

ファインマングラフ及びファインマン振幅の自動生成

高エネルギー研 金子敏明 (Toshiaki Kaneko)

高エネルギー研 川端節彌 (Setsuya Kawabata)

高エネルギー研 清水韶光 (Yoshimitsu Simizu)

高エネルギー物理学では素粒子反応の断面積がファインマングラフを用いた摂動論で計算される。これは、反応の条件を満たすグラフを摂動の各項に対応させるもので、計算は次のようにして行われる。まず相互作用に応じた理論（量子電磁力学、量子色力学、弱電磁理論等）を選択する。反応にあらわれる粒子及び摂動の次数から、可能な全てのファインマングラフを求める。つぎに、これらのグラフに対応する式（ファインマン振幅）を求める。ここにはディラック行列と呼ばれる行列の跡が現れるが、行列の持つ単純な代数構造を用いて計算することができる。得られた数式を積分し反応の確率を求める。

我々の最終の目的は、このような計算を計算機上で可能な限り自動化する事にある。ファインマングラフを自動生成するプログラムとしては、現在佐々木建昭氏による量子電磁力学用グラフ生成プログラム(1976)がある。ディラック行列の跡はREDUCE, SCHOONSHIP, SMP 等の数式処理システムにより計算することができる。また、REDUCEからの FORTRANプログラムの出力を数値積分するものとして BASES (川端、1986、但し木グラフのみ)がある。今回我々は、新たな方法による量子電磁力学用のファインマングラフ自動生成プログラムを作成した。出力としてはグラフの図形出力、対応するファインマン振幅のREDUCEソースプログラムを得ることができる。出力の例を図 1、2 に示す。内容の詳細は、

T.Kaneko, S.Kawabata and Y.Shimizu, "Automatic Generation of Feynman Graphs and Amplitudes in QED", *Comp. Phys. Commun.* **43**(1987)279

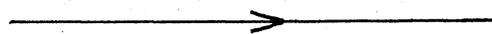
に示されている。ここでは、グラフ生成法の概略のみを示す。

グラフの自動生成では、同一のグラフが多数回出現するのをいかに避けるかが問題となる。全ての可能な組合せを作りグラフを比較することも可能であるが、グラフの個数が頂点の個数（摂動の次数）の階乗のオーダーとなることが予想され、実用的でない。量子電磁力学ではグラフの要素が単純な構造をしているために、つなぐ順序を制御する事により生成中のグラフの対称性を単純なものに抑えることが出来る。このためグラフ生成の全過程で同一グラフの生成が避けられ、グラフ間の比較が不要となった。以下にその生成法を述べる。

量子電磁力学のファインマングラフは次の要素からなる。グラフの辺(edge)にはそれぞれの粒子の内線が対応する。この内、フェルミ粒子（電子、ミュー粒子）の内線は方向を持つ。これに対してボーズ粒子（光子）の内線は方向を持たない。グラフの節点(node)としては、荷電粒子と光子との相互作用に対応する頂点と、外部から観測する粒子に対応する外線とからなる。外線はそれぞれ異なる運動量とスピンとを持ち、区別できるものとする。フェルミ粒子数は反応の前後で変化することはない。このためフェルミ粒子の内線をむすんだ経路（フェルミ粒子線）は、外線から出発し外線で終わるか、ループを構成するかの2つの場合がある。

辺

内線（電子、ミュー粒子）

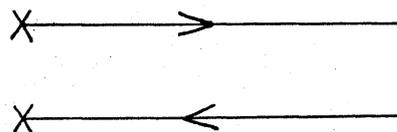


内線（光子）



節点

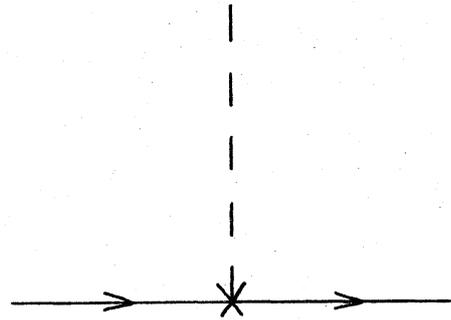
外線（電子、ミュー粒子）



外線（光子）



頂点



ファインマングラフの生成の問題は、外線の組と頂点の個数とが与えられたときに、全ての可能な連結グラフを重複なく作り出すことである（さらにいくつかの条件を満たさないグラフを排除する必要があるがここでは省略する）。

グラフの生成は次のように行われる。

1. 外線のフェルミ粒子をつなぐ。
2. フェルミ粒子のループを生成する。
3. フェルミ粒子線上に頂点を生成する。
4. 頂点間を格子の内線につなぐ。

各段階では可能な全ての組合せを尽くす必要があるが、1から3の段階は簡単な組合せの問題である。

第3段階終了直後のグラフの対称性を考える（図3）。そこでは一般に、外線につながるフェルミ粒子線、フェルミ粒子のループ、外線の光子があり、頂点は全てフェルミ粒子線上に置かれている。外線の粒子は全て互いに区別されている。外線の粒子につながるフェルミ粒子線上の頂点も、端の外線の粒子からの距離を計ることにより区別できる。したがって、内部対称性を持つのはループに限られる。フェルミ粒子のループはそれぞれ回転対称性を持つ。また同じ個数の頂点をその上に持つ二つのループは同じものと見なされ、全体のグラフはそれらのループの入れ換えに対称となる。頂点間をつないでいく際に、ループ同士をつなげば対称性は複雑化して行くが、つなぐ順序を制御することによりこれを避けることが出来る。

つぎに、つないでいく途中の状況を考える（図4）。フェルミ粒子のループ上の頂点が光子の内線によって他と区別できる頂点とつながっていれば、頂点間を

つなぐ光子の内線は他の内線と区別でき、そのループ上の頂点も他の頂点と区別できることになる。ループ上の他の頂点は、この区別できた頂点からフェルミ粒子の方向に添って距離を計ることにより、これも区別できることになる。したがって、区別できる頂点と他の頂点とを順次つないけば区別できない頂点は、まだつながっていないループ上の頂点に限られ、ループ間の置換とループ内での回転の対称性だけを考えればよいことになる。

頂点間をつなぐアルゴリズムを下に示す。まず、外線の光子は仮のフェルミ粒子線上にあるものとする。各フェルミ粒子線に変数「レベル」を導入し、この値として外線につながるフェルミ粒子線には0を、ループには「無限大」を代入しておく。この変数はループをつないでいく際に、外線につながるフェルミ粒子線とループとの距離を、間の光子の内線の数で計った値を入れることにする。

```

procedure connectvertex(level:integer);
var
  flinel, fline2: フェルミ粒子線;
  nodel, node2: 外線の光子または頂点;
begin
  if 連結グラフが作れる then
  begin
    flinel := 「レベル」の値が level で、
      まだつながっていない頂点があるフェルミ粒子線;
    if そういうフェルミ粒子線がない then
    begin
      if まだつながっていない頂点を持つフェルミ粒子線がある
      then
        connectvertex(level+1)
      else
        新しいグラフが得られた
    end
  else

```

```

begin
  nodel := fline1 上のまだつながっていない頂点;
  for fline2 := まだつながっていない頂点を持つ
    フェルミ粒子線 do
    begin
      if (fline2 は孤立したループではない) or
        (fline2 とおなじ頂点数を持つ孤立したループ
         はまだ nodel にはつなげられていない)
      then
        begin
          if fline2 の「レベル」が「無限大」 then
            fline2 の「レベル」 := level+1;
          for node2 :=
            fline2 が孤立したループなら最初の頂点、
            そうでなければフェルミ粒子線上のまだつなげられていない頂点
          do
            begin
              nodel と node2 とをつなげる;
              connectertex(level);
              nodel と node2 とを切り離す;
            end;
            fline2 の「レベル」をもとにもどす;
          end
        end
      end
    end
  end
end;

```

以下に vertex correction のグラフを例にとり、FACOM-M382 での実行結果を示す。

ループ数	頂点数	グラフ数	実行時間
1	3	1	0.03秒
2	5	7	0.09秒
3	7	72	0.47秒
4	9	891	5.58秒
5	11	12672	88.72秒
6	13	202770	26分12秒

実行時間はほぼ (頂点数) × (グラフ数) に比例し、所期の結果がえられた。

このようにして得られたそれぞれのファインマングラフに対応して、ファインマン振幅が生成される。ファインマン振幅は数式処理システム REDUCE によってガンマ行列が処理され、FORTRAN ソースプログラムに変換される。生成された FORTRAN ソースプログラムを被積分関数とする数値積分は、BASES を用いることにより容易に行うことができ、反応の断面積が求められる。

しかしながら、この FORTRAN プログラムはしばしば極めて長大となる。通常数百行から数千行、時には数万行となる場合もある。極めて長大な被積分関数での数値積分は、事実上実行が不可能となる。このような状況を避けるためには、計算法の改善も必要であるが数式処理システムが出力する FORTRAN ソースプログラムの最適化の機能も望まれる。

今後量子色力学、弱電磁理論への拡張が要求されるが、これらの理論ではボーズ粒子同士が相互作用を行う。このためグラフの内部対称性が極めて複雑となり、新たな方法の開発が今後の課題となる。

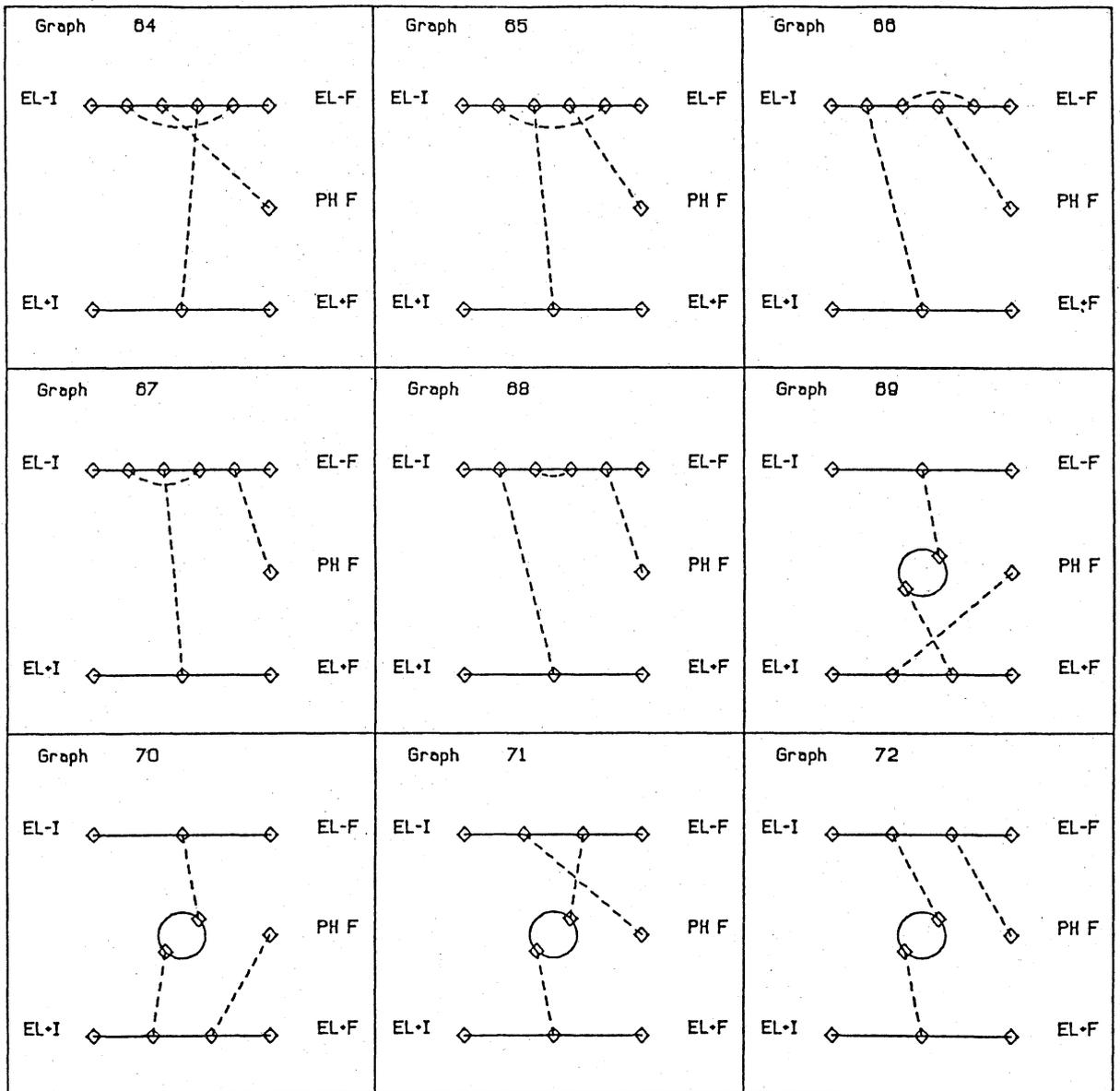


図 1

ファインマングラフの図形出力の例

```

%*****
% Table of (amplitude)*CONJ(amplitude)
NGRAPH :=      8;
ARRAY W(NGRAPH,NGRAPH);

WC  1,  1) := +
4*VELP(L00001,P00002,S00002)*VTXN(L00001,MN0001)*
  UELP(L00001,P00001,S00001)*VTXC(L00001,MC0001)*
4*UELPL(L00002,P00003,S00003)*VTXN(L00002,MN0002)*
  SELN(L00002,QN0001)*VTXN(L00002,MN0003)*
  VELP(L00002,P00004,S00004)*VTXC(L00002,MC0003)*
  SELC(L00002,QC0001)*VTXC(L00002,MC0002)*
  DPHN(MN0001,MN0003,QN0002)*DPHC(MC0001,MC0003,QC0002)*
  EE(MN0002,MC0002);

WC  1,  2) := +
4*VELP(L00001,P00002,S00002)*VTXN(L00001,MN0001)*
  UELP(L00001,P00001,S00001)*VTXC(L00001,MC0001)*
4*UELPL(L00002,P00003,S00003)*VTXN(L00002,MN0002)*
  SELN(L00002,QN0001)*VTXN(L00002,MN0003)*
  VELP(L00002,P00004,S00004)*VTXC(L00002,MC0003)*
  SELC(L00002,QC0003)*VTXC(L00002,MC0002)*
  DPHN(MN0001,MN0003,QN0002)*DPHC(MC0001,MC0002,QC0004)*
  EE(MN0002,MC0003);

WC  1,  3) := +
4*VELP(L00001,P00002,S00002)*VTXN(L00001,MN0001)*
  UELP(L00001,P00001,S00001)*VTXC(L00001,MC0001)*
  SELC(L00001,QC0005)*VTXC(L00001,MC0002)*
4*UELPL(L00002,P00003,S00003)*VTXN(L00002,MN0002)*
  SELN(L00002,QN0001)*VTXN(L00002,MN0003)*
  VELP(L00002,P00004,S00004)*VTXC(L00002,MC0003)*
  DPHN(MN0001,MN0003,QN0002)*DPHC(MC0002,MC0003,QC0006)*
  EE(MN0002,MC0001);

WC  1,  4) := +
4*VELP(L00001,P00002,S00002)*VTXN(L00001,MN0001)*
  UELP(L00001,P00001,S00001)*VTXC(L00001,MC0001)*
  SELC(L00001,QC0007)*VTXC(L00001,MC0002)*
4*UELPL(L00002,P00003,S00003)*VTXN(L00002,MN0002)*
  SELN(L00002,QN0001)*VTXN(L00002,MN0003)*
  VELP(L00002,P00004,S00004)*VTXC(L00002,MC0003)*
  DPHN(MN0001,MN0003,QN0002)*DPHC(MC0001,MC0003,QC0008)*
  EE(MN0002,MC0002);

WC  1,  5) := -
4*VELP(L00001,P00002,S00002)*VTXN(L00001,MN0001)*
  UELP(L00001,P00001,S00001)*VTXC(L00001,MC0001)*
  UELP(L00001,P00003,S00003)*VTXN(L00001,MN0002)*
  SELN(L00001,QN0001)*VTXN(L00001,MN0003)*
  VELP(L00001,P00004,S00004)*VTXC(L00001,MC0003)*
  SELC(L00001,QC0009)*VTXC(L00001,MC0002)*
  DPHN(MN0001,MN0003,QN0002)*DPHC(MC0001,MC0003,QC0010)*
  EE(MN0002,MC0002);

```

図 2

フラインマン振幅の例

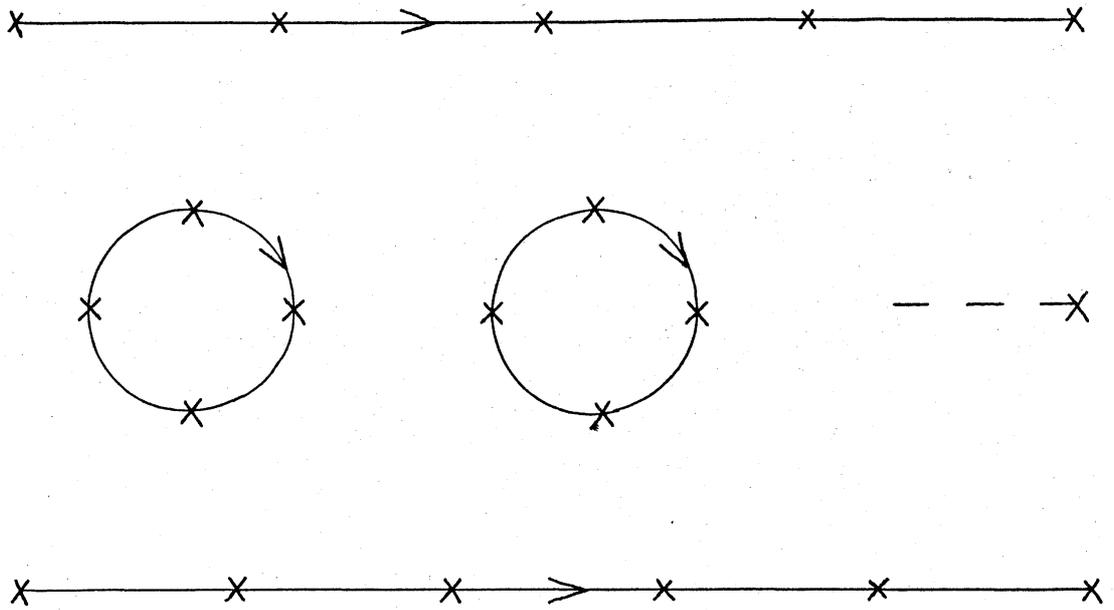


図 3

第 3 段階終了時のファインマングラフの例

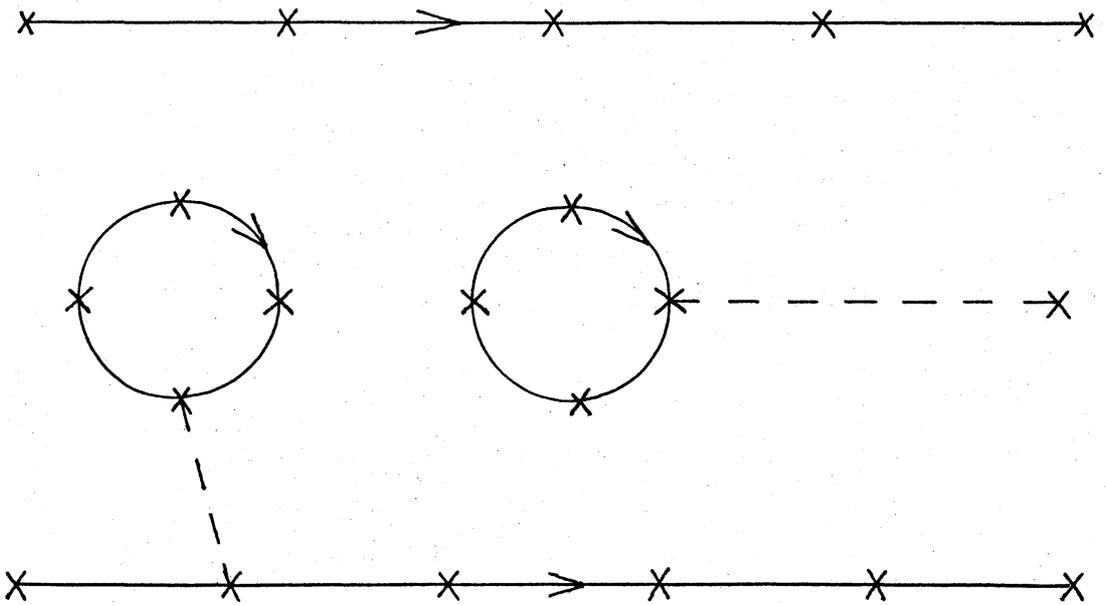


図 4

第 4 段階途中のファインマングラフの例