数理解析研究所講究録
第611巻 1987年 144-157

Banach空間における最適化問題に対する２次の必要条件（包絡線との関係）

九大・理　川崎英文　(Hidefumi Kawasaki)

1. 序

変分法　最適制御　Chebyshev近似等に表れる多くの問題が，一般化された等式・不等式制約をもつ　関数空間における最小化問題

(P)　minimize $f(x)$ s.t. $g(x) \in K$, $h(x) = 0$,

として定式化される。　ここで　X, V, W　は　Banach空間　K　は内部が空でない閉凸錐　$f:X \to \mathbb{R}$, $g:X \to V$, $h:X \to W$　は　C^2-class　とする。制約条件　$h(x) = 0$　は　等周問題等にあらわれる有限個の制約条件や、最適制御問題における微分方程式条件の一般化である。また、制約条件　$g(x) \leqq 0$　は最適制御問題における　phase constraint

$$g(x(t), t) \leqq 0 \quad \text{foa all} \quad t$$

の一般化であり、さらに後で述べる　Chevyshev近似問題　Sup-型関数の最小化問題の一般化になっている。

昨年の講演で　問題(P)の局所最小解にたいする二次の必要

条件を与えた。我々の必要条件は 通常のLagrange関数の二階微分の外に新しい項を含む。本講演では その項が包絡線の二階微分と密接な関係を持つことを示す。

2.二次の必要条件

制約付き最小化問題に対する一次の最適性条件を導く基本的な考え方は次の通りである。まず x を問題(P)の許容解としよう、このとき x を端点に持つ半直線

$$x + ty, \quad t > 0$$

を考える、ここで y は $\mathbb{R}^{n+1}$ の要素である。もし x が(P)の局所最小解ならば、いかなる y に対しても

$$f(x+ty) < 0, \quad g(x+ty) \in K, \quad h(x+ty) = 0,$$

を満たす十分小さな $t > 0$ は存在しない。この条件は微分を用いて、

$$f'(x)y < 0, \quad g'(x)y \in \overline{\mathrm{cone}}(K-g(x)), \quad h'(x)y = 0, \qquad (1)$$

を満たす y は存在しない、と表される。ただし、$\overline{\mathrm{cone}}A$ は closed conical hull of A を表す。一次の最適性条件では判定できない方向として critical direction を考えなければならない。

定義1 次の条件を満たす $y \in X$ を $x \in X$ における

critical direction と呼ぶ。

$$f'(x)y = 0,\ g'(x)y \in \overline{\text{cone}}(K-g(x)),\ h'(x)y = 0.$$

大ざっぱに言えば critical direction とは、その方向に少し進んでも 一次のオーダーで制約条件を満たしかつ目的関数値が変化しない方向である。この様な方向に対しては、二次の曲線

$$x + ty + t^2z/2,\quad t > 0$$

を考える必要がある、ただし y は $\mathbb{R}^n$ の任意の方向とする。そこで y を critical direction としよう。このとき

$$f(x + ty + t^2z/2) < 0,$$

$$g(x + ty + t^2z/2) \in K,$$

$$h(x + ty + t^2z/2) = 0,$$

を満たす十分小さな $t > 0$ は存在しない。これらの条件を(1)式の様に関数の一次・二次微分で表そうとすると次の集合が必要になる。

定義２ $u, v \in V$ に対し

$$K(u,v) := \bigcup_{\delta(\ )} \bigcap_{s>0} \left(K - \frac{u}{s^2} - \frac{v}{s} + \delta(s)B \right)$$

とおく、ただし B は V の単位球 $\delta(\ )$ は次の条件を満たす関数である。

$$\delta(s) \geq 0 \quad \text{for all } s > 0, \quad \delta(s) \to 0 \quad \text{as} \quad s \to +0.$$

特に $K(y) := K(g(x), g'(x)y)$ と置く.

ところで、最適性条件を関数の一次・二次微分で表そうとするとき、集合 $\{\ y;\ g'(x)y \in \overline{\mathrm{cone}}(K-g(x)),\ h'(x)y = 0\ \}$ が許容集合 $\{\ x;\ g(x) \leqq 0,\ h(x) = 0\ \}$ の良い近似になることを保証しておく必要がある。このことを保証する様々な条件があるが、それらは通常 Constraint Qualification, Regularity Condition 等と呼ばれる。次に挙げる条件は最初 Mangasarian-Fromovitz により有限次元空間における最適化問題に対して与えられた条件の一般化である。

定義3 (see[3]) 制約システム $g(x) \in K,\ h(x) = 0$ が x で Mngasarian-Fromovitzの条件を満たすとは

(i) $h'(x)$ is onto,

(ii) $\exists\, z \in X$ s.t. $g(x) + g'(x)z \in \mathrm{int}\, K,\ h'(x)z = 0.$

問題(P)にたいする二次の必要条件は次の通りである。

定理1　x を (P) の局所最小解とし x で Mangasarian-Fromovitzの条件が満たされるとしよう。このとき $K(y) \neq \phi$ なる各 critical direction y に対して ある $v^* \in K^-$, $w^* \in W^*$ が存在して

$f'(x) + g'(x)^* v^* + h'(x)^* w^* = 0$, (1次の必要条件)

$f''(x)(y,y) + \langle v^*, g''(x)(y,y)\rangle + \langle w^*, h''(x)(y,y)\rangle +$

$-2\delta^*(v^* \mid K(y)) \geq 0$,　(2次の必要条件)

$\langle v^*, g(x)\rangle = 0$,　$\langle v^*, g'(x)y\rangle = 0$,　(相補性)

ただし K^- は polar cone $\{ v^* \in V; \langle v^*, v\rangle \leq 0, \forall v \in K \}$, $\delta^*(v^* \mid K(y)) = \sup\{ \langle v^*, v\rangle; v \in K(y) \}$.

ここで一般に $\delta^*(v^* \mid K(y)) \leq 0$ が成立する事を注意しておく。そこで、新たに導入された項 $\delta^*(v^* \mid K(y))$ の意味を Sup-型関数の最小化問題に定理を適用することにより解明していこう。我々が取り扱う問題は

(S_0) minimize $S(x) := \sup \{ f(x,t); t \in I \}$, $x \in \mathbb{R}^n$

ここで $I = [0,1]$, f は x に関し C^2-class, t に関し連続とする。このとき 問題(S_0)は 次の様な 一般化された不等式制約をもつ Banach空間における最小化問題としてとらえられる。

(S) minimize r s.t. $re - F(x) \in K$, $(x,r) \in \mathbb{R}^{n+1}$

ただし $K := \{ u \in C(I);\ u(t) \geqq 0 \quad \forall t \}$, $e(t) \equiv 1$, $F(x)(t) := f(x, t)$.

問題(S)がMangasarian-Fromovitzの条件を満たすことは容易に分かる。さらに $(y, q) \in \mathbb{R}^{n+1}$ が critical direction であるための必要十分条件は

$$q = 0, \qquad S'(x;y) = 0,$$

が成立することである。ただし $S'(x;y)$ は S の x における y 方向への方向微分を表す。

ところで、$K(u, v)$ を定義から直接計算することは一般には困難である。そこで $K(u, v)$ の特徴付定理を与える。

定理2 $u, v \in C(I)$ が $u(t) \geqq 0$ for all $t \in I$, $v(t) \geqq 0$ for all t with $u(t) = 0$, を満たすとしよう。このとき w が $K(u, v)$ の要素であるための必要十分条件は

$$w(t) \geqq 0 \quad \text{for all } t \text{ satisfying } u(t) = v(t) = 0$$

$$w(t) \geqq \limsup v(t_n)^2 / 4u(t_n)$$

$$\text{for all } t \text{ and } t_n \text{ satisfying}$$

$$t_n \to t \text{ and } -v(t_n)/u(t_n) \to +\infty \text{ as } n \to +\infty. \qquad (2)$$

簡単のため 次の記号を導入する。

$I_\emptyset := \{\ t;\ \exists\, t_n\ \ \text{satisfying}\ \ (2)\ \}$

$$E(t) := \begin{cases} \sup\{\ \limsup v(t_n)^2/4u(t_n);\ t_n\ \ \text{satisfies}\ (2)\} & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{if}\quad t \in I_\emptyset, & (3.a) \\ 0,\quad \text{if}\quad u(t) = v(t) = 0\ \ \text{and}\ \ t \notin I_\emptyset, & (3.b) \\ -\infty\ ,\quad \text{otherwise.} & (3.c) \end{cases}$$

このとき　定理２は次のように簡単に表される。

$$w \in K(u,v) \iff w(t) \geq E(t) \quad \text{for all}\ \ t.$$

問題(S)に対する二次の必要条件は次の通りである。

定理３　x を (S) の局所最小解としよう。このとき $K(y) \neq \phi$ を満たす各 critical direction y に対してたかだか $n+1$ 個の点 $\tau_1, \cdots, \tau_{n+1} \in I(x;y)$ と乗数 $\lambda_i \geq 0$ が存在して

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1$$

$$\Sigma \lambda_i\, \partial f(x, \tau_i)/\partial x_j = 0, \quad j = 1, \ \ , n,$$

$$\Sigma \lambda_i \{\ (f''(x)(y,y))(\tau_i) + 2E(\tau_i)\} \geq 0,$$

ただし E は $u := S(x)e - f(x)$, $v := -f'(x)y$ を用いて(3)により定義される関数 $I(x;y) := \{\ t;\ u(t) = v(t) = 0\ \}$ である。

通常の二次の必要条件と我々の条件との大きな違いは　新しい項　$2E(t)$　の存在である。この項の意味を調べるためにSup-型関数の二次の方向微分を導入する。

定義４　　The upper second directional derivative of $S(x)$ at x in the direction y は次の式で定義される。

$$\overline{S}''(x;y) := \limsup_{\theta \to +0} \{S(x+\theta y) - S(x) - \theta S'(x;y)\}/\theta^2$$

以下に於て　$f(x,t)$　として　affine function　を考えよう。即ち

$$f(x,t) = \langle a(t), x\rangle + b(t), \quad a(t) \in \mathbb{R}^n, \quad b(t) \in \mathbb{R}.$$

このとき、新しい項　$E(t)$　は　$\overline{S}''(x;y)$　を表すことが分かる。正確に述べるとつぎのようになる。

定理４　　x　を任意の点　y　を任意の方向としよう。このとき次の関係式が成立する。

$$\overline{S}''(x;y) = \max\{\, E(t);\ t \in I(x;y) \,\}.$$

ただし、$I(x) = \{\, t \in I;\ S(x) = f(x,t) \,\}$, $I(x;y) = \{\, t \in I(x);\ S'(x;y) = (f'(x)y)(t) \,\}$　であり、u, v　は次式で与えられる。

$$u(t) := f(x, t^*) - f(x, t)$$

$$v(t) := (f'(x)y)(t^*) - (f'(x)y)(t)$$

ここで、 t^* は $I(x;y)$ の任意の点とする。

次に、三つの例で、定理４の結果を検討しよう。
先ず最初に、直線群より放物線が生成される例を挙げる。

例１　$f(x,t) = 2tx - t^2$, $I = [-1, 1]$. このとき
$S(x) = x^2$, $S'(x;y) = 2xy$, $S''(x;y) = y^2$ $\forall x \in (-1, 1)$.
そこで $x^* = 0$, $y > 0$ をとると
$u(t) := S(0) - f(0,t) = t^2$, $v(t) = -(f'(0)y)(t) = -2ty$
であるから 条件(2)は

$$t = 0, \quad t_n \to +0$$

と書き下される。このような t_n にたいして

$$\lim v(t_n)^2/4u(t_n) = y^2$$

であるから

$$I(0;y) = \{ 0 \},$$

$$K(u,v) = \{ w \in C(I);\ w(0) \geq y^2 \},$$

$$S''(0;y) = y^2 = E(0).$$

$y < 0$ に対しても全く同様の事が成り立つ。

次に、包絡線が生成されない例を与えよう。この例において、新しい項 $E(t)$ はゼロになることがわかる。

例２　$f(x,t) = tx - t,\quad I = [0,1]$. このとき

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \leqq 1, \\ x - 1, & \text{if } x > 1. \end{cases}$$

したがって

$$S'(0;y) = 0, \quad S''(0;y) = 0 \quad \text{for all } y.$$

そこで $x^{*} = 0,\ y \neq 0$ をとると

$u(t) := S(0) - f(0,t) = t,\quad v(t) = -(f'(0)y)(t) = -ty$

であるから条件(2)を満たす $t,\ t_n$ は存在しない。さらに $I(x;y) = \{0\}$ であるから

$$K(u,v) = \{ w \in C(I);\ w(0) \geqq 0 \},$$

$$S''(0;y) = 0 = E(0).$$

最後に、包絡線は生成されるが、その二次の方向微分が $+\infty$ となる例を挙げよう。

例３　$f(x,t) = 3tx - t^3,\quad I = [0,1]$. このとき

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \leqq 0, \\ 2x\sqrt{x}, & \text{if } 0 < x \leqq 1, \end{cases}$$

$$\left\lfloor\ 3x - 1, \quad \text{if} \quad x > 1. \right.$$

そこで　$x^{\cdot} = 0 \quad y > 0$　をとると

$$S'(0;y) = 0, \quad S''(0;y) = +\infty,$$

が成立する。また

$$u(t) := S(0) - f(0,t) = t, \quad v(t) = -(f'(0)y)(t) = -3ty$$

であるから　条件(2)は

$$t = 0, \quad t_n \to +0$$

と書き下される。このような　t_n　にたいして

$$\lim v(t_n)^2/4u(t_n) = +\infty$$

であるから

$$I(0;y) = \{\ 0\ \},$$

$$K(u,v) = \{\ w \in C(I);\quad w(0) \geqq +\infty\ \} = \phi,$$

$$S''(0;y) = +\infty = E(0).$$

定理3において、我々は

$$K(y) \neq \phi$$

という条件を仮定した。ところが、定理2　定理4によればこの条件は

$$\overline{S}''(x;y) < +\infty$$

と同値である。つまり定理3が無力になるのは　$S(x)$　の二次の方向微分が無限大になる方向だけである。この意味にお

いて 上の仮定はさほど制限的ではない。したがって より一般的な問題(P)に対する必要条件を与えた定理1においても 仮定

$$K(y) \neq \phi$$

は制限的ではないと考えられる。

3.結び

我々の知る限りにおいては 新しい項

$$\delta^*(v^* \mid K(y))$$

を用いた二次の最適性条件を与えた文献は本稿が最初である。この項が無限個の不等式系に対して本質的な役割を果たし必要不可欠であることは既に述べてきたように明かである。我々が主に参考にした論文 Ben-Tal, Zowe[1] では、K(u, v) の代わりに

$$\overline{\text{cone}}\ (\text{cone}\ (K - u) - v)$$

を用いたため critical direction y に対して本質的でない仮定を設けなければならなかった。そのため、包絡線が生成される方向に対しては必要条件を与えることが出来なかった。また、表面上は我々の条件 $K(y) \neq \phi$ を仮定していないように見えるが、この条件が満たされない方向に対しては何も述べられてはいないことが容易に分かる。

最後に、無限個の等式制約や有限個の不等式制約に対しては本稿で述べた現象が現れないことを注意しておく。
無限次元空間における最適化問題に対する二次の最適性条件を一般的に取り扱った論文をいくつか参考文献として挙げておく。

4.参考文献

[1] A.Ben-Tal and J.Zowe, "A unified theory of first and second order conditions for extremum problems in topological vector spaces", Mathematical Programming Study 19 (1982) 39-76.

[2] A.Ben-Tal, "Second order theory of extremum problems", in A.V.Fiacco and K.Kortanek, eds., Extrmal methods and system analysis(Springer,Berlin,1980) 336-356.

[3] H.Maurer, "First and second order sufficient optimality conditions in mathematical programming and optimal control", Mathematical Programming Study 14 (1981) 163-177.

[4] H.Maurer and J.Zowe, "First and second-order necessary and sufficient optimality conditions for

infinite-dimensional programming problems", Mathematical Programming Study 16 (1979) 98-110.

[5] K.H.Hoffman and H.J.Kornstadt, "Higher-order necessary conditions in abstract mathematical programming", Journal of Optimization Thory and Applications 26 (1978) 533-569.

[6] A.D.Ioffe, "Necessary and sufficient conditions for a local minimum. 3 : Second order conditions and augmented duality", SIAM Journal on Control and Optimization 17 (1979) 266-288.