数理解析研究所講究録
第611巻 1987年 201-215

確率密度関数の逐次推定について

新潟大・理　磯貝英一　(Eiichi Isogai)

§1. 序

ノンパラメトリックな確率密度関数の推定において，一定幅の信頼区間を逐次的に求める問題は Carroll [1] によって研究された。彼は2つの型の停止規則を導入してこの問題を扱っている。第1の停止規則は Chow and Robbins [2] が平均を推定する問題に対して提案した規則の考え方に基づき，第2のそれは，たとえば メディアンを求める問題における Sen and Ghosh [7] の方法に類似している。Carroll [1] は，これらの停止規則を用いて区間の幅が十分小さいときの漸近的性質を調べている。すなわち，与えられた信頼係数の信頼区間を求め，その信頼区間を得るのに必要な標本の大きさについて，その平均および漸近正規性も示している。Stute [8] は第2の型の規則を，筆者 [4] は第1の型の規則を用いて Carroll と同様の問題を考えている。特に筆者 [6] は信頼区間

に属する確率が与えられた信頼係数に近づく速さについて論じた。

本報告では良く知られた逐次推定量を用いて，筆者［4］で与えられた規則を若干修正してその規則の漸近的性質を調べることにする。

§2. 準備

$\{X_n, n \geqq 1\}$ はある確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上で定義された p 次元ユークリッド空間 R^p に値をとる独立で同一分布に従う確率ベクトル列でルベーグ測度に関した，未知で有界な確率密度関数 $f(x)$ をもつとする。$f(x)$ の推定量として良く知られた次の逐次推定量 $f_n(x)$ を考える。

$$f_0(x) \equiv 0$$

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} K_j(x, X_j) \qquad (n \geqq 1) \tag{2.1}$$

ただし

$$K_n(x, y) = h_n^{-p} K\left(\frac{x-y}{h_n}\right) \qquad x, y \in R^p$$

$K(x)$ は R^p 上の有界な実数値ボレル可測関数で次をみたすとする。

(K1) $\displaystyle\int_{R^p} |K(u)|du < \infty$ かつ $\displaystyle\int_{R^p} K(u)du = 1$

(K2) $\|u\|^p |K(u)| \longrightarrow 0$ as $\|u\| \longrightarrow \infty$

ここに $\|\cdot\|$ は R^p 上のユークリッドノルムである。

$\{h_n, n \geqq 1\}$ は正数列で次の条件のいくつか又はすべてをみたすとする。

(H1) $h_n \downarrow 0$ as $n \to \infty$

(H2) $n h_n^p \uparrow \infty$ as $n \to \infty$

(H3) $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 h_n^p)^{-1} < \infty$

(H4) $n h_n^{p+2} (\log n)^2 \to 0$ as $n \to \infty$

(H5) $\dfrac{h_n^p}{n} \sum_{j=1}^{n} h_j^{-p} \to \beta$ as $n \to \infty$ for some $\beta \in (0, \infty)$

(H6) $\dfrac{\log n}{n h_n^p} \to 0$ as $n \to \infty$

(H7) ${}^\forall \varepsilon > 0$ に対して ${}^\exists \delta > 0$ such that

$$\left| \frac{n}{m} - 1 \right| < \delta \Rightarrow \left| \frac{h_n}{h_m} - 1 \right| < \varepsilon$$

(註) (2.1) は次のように逐次的に書ける。

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) + \frac{1}{n} \{ K_n(x, X_n) - f_{n-1}(x) \}$$

以下では $C(f)$ は f の連続点のすべての集合を表わす。

<u>Lemma 2.1.</u> ([3])

(H1), (H3) がみたされているとする。このとき，任意の $x \in C(f)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{almost surely (a.s.)}$$

が成り立つ。

関数の滑らかさに関する条件を次で与える。

Definition 2.1.

$g(x)$ は R^p 上で定義された実数値関数とする。このとき，g は x において order 1 の局所的リプシッツであるとは次のことが成立することである。

$\exists$ 正定数 η と L (x に関係してもよい) s.t.

$$\|y - x\| < \eta \Rightarrow |g(y) - g(x)| \leq L\|y - x\| .$$

このような x のすべての集合を $S(g)$ と書くことにする。

明らかに　$S(g) \subset C(g)$.

$f_n(x)$ の漸近正規性は次で与えられる。

Lemma 2.2.

(H1), (H2), (H4), (H5) をみたし

(K3)　$\int_{R^p} \|u\| |K(u)| du < \infty$

がみたされると仮定する。このとき，$f(x) > 0$ となる任意の $x \in S(f)$ に対して

$$\sqrt{nh_n^p}\,(f_n(x) - f(x)) \xrightarrow[L]{} N(0, Bf(x)) \text{ as } n\to\infty \text{ (in law)}$$

が成り立つ。ただし　$B=\beta\int_{R^p}K^2(u)du\ (>0)$.

（証明）

$$Z_n \equiv K_n(x,X_n)-EK_n(x,X_n),\quad S_n\equiv\sum_{j=1}^{n}Z_j,\quad s_n^2\equiv\sum_{j=1}^{n}EZ_j^2$$

とおくと (2.1) より

$$\sqrt{nh_n^p}\,(f_n(x)-f(x))=\sqrt{\frac{s_n^2}{nh_n^{-p}}}\cdot\frac{S_n}{s_n}+\sqrt{\frac{h_n^p}{n}}\sum_{j=1}^{n}\{EK_j(x,X_j)-f(x)\}$$

計算により

$$\sqrt{\frac{s_n^2}{nh_n^{-p}}}\longrightarrow\sqrt{Bf(x)}\qquad\text{as }n\to\infty$$

$$\frac{S_n}{s_n}\xrightarrow[L]{}N(0,1),\ \sqrt{\frac{h_n^p}{n}}\sum_{j=1}^{n}\{EK_j(x,X_j)-f(x)\}\to 0\quad\text{as }n\to\infty$$

が示せるので，これらを合わせて結果が得られる。

（証終）

Lemma 2.2 で n の代りに正整数値をとる確率変数 $N(d)$ $(d>0)$ を用いたとき，同様の結果が得られることを示したのが次の Proposition である。

Proposition 2.1.

(H1), (H2), (H4), (H5), (H7) , (K1) ～ (K3) を仮定する。

各 $d>0$ に対して

$N(d)$ は $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上で定義された正整数値をとる確率変数 (i.e., 停止規則) で，$n(d)$ は正整数で $\lim_{d\downarrow 0} n(d) = \infty$ かつ

$$\frac{N(d)}{n(d)} \xrightarrow[P]{} 1 \quad \text{as } d\downarrow 0 \quad (\text{in probability})$$

をみたすとする。このとき，$f(x) > 0$ なる任意の $x \in S(f)$ に対して

$$\sqrt{N(d)h^p_{N(d)}}\left(f_{N(d)}(x) - f(x)\right) \xrightarrow[L]{} N(0, Bf(x)) \quad \text{as } d\downarrow 0$$

が成りたつ。ただし

$$B = \beta \int_{R^p} K^2(u)\,du \ (>0).$$

(証明)

$T_m \equiv f_m(x) - Ef_m(x)$ とおくと

$$\sqrt{Nh^p_N}\left(f_N(x) - f(x)\right)$$
$$= \sqrt{Nh^p_N}\left(T_N - T_n\right) + \sqrt{nh^p_n}\left(f_n(x) - f(x)\right)$$

(2.2) $$+\left(\sqrt{\frac{Nh^p_N}{nh^p_n}} - 1\right)\sqrt{nh^p_n}\left(f_n(x) - f(x)\right)$$

$$+\sqrt{\frac{h^p_N}{N}}\sum_{j=1}^{N}\{EK_j(x, X_j) - f(x)\} - \sqrt{Nh^p_N}\cdot\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\{EK_j(x, X_j) - f(x)\}$$

ただし $N = N(d)$, $n = n(d)$. Lemma 2.2 より

(2.3) $$\sqrt{nh^p_n}\left(f_n(x) - f(x)\right) \xrightarrow[L]{} N(0, Bf(x)) \quad \text{as } d\downarrow 0$$

(H7) と (2.3) より

(2.4) $$\left(\sqrt{\frac{Nh^p_N}{nh^p_n}} - 1\right)\sqrt{nh^p_n}\left(f_n(x) - f(x)\right) \xrightarrow[P]{} 0 \quad \text{as } d\downarrow 0$$

計算により

(2.5) $\sqrt{N h_N^p}\ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\{EK_j(x,X_j)-f(x)\} \xrightarrow[P]{} 0$ as $d\downarrow 0$

(2.6) $\sqrt{\frac{h_N^p}{N}}\ \sum_{j=1}^{N}\{EK_j(x,X_j)-f(x)\} \xrightarrow[P]{} 0$ as $d\downarrow 0$

[5] の Lemma 2.5 を用いて

(2.7) $\sqrt{N h_N^p}\ (T_N - T_n) \xrightarrow[P]{} 0$ as $d\downarrow 0$

従って (2.2) ~ (2.7) により結果が得られる。

(証終)

§3. 結果

この節では $K(x)\geq 0$ on R^p とし (K1) ~ (K3) がみたされると仮定する。任意に与えられた α $(0<\alpha<1)$ に対して

$\Phi(D)-\Phi(-D)=1-\alpha$ となる $D=D_\alpha>0$ をえらぶ。ただし

Φ は $N(0,1)$ の分布関数である。任意の $d>0$ に対して次のような停止規則 $N(d)$ を考える。

$$N=N(d)=\text{smallest } m\geq 1 \quad \text{s.t.}$$

$$(3.1)\qquad \frac{m h_m^p d^2}{D^2 B}\geq f_m(x)+\frac{1}{m}$$

ただし

$$B=\beta\int_{R^p}K^2(u)du\ (>0),$$ β は (H5) にある定数である。

（註）

[4] では

$$N = N(d) = \text{smallest } m \geq 1 \text{ s.t. } \frac{m h_m^p d^2}{D^2 B} \geq f_m(x) > 0$$

で $N(d)$ を定義した。

以下では $C_1, C_2, \cdots$ は正定数を表わすとする。

Lemma 3.1.

(H1) ~ (H4), (H6), (H7) を仮定する。このとき，$f(x) > 0$ なる任意の $x \in S(f)$ に対して

$$E\{N(d) h_{N(d)}^p\} < \infty \quad \text{for each } d > 0$$

（証明）

$^\forall d > 0$ を固定する。(H2), $N(d)$ の定義，Lemma 2.1 より $P\{N(d) < \infty\} = 1$ が成り立つ。

$$v(n) \equiv n h_n^p, \quad g(n) \equiv n h_n^p / f(x)$$

(3.2) $$b_\ell \equiv (E\{v(N(d)) I[2 \leq N(d) \leq \ell]\})^{\frac{1}{2}} \quad (\ell > 0)$$

とおく。ただし $I(\cdot)$ は indicator function である。

(3.1) などを用いて計算をすると

(3.3) $$\frac{b_\ell}{t} \leq C_1 + \frac{C_2 f(x)}{b_\ell} + \frac{C_3}{b_\ell^2} \quad \text{for large } \ell$$

が得られる。ここに $t = D^2 B d^{-2}$.

$b_\ell \uparrow$ as $\ell \uparrow$ だから $b_0 \equiv \lim_{\ell \to \infty} b_\ell \ (>0)$ とおくと (3.3) より

$$\frac{b_0}{t} \leqq c_1 + \frac{c_2 f(x)}{b_0} + \frac{c_3}{b_0^2}$$

$b_0 = \infty$ ならば $c_1 < \infty$ に矛盾するので $b_0 < \infty$。(3.2) より

$$b_\ell^2 / f(x) = E\{g(N(d)) I[2 \leqq N(d) \leqq \ell]\}$$

単調収束定理と $P\{N(d) < \infty\} = 1$ より

$$E\{g(N(d)) I[2 \leqq N(d) \leqq \ell]\} \longrightarrow E\{g(N(d)) I[2 \leqq N(d) < \infty]\} \quad \text{as } \ell \to \infty$$

$$= E\{g(N(d))\} - g(1) P\{N(d) = 1\}$$

従って

$$\infty > b_0^2 / f(x) = E\{g(N(d))\} - g(1) P\{N(d) = 1\}.$$

よって

$$E\{N(d) h^p_{N(d)}\} < \infty.$$

（証終）

(3.1) で与えられた停止規則 $N(d)$ の漸近的性質は次の定理で与えられる。

<u>Theorem 3.1.</u>

(H1) ～ (H4), (H6), (H7) を仮定する。このとき，$f(x) > 0$ なる任意の $x \in S(f)$ に対して

$$P\{N(d) < \infty\} = 1 \quad \text{for each } d > 0,$$

$$P\{N(d) \uparrow \infty \ \text{ as } d \downarrow 0\} = 1,$$

$$P\left\{ \frac{N(d) h_{N(d)}^{p} d^2}{D^2 B f(x)} \to 1 \text{ as } d \downarrow 0 \right\} = 1$$

かつ

$$(3.4) \qquad \lim_{d\downarrow 0} \frac{E\{N(d) h_{N(d)}^{p}\} d^2}{D^2 B f(x)} = 1$$

が成り立つ。

(証明)

$y_n \doteqdot (f_n(x) + \frac{1}{n})/f(x)$, $g(n) \doteqdot n h_n^p / f(x)$, $u(n) \doteqdot h_n^p / n$

$S_n \doteqdot \sum_{j=1}^{n} \{K_j(x, X_j) - E K_j(x, X_j)\}$, $W_n \doteqdot \sum_{j=1}^{n} \{E K_j(x, X_j) - f(x)\}$

$t \doteqdot D^2 B d^{-2}$

とおく。Lemma 2.1 より $y_n \to 1$ a.s. as $n \to \infty$. 従って [2] の Lemma 1 を用いて定理の前半3つの結果が得られる。(3.4) を示すことにする。

$y_n' \doteqdot \min\{1, y_n\}$ とおき

$N' = N'(d) =$ smallest $m \geq 1$ s.t. $y_m' \leq \frac{g(m)}{t}$

で N' を定義すると、N' と N の定義より $N' \leq N$ a.s.

[2] の Lemma 2 を用いて

$$\lim_{d\downarrow 0} \frac{E\{g(N')\}}{t} = 1$$

よって $g(n)$ の単調性より

$$1 = \lim_{d\downarrow 0} \frac{E\{g(N')\}}{t} \leq \lim_{d\downarrow 0} \frac{E\{g(N)\}}{t}$$

従って (3.4) を示すには

$$(3.5)\qquad \overline{\lim_{d\downarrow 0}}\ \frac{E\{g(N)\}}{t} \leqq 1$$

を示せば十分である。Nの定義，Lemma 3.1,

$$(3.6)\qquad \lim_{d\downarrow 0} E\{g(N)\} = \infty$$

を用いて

$$\overline{\lim_{d\downarrow 0}}\ \frac{E\{g(N)\}}{t} \leqq \overline{\lim_{d\downarrow 0}}\ \frac{E\{g(N)y_N\}}{E\{g(N)\}}$$

が示される。よって (3.5) を示すには

$$(3.7)\qquad \overline{\lim_{d\downarrow 0}}\ \frac{E\{g(N)y_N\}}{E\{g(N)\}} \leqq 1$$

を示せば十分である。計算により

$$f(x)E\{g(N)y_N\}$$

$$(3.8)\qquad = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}E\{\sqrt{g(N)u(N)}\,S_N\} + \frac{1}{\sqrt{f(x)}}E\{\sqrt{g(N)u(N)}\,W_N\}$$

$$+ f(x)E\{g(N)\} + \frac{1}{\sqrt{f(x)}}E\{\sqrt{g(N)u(N)}\}$$

Lemma 3.1, (3.6)などを用いて

$$(3.9)\qquad \overline{\lim_{d\downarrow 0}}\ E\{\sqrt{g(N)u(N)}\,W_N\}\big/E\{g(N)\} \leqq 0$$

$$(3.10)\qquad \lim_{d\downarrow 0} E\{\sqrt{g(N)u(N)}\}\big/E\{g(N)\} = 0$$

が得られる。シュワルツの不等式により

$$(3.11)\qquad |E\{\sqrt{g(N)u(N)}\,S_N\}|\big/E\{g(N)\} \leqq \left(E\{u(N)S_N^2\}\big/E\{g(N)\}\right)^{\frac{1}{2}}$$

任意の整数 $l \geqq 1$ に対して

$$T_l \equiv \min\{N, l\}\ (\leqq l)$$

とおくと，計算により

$$E\{u(T_\ell)S_{T_\ell}^2\} \leqq C_1(1+E\{\log T_\ell\})$$

が成立し，$T_\ell \uparrow N$ a.s. as $\ell\to\infty$，$P\{N<\infty\}=1$ を用いて $\ell\to\infty$ として

$$E\{u(N)S_N^2\} \leqq C_1(1+E\{\log N\}).$$

よって (3.6)，$E\{g(N)\}<\infty$ などを用いて

$$\lim_{d\downarrow 0} E\{u(N)S_N^2\}/E\{g(N)\} = 0 。$$

従って (3.11) より

(3.12) $$\lim_{d\downarrow 0} E\{\sqrt{g(N)u(N)}\,S_N\}/E\{g(N)\} = 0$$

故に (3.8), (3.9), (3.10), (3.12) より (3.7) が成立する。

（証終）

次の定理は $f(x)$ の漸近的な信頼区間を与えている。

Theorem 3.2.

(H1) ～ (H7) を仮定する。各 $d>0$ に対して正整数 $n(d)$ が存在して $\lim_{d\downarrow 0} n(d)=\infty$ かつ $\frac{N(d)}{n(d)} \xrightarrow[P]{} 1$ as $d\downarrow 0$ をみたすとする。このとき，$f(x)>0$ なる任意の $x\in S(f)$ に対して

$$\lim_{d\downarrow 0} P\{f(x)\in I_{N(d),d}(x)\} = 1-\alpha$$

が成り立つ。ただし $I_{n,d}(x)=[f_n(x)-d,\ f_n(x)+d]$。

（証明）

Proposition 2.1 と Theorem 3.1 より

$$d^{-1}D(f_{N(d)}(x)-f(x)) \xrightarrow[L]{} N(0,1) \quad \text{as } d \downarrow 0$$

よって

$$P\{f(x) \in I_{N(d),d}(x)\}$$
$$= P\{d^{-1}D(f_{N(d)}(x)-f(x)) \leqq D\} - P\{d^{-1}D(f_{N(d)}(x)-f(x)) < -D\}$$
$$\to 1-\alpha \quad \text{as } d \downarrow 0$$

（証終）

Corollary 3.1.

$$h_n = n^{-\frac{r}{p}} \quad \left(\frac{p}{p+2} < r < 1\right)$$

とおく。このとき，$f(x)>0$ なる任意の $x \in S(f)$ に対して

$$\lim_{d\downarrow 0} P\{f(x) \in I_{N(d),d}(x)\} = 1-\alpha$$

かつ

$$\lim_{d\downarrow 0} \frac{E\{(N(d))^{1-r}\}d^2}{D^2 B f(x)} = 1$$

が成り立つ。ただし

$$B = \frac{1}{1+r}\int_{R^p} K^2(u)\,du$$

（証明）

$\beta = (1+r)^{-1}$ として (H1) ～ (H7) がみたされる。

よって Theorem 3.1 より

$$\lim_{d \downarrow 0} \frac{N(d)}{(D^2 B f(x) d^{-2})^{\frac{1}{1-r}}} = 1 \quad a.s.$$

$n(d) \equiv [(D^2 B f(x) d^{-2})^{\frac{1}{1-r}}]$（$[a]$ は a を越えない最大整数を表わす）とおくと

$$\lim_{d \downarrow 0} n(d) = \infty \quad かつ \quad \lim_{d \downarrow 0} \frac{N(d)}{n(d)} = 1 \quad a.s.$$

が成り立つ。従って Theorems 3.1 and 3.2 より Corollary が成立する。

（証終）

References

[1] Carroll, R.J. (1976). On sequential density estimation. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 36, 137-151.

[2] Chow, Y.S., and Robbins, H. (1965). On the asymptotic theory of fixed-width sequential confidence intervals for the mean. Ann. Math. Statist. 36, 457-462.

[3] Isogai, E. (1980). Strong consistency and optimality of a sequential density estimator. Bull. Math. Statist. 19, 55-69.

[4] ________. (1981). Stopping rules for sequential density estimation. Bull. Math. Statist. 19, 53-67.

[5] ________. (1986). Asymptotic consistency of fixed-width sequential confidence intervals for a multiple regression function. Ann. Inst. Stat. Math. 38, 69-83.

[6] ________. (1987). The convergence rate of fixed-width sequential confidence intervals for a probability density function, to appear in Sequential Analysis.

[7] Sen, P.K., and Ghosh, M. (1971). On bounded length sequential confidence intervals based on one-sample rank order statistics. Ann. Math. Statist. 42, 189-203.

[8] Stute, W. (1983). Sequential fixed-width confidence intervals for a nonparametric density function. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 62, 113-123.