数理解析研究所講究録
第611巻 1987年 26-41

情報様式に変化の伴うタイミング・ゲーム

姫路工大　寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)

§1. 序

ここで取扱う問題は　以下のモデルで端的に表現できる2人非0和タイミング・ゲームである.

2人の player (Player I, II)がおり，各々は一定時間内——これを[0,1]とする——に，1回だけ自分の目的の為の行動をとることができる. Player i ($i=1,2$)は時刻 $t\in[0,1]$ で行動したとすると確率 $A_i(t)$ で目的達成に成功し $1-A_i(t)$ で失敗する. 目的を先に達成した方が勝ちとなり　このゲームの審判から+1の利益を受取る. Duel の場合と同様に player に関係する情報様式に2つの型がある. もし一方の player が行動をとったとき そのことが直ちに情報として相手に伝えられるならば 彼は noisy bullet を持っていると呼ぶことにし, 反対に 彼がもうすでに行動をとってしまったのか まだとっていないのかが 相手に知られないならば 彼は silent bullet を持っていると

呼ぶことにする．さて 本報告では 従来の上記のモデルに加え 両 player の持っている bullets が cdf $H(t)=P_r\{T\leqq t\}$ を持つ random time $T\in[0,1]$ で silent から noisy へ変化する問題を取扱う．この仮定は，両player共 時間の経過に伴い情報収集能力を改善することができることを意味する．

このモデルは明らかに従来の古典的タイミング・ゲームから不確実な情報構造下での非0和型モデルへの1つの展開となっている（Dresher [1954]，Karlin [1959]，Sakaguchi [1978]）．関連する論文としては Sweat [1971] および Teraoka [1976, 1979, 1983, 1984, 1986] がある．

§2．仮定と記号

。$A_1(t)$ と $A_2(t)$ を精度関数とよぶ．精度関数は t につき連続的微分可能であり，$A_1(0)=A_2(0)=0$，$A_1(1)=A_2(1)=1$，かつ $A_1'(t)>0$；$A_2'(t)>0$ for $t\in[0,1)$．

。cdf $H(t)$ は非減少関数で $H(0)<1$ かつ $H(1)=1$．

。t_0 を区間 $[0,1]$ における方程式

$$A_1(t)A_2(t)-\{1-A_1(t)\}\{1-A_2(t)\}H(t)=0 \qquad (1)$$

の最大根とする．そうすると

$$A_1(t)A_2(t)-\{1-A_1(t)\}\{1-A_2(t)\}H(t)>0 \quad \text{for } t\in(t_0,1).$$

。2つの関数 $\theta_1(t)$ と $U_i(z|\ell)$ を次のように定義する：

$$\theta_i(t)=\frac{A'_{3-i}(t)}{A_1(t)A_2(t)-\{1-A_1(t)\}\{1-A_2(t)\}H(t)}\ ,\quad t\in(t_0,1]$$

$$U_i(z|\ell)=e^{-\int_\ell^z[A_i(t)+\{1-A_i(t)\}H(t)]\theta_i(t)dt},$$
$$z\in[\ell,1]\subset(t_0,1],$$
$$\text{for } i=1,2.$$

。さらに, $H(t_0)<1$. もしそう仮定しないと本質的に従来の非0和 noisy model と同じことになってしまう。すなわち t_0 は $A_1(t)+A_2(t)=1$ の $[0,1]$ での唯一根となり, (t_0,t_0) が平衡点となる(Sakaguchi [1978], Teraoka [1984])。

。Player I と II が同時刻 t で行動した時は, I は $\Phi_1(t)$ を II は $\Phi_2(t)$ を審判から受取るものとする。ここでは

$0<\Phi_1(t)<A_1(t)$; $0<\Phi_2(t)<A_2(t)$, for each t

を仮定する. (市場寡占問題では, $\Phi_1(t)=\lambda_1A_1(t)$; $\Phi_2(t)=\lambda_2 A_2(t)$, ただし $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $\lambda_1+\lambda_2=1$, となっている.)

§3. 純戦略と期待効用

両 player は互に区間 $\{t\mid H(t)=1\}$ をのぞいて相手が silent か noisy のうちのどちらを持っているのかわからない。そこで I と II の純戦略を以下のように設定する:

x を I の純戦略とする. {この意味は, I は $[0,1]$ 内に一点 x を選び, もし相手(II)がこの x より前に時刻 $y(<x)$

で既に行動したという情報を受取ることができれば，(Iは)点1まで待って行動し，もしそのような情報を受取らなければ，その選んだ時刻xで行動する.}

yをIIの純戦略とする. Iのそれと同様.

したがって $M_i(x,y)$を Player iへの expected payoff kernel, $i=1,2$, とすると

$$M_1(x,y)=\begin{cases} A_1(x) & x<y \\ \Phi_1(x) & x=y \\ \{1-A_2(y)\}[\{1-H(y)\}A_1(x)+H(y)], & x>y \end{cases} ;\quad (2)$$

$$M_2(x,y)=\begin{cases} A_2(y) & y<x \\ \Phi_2(y) & y=x \\ \{1-A_1(x)\}[\{1-H(x)\}A_2(y)+H(x)], & y>x \end{cases} \quad (3)$$

ここで，IとIIは混合戦略として cdfs on $[0,1]$ である$F(x)$と$G(y)$を用いることにし，また今後

$M_i(F,G)=\int_0^1\int_0^1 M_i(x,y)\,dF(x)\,dG(y)$, and

$M_i(x,G)=\int_0^1 M_i(x,y)\,dG(y)$; $M_i(F,y)=\int_0^1 M_i(x,y)\,dF(x)$

という記号を使うことにする.

§4. 解析と主要結果

Payoff kernels (3)と(4)の形から，Iの混合戦略$F(x)$は区間$[a,1)$上の density part $f(x)>0$ と $x=1$ での mass part $\alpha \geqq 0$ とから成り，IIの混合戦略 $G(y)$ は区間 $[a, 1)$ 上の density part $g(y) > 0$ と $y=1$ での mass part $\beta \geqq 0$ とから成ると仮定すると．

$$M_1(x, G) = \begin{cases} A_1(x), & x < a \\ A_1(x)\int_a^x \{1-A_2(y)\}\{1-H(y)\}g(y)dy & \\ \quad + \int_a^x \{1-A_2(y)\}H(y)g(y)dy + A_1(x)\{1-G(x)\}, & a \leqq x < 1 \\ \int_a^1 \{1-A_2(y)\}g(y)dy + \beta\Phi_1(1), & x = 1 \end{cases} \tag{4}$$

$$M_2(F, y) = \begin{cases} A_2(y), & y < a \\ A_2(y)\int_a^y \{1-A_1(x)\}\{1-H(x)\}f(x)dx & \\ \quad + \int_a^y \{1-A_1(x)\}H(x)f(x)dx + A_2(y)\{1-F(y)\}, & a \leqq y < 1 \\ \int_a^1 \{1-A_1(x)\}f(x)dx + \alpha\Phi_2(1), & y = 1 \end{cases} \tag{5}$$

$M_2(F, y) = \mathrm{const}$ for $a \leqq y < 1$ とすることによって

$$\frac{f(y)}{1-\int_a^y [A_1(x)+\{1-A_1(x)\}H(x)]f(x)dx} = \frac{A_2'(y)}{A_1(y)A_2(y)-\{1-A_1(y)\}\{1-A_2(y)\}H(y)}, \quad t_0 < a \leqq y < 1 \tag{6}$$

が得られ，したがって

$$f(x) = \theta_1(x)U_1(x \mid a), \quad t_0 < a \leqq x < 1 \tag{7}$$

を得る．まったく同様にして

$$g(y) = \theta_2(y)U_2(y \mid a), \quad t_0 < a \leqq y < 1 \tag{8}$$

も得る．

Lemma 1. 任意に与えられた $z>t_0$ に対して

$$\int_l^z \frac{[A_i(t)+\{1-A_i(t)\}H(t)]A'_{3-i}(t)}{A_1(t)A_2(t)-\{1-A_1(t)\}\{1-A_2(t)\}H(t)}dt \uparrow \infty \quad \text{as } l \downarrow t_0 \qquad (i=1,2)$$

したがって $U_i(z|l)$ は任意に固定された $l\in(t_0,1)$ に対して z につき非増加関数となる.

(証明) $i=1$ の時のみ証明する. $t>t_0$ だから

$$\frac{[A_1(t)+\{1-A_1(t)\}H(t)]A'_2(t)}{A_1(t)A_2(t)-\{1-A_1(t)\}\{1-A_2(t)\}H(t)}$$

$$\geqq \frac{[A_1(t_0)+\{1-A_1(t_0)\}H(t_0)]A'_2(t)}{A_1(t)A_2(t)-\{1-A_1(t)\}\{1-A_2(t)\}H(t_0)} .$$

l'Hospital's rule を用いて

$$\lim_{t\to t_0}\left[\frac{\dfrac{[A_1(t_0)+\{1-A_1(t_0)\}H(t_0)]A'_2(t)}{A_1(t)A_2(t)-\{1-A_1(t)\}\{1-A_2(t)\}H(t_0)}}{\dfrac{[A_1(t_0)+\{1-A_1(t_0)\}H(t_0)]A'_2(t_0)}{A_1(t_0)A_2(t)-\{1-A_1(t_0)\}\{1-A_2(t)\}H(t_0)}}\right]$$

$$=\frac{[A_1(t_0)+\{1-A_1(t_0)\}H(t_0)]A'_2(t_0)}{[A_2(t_0)+\{1-A_2(t_0)\}H(t_0)]A_1(t_0)+[A'_1(t_0)+\{1-A_1(t_0)\}H(t_0)]A'_2(t_0)}>0 .$$

したがって 適当な $s\in(t_0,z)$ が存在して

$$\frac{[A_1(t_0)+\{1-A_1(t_0)\}H(t_0)]A'_2(t)}{A_1(t)A_2(t)-\{1-A_1(t)\}\{1-A_2(t)\}H(t_0)}$$

$$\geqq \frac{1}{2}\cdot\frac{[A_1(t_0)+\{1-A_1(t_0)\}H(t_0)]A'_2(t_0)}{[A_2(t_0)+\{1-A_2(t_0)\}H(t_0)]A'_1(t_0)+[A_1(t_0)+\{1-A_1(t_0)\}H(t_0)]A'_2(t_0)}$$

$$\times \frac{[A_1(t_0)+\{1-A_1(t_0)\}H(t_0)]A_2'(t_0)}{A_1(t_0)A_2(t)-\{1-A_1(t_0)\}\{1-A_2(t)\}H(t_0)}$$
for any $t\in(t_0, s)$.

かくして 次の結果を得る:

$$\int_{t_0}^{z}\frac{[A_i(t)+\{1-A_i(t)\}H(t)]A_{3-i}'(t)}{A_1(t)A_2(t)-\{1-A_1(t)\}\{1-A_2(t)\}H(t)}dt$$

$$\geqq \frac{1}{2}\cdot\frac{[A_1(t_0)+\{1-A_1(t_0)\}H(t_0)]A_2'(t_0)}{[A_2(t_0)+\{1-A_2(t_0)\}H(t_0)]A_1'(t_0)+[A_1(t_0)+\{1-A_1(t_0)\}H(t_0)]A_2'(t_0)}$$

$$\times \log\left[\frac{A_1(t_0)A_2(s)-\{1-A_1(t_0)\}\{1-A_2(s)\}H(t_0)}{A_1(t_0)A_2(t_0)-\{1-A_1(t_0)\}\{1-A_2(t_0)\}H(t_0)}\right]=\infty.$$

積分は $\ell \downarrow t_0$ にしたがって単調に増加するので Lemma 1 は証明された。▨

Lemma 1 より, 任意に固定された $\alpha\in[0,1)$ と $\beta\in[0,1)$ に対して $a\in[0,1]$ についての方程式

$$F(1-0)=\int_a^1 f(t)dt=1-\alpha \ ; \quad G(1-0)=\int_a^1 g(t)dt=1-\beta$$

の各々は 区間 $(t_0,1)$ で唯1つの根をもつことがわかる.

かくして 次のような2つの cdf々 を考える:

$$F^*(x)=\int_a^x \theta_1(t)U_1(t|a)dt+\alpha I_1(x), \quad a\leqq x\leqq 1 \ ;$$

$$G^*(y)=\int_a^y \theta_2(t)U_2(t|a)dt+\beta I_1(y), \quad a\leqq y\leqq 1,$$

ここに $I_1(z)$ は点 $z=1$ における unit-step function であり, α と β は 方程式

$$\int_a^1 \theta_1(t)\, U_1(t|a)\,dt = 1 \quad ; \quad \int_a^1 \theta_2(t)\, U_2(t|a)\,dt = 1$$

の根のうちの小さくない根より大きい任意の a に対して

$$\alpha = 1 - \int_a^1 \theta_1(t)\, U_1(t|a)\,dt \quad ; \quad \beta = 1 - \int_a^1 \theta_2(t)\, U_2(t|a)\,dt$$

で与えられる.

そうすると

$$M_1(x, G^*) = \begin{cases} A_1(x) \leqq A_1(a) & 0 \leqq x < a \\ M_1(a, G^*) = A_1(a) = v_1 & a < x < 1 ; \\ M_1(1-0, G^*) - \beta\{1 - \Phi_1(1)\} = v_1 - \beta\{1 - \Phi_1(1)\}, & x = 1 \end{cases}$$

$$M_2(F^*, y) = \begin{cases} A_2(y) \leqq A_2(a) & 0 \leqq y < a \\ M_2(F^*, a) = A_2(a) = v_2 & a < y < 1 \\ M_2(F^*, 1-0) - \alpha\{1 - \Phi_2(1)\} = v_2 - \alpha\{1 - \Phi_2(1)\}, & y = 1. \end{cases}$$

$\Phi_1(1) < 1$ かつ $\Phi_2(1) < 1$ より $\alpha\beta = 0$ とすると (F^*, G^*) は 1つの平衡点となる.

Theorem 1. t_0 を方程式 $A_1(t)A_2(t) - \{1 - A_1(t)\}\{1 - A_2(t)\}H(t) = 0$ の区間 $[0, 1]$ における最大根とし, a_1 と a_2 をそれぞれ a についての方程式

$$\int_a^1 \theta_1(t)\, U_1(t|a)\,dt = 1 \quad ; \quad \int_a^1 \theta_2(t)\, U_2(t|a)\,dt = 1$$

の区間 $(t_0, 1]$ における唯一根とする. さらに $a = \max(a_1, a_2)$ とおく. そうすると

非0和 game (2) と (3) の平衡点 (F^*, G^*) は以下のような分布関数で与えられる：

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq x < a \\ \int_a^x \theta_1(t) U_1(t|a)\,dt + \alpha I_1(x), & a \leqq x \leqq 1 \end{cases};$$

$$G^*(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq y < a \\ \int_a^y \theta_2(t) U_2(t|a)\,dt + \beta I_1(y), & a \leqq y \leqq 1 \end{cases},$$

ここに $I_1(z)$ は $z=1$ での unit-step function であり，mass parts α と β は

$$\alpha = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-F^*(1-0)>0 \end{Bmatrix} \text{ and } \beta = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-G^*(1-0)>0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{if } a = \begin{Bmatrix} a_1 > a_2 \\ a_1 = a_2 \\ a_2 > a_1 \end{Bmatrix}$$

によって決められる.

また the equilibrium values v_1^* and v_2^* は

$$v_1^* = A_1(a) \quad ; \quad v_2^* = A_2(a)$$

で与えられる.

注(i) $\Phi_1(1)=1$; $\Phi_2(1)=1$ とすると この game の平衡点は無数に存在する. すなわち b を $[a, 1)$ 内にお

ける勝手な数とすると

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & 0\leqq x<b \\ \int_b^x \theta_1(t)U_1(t|b)dt+\alpha I_1(x), & b\leqq x\leqq 1\end{cases};$$

$$G^*(y)=\begin{cases}0, & 0\leqq y<b \\ \int_b^y \theta_2(t)U_2(t|b)dt+\beta I_1(y), & b\leqq y\leqq 1\end{cases}$$

によって構成される(F^*, G^*)はすべて平衡点となる。さらに $b=a$ の時をのぞいて $\alpha>0$ and $\beta>0$。そしてこの時

$$v_1^*=A_1(b)\ ;\quad v_2^*=A_2(b).$$

注(ii) $H(t_0)=1$ の時 $\inf\{a\,|\int_a^1\theta_i(t)U_i(t|a)dt=1,\ a\in[t_0,1]\}$ を考えることにより $a=a_1=a_2=t$ となり

$$\lim_{a\downarrow t_0}F^*(z)=\lim_{a\downarrow t_0}G^*(z)=\begin{cases}0, & z<t_0 \\ 1, & z\geqq t_0\end{cases}$$

を得る。そしてこの場合の t_0 は $A_1(t)+A_2(t)=1$ の $[0,1]$ における唯一根である。したがって上記の2つの戦略の組は noisy duel における saddle point と一致する (Dresher, Fox and Kimeldorf, and Karlin)。しかしながら、ここで考えている問題への平衡純戦略の組となりうるのは $\Phi_1(t_0)=A_1(t_0)$ かつ $\Phi_2(t_0)=A_2(t_0)$ の時のみであり、一般的には ε-equilibrium strategy の基本的部分を構成する形となる (Sakaguchi)。またこの時

$$v_1^*=A_1(t_0)\ ;\quad v_2^*=A_2(t_0).$$

§5. 非確率的移行への展開

前節までの結果の特別な場合として

$$H(t)=\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\quad \text{for}\quad t\begin{Bmatrix}<\\ \geqq\end{Bmatrix}m$$

の場合 すなわち 非確率的移行の場合を考える。ここで自明な場合を除くため $m>t_N$ を仮定する。t_N は $A_1(t)+A_2(t)=1$ の $[0,1]$ における唯一根である。

Corollary 1. a_1 と a_2 をそれぞれ方程式

$$\int_a^m \frac{A_2'(x)}{A_1(x)\{A_2(x)\}^2}dx+\frac{1}{A_2(m)}\left[1-e^{-\int_m^1\frac{A_2'(x)}{A_1(x)+A_2(x)-1}dx}\right]=\frac{1}{A_2(a)};$$

$$\int_a^m \frac{A_1'(y)}{A_2(y)\{A_1(y)\}^2}dy+\frac{1}{A_1(m)}\left[1-e^{-\int_m^1\frac{A_1'(y)}{A_1(y)+A_2(y)-1}dy}\right]=\frac{1}{A_1(a)}$$

の区間 $[0,m]$ における唯一根とし $a=\max(a_1,a_2)$ とする．そうすると non-stochastic case におけるこの game の平衡点 (F°, G°) は以下のような cdf で与えられる：

$$F^\circ(x)=\begin{cases}0, & 0\leqq x<a\\ \int_a^x f_a(t)dt, & a\leqq x<m;\\ \int_a^m f_a(t)dt+\left[F_n\right]_m^x+\alpha I_1(x), & m\leqq x\leqq 1\end{cases}$$

$$G^{\circ}(y)=\begin{cases}0, & 0\leqq y<a\\ \int_a^y g_s(t)dt, & a\leqq y<m\\ \int_a^m g_s(t)dt+[G_n]_m^y+\beta I_1(y), & m\leqq y\leqq 1,\end{cases}$$

ここに

$$f_s(t)=\frac{A_2(a)A_2'(t)}{A_1(t)\{A_2(t)\}^2}\quad,\quad g_s(t)=\frac{A_1(a)A_1'(t)}{A_2(t)\{A_1(t)\}^2},$$

$$[F_n]_m^x=\frac{A_2(a)}{A_2(m)}\left[1-e^{-\int_m^x\frac{A_2'(t)}{A_1(t)+A_2(t)-1}dt}\right],$$

$$[G_n]_m^y=\frac{A_1(a)}{A_1(m)}\left[1-e^{-\int_m^y\frac{A_1'(t)}{A_1(t)+A_2(t)-1}dt}\right]$$

であり，$I_1(z)$は $z=1$ での unit-step function，αとβは

$$\alpha=\begin{Bmatrix}0\\0\\1-F^{\circ}(1-0)\end{Bmatrix}\text{ and }\beta=\begin{Bmatrix}1-G^{\circ}(1-0)\\0\\0\end{Bmatrix}\text{ if } a=\begin{Bmatrix}a_1>a_2\\a_1=a_2\\a_2>a_1\end{Bmatrix}$$

となる。ⅠとⅡへの平衡値 v_1° と v_2° はそれぞれ

$$v_1^{\circ}=A_1(a)\quad;\quad v_2^{\circ}=A_2(a)$$

で与えられる。

注(i)　$m=1$ とおくと Silent Marksmanship Contest の結果と一致する（Sakaguchi [1978], and Teraoka [1983, 1984]）。

注(ii)　このgameのexpected payoff kernelsは

$$M_1(x,y)=\begin{cases} A_1(x), & x<y \\ \Phi_1(x), & x=y \\ \{1-A_2(y)\}A_1(x), & y<\min(x,m) \\ 1-A_2(y), & m<y<x \end{cases};$$

$$M_2(x,y)=\begin{cases} A_2(y), & y<x \\ \Phi_2(y), & y=x \\ \{1-A_1(x)\}A_2(y), & x<\min(y,m) \\ 1-A_1(x), & m<x<y \end{cases}$$

となる。Corollary Iは上記のgameの平衡点を与えたことになっている。

注(iii)　最も簡単な例として $A_1(t)=A_2(t)=t$ の時を考えると，次の結果を得る：

aを方程式

$$\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a}-\frac{1}{m^2}+\frac{2}{m}\{1-\sqrt{2m-1}\}=0$$

の $[0,m]$ における唯一根，すなわち

$$a=\frac{1}{1+\sqrt{\left(1-\frac{1}{m}\right)^2+\frac{2}{m}\sqrt{2m-1}}}$$

とする。

そうすると $\alpha=\beta=0$ となり

$$F^0(z)=G^0(z)=\begin{cases} 0, & 0\leqq z<a \\ \dfrac{a}{2}\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{z^2}\right), & a\leqq z<m \\ \dfrac{a}{2}\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{m^2}\right)+\dfrac{a}{m}\left(1-\sqrt{\dfrac{2m-1}{2z-1}}\right), & m\leqq z\leqq 1 \end{cases}$$

が得られる．さらに

$$v_1^0=v_2^0=a$$

も得られる．

いくつかの $m\,(\geqq 0.5)$ に対する v_i^0 と a の値を求めると下表のようになる．

m	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$v_i^0,\ a$	0.5000	0.4182	0.4148	0.4143	0.4142	0.4142

§6．最後に

本報告で紹介した問題は，筆者が，インド統計研究所デリーセンター（Indian Statistical Institue, Delhi Centre）の S. K. Mitra 教授の御好意により，1985年8月初から同年11月初まで インド統計研究所 デリーセンター に客員準教授として招へいされていた時，同研究所内における T. Parthasarathy 教授グループ談話会での議論の際思いついたものである．帰国後 直ちに取りかかるべきであったも

のを 筆者の怠慢により今日に至って発表する形になってしまった．インド統計研究所デリーセンターの大学院生にタイミング・ゲームの講義をする機会を与えて下さった S.K. Mitra 教授と T. Parthasarathy 教授に感謝の気持を表わすと共に，今日までこの仕事を発表できる形にしなかった怠慢を深くおわび申し上げたい．

最後に 筆者を大学院時代から今日まで激励して下さり，決定過程論とその応用の分野で輝かしい業績をあげておられる 大阪大学の坂口実教授に感謝の気持を表わします．

REFERENCES

Dresher, M.: Games of Strategy: Theory and Applications, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1954.

Fox, M. and G. Kimeldorf: Noisy Duels, SIAM J. Appl. Math. 17, 1969, 353-361.

Karlin, S.: Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics, II, Addison-Wesley, Massachusetts, 1959.

Sakaguchi, M.: Marksmanship Contests - Nonzero Sum Game of Timing, Math. Japonica 22, 1978, 585-596.

Sweat, C.: A Single-Shot Noisy Duel with Detection Uncertainty, Operations Research 19, 1971, 170-181.

Teraoka, Y.: Noisy Duel with Uncertain Existence of the Shot, Int. Journal of Game Theory 5, 1976, 239-249.

Teraoka, Y.: A Single-Bullet Duel with Uncertain Information Available to the Duelists, Bull. of Math. Stat. 18, 1979, 69-83.

Teraoka, Y.: A Two Person Game of Timing with Random Termination, Journ. Optimization Theory and Appl. 40, 1983, 379-396.

Teraoka, Y.: On the Simple N-Person Games of Timing with Random Termination, Journ. Information & Optimi. Scien. 5, 1984 269-278.

Teraoka, Y.: Silent-Noisy Marksmanship Contest with Random Termination, Journ. Optimization Theory and Appl. 49, 1986, 477-487.