(id_r)\cdot c_n(id_s) \quad \left(\bmod \begin{array}{l} c_1(id_r), \cdots, c_{m-1}(id_r), \\ c_1(id_s), \cdots, c_{n-1}(id_s)\end{array}\right)$$

が成り立つことが知られている．従って前頁の図式は可換となる．

<u>定理</u>（積公式）[Bloch，その他]

$$c_{m+n}(a\cdot b) = -\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!(n-1)!}c_m(a)\wedge c_n(b) \quad (a\in K_m(A),\ b\in K_n(A)).$$

これの応用等については省略（[L2]，[S] 参照）．

参考文献

[B] S. Bloch, Algebraic K-theory and the christalline cohomology, Publ. I.H.E.S. 47 (1977), 187-268.

[Ge] S. Gersten, "Higher K-theory of rings" in Algebraic K-theory I, Lect. Notes in Math. 341, Springer (1973), 211-243.

[Gr] A. Grothendieck, Classes de Chern et représentations linéares des groupes discrets, in Dix exposés sur le cohomologie des schémas, North Holland, 1968

[L_1] J.-L. Loday, K-théorie algébrique et représentations de groupes, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., t. 9 (1976), 309-377.

[L_2] J.-L. Loday, Symbols en K-théorie algébric supérieure, C. R. Acad. Sc. Paris, 292 (1981), 863-866.

[Q] D. Quillen, Higher algebraic K-theory I, Lect. Notes in Math. 341, Springer (1973), 85-147

[S] N. Shimada, Symbols in K_n, Contemporary Math. 19 (1983), 369-378.