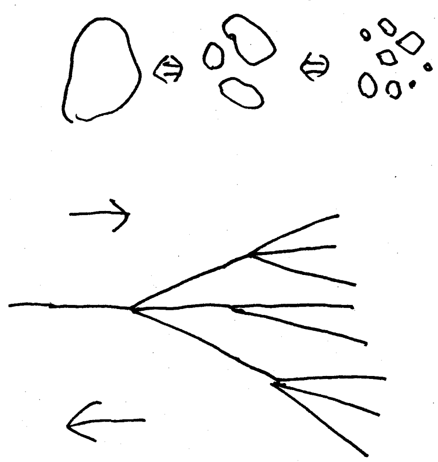
数理解析研究所講究録
第614巻 1987年 85-91

どのような場合にベキ分布が実現するのだろうか？

神戸大学・理学部　高安秀樹　(H. Takayasu)

最近、物理学の中でフラクタルが注目を集め、様々な興味深い現象が報告されてきている。実に多くのフラクタルが短期間の間に発見されてきたのであるが、それらは、大きく二つのグループに分類することができる。ひとつは平衡系の相転移における臨界現象において現われるもので、例えば、パーコレーションやスピン系がよい例である。ちょうど臨界点においては、クラスターの形がフラクタルであるのみならず、それらの大きさの分布もベキ乗則に従い、特徴的なスケールが存在しないことが知られている。もうひとつのグループは、非平衡系のフラクタルで、凝集、破壊、乱流などがこれに属する。ことに凝集に関する研究は活発で、ＤＬＡと呼ばれる凝集体の構造はシミュレーションなどによって細かいところまでわかってきている。これらのうち、前者の臨界現象に関するフラクタル構造については、繰り込み群などの方法を適用することにより、解析が進んでいる。それに対し、後者についてはまだ確立した解析の一般的な手法は見つかっていない。この報告では、そのような散逸系についての一般論をつくるための手掛かりを探してみることにする。

図1.

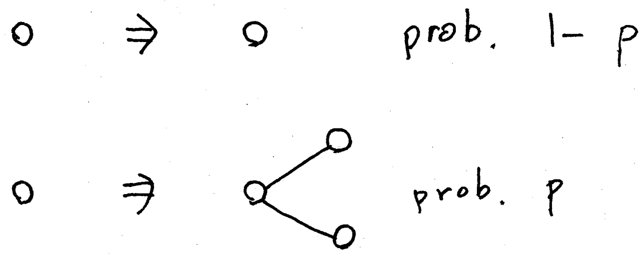


散逸系の特徴は、時間の矢がはっきりと存在することであろう。例えば、岩石などが破壊される状況を考えてみる。大きなかたまりは、壊れて小さな破片の集まりになり、それらの小さな破片は、さらに小さく壊れていく。その時、けっして逆のプロセスは起こらない。凝集過程の場合は、ちょうど時間軸を逆に見たような関係になり、時間と共に粒子などがどんどん付着して大きくなっていく。このような状況は、上のような樹形図によって表わすことができるだろう。

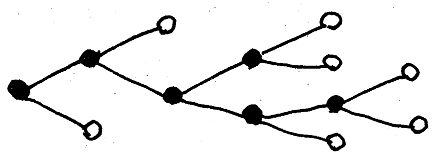
さて、このようにして破壊や凝集などの非平衡散逸系の特徴を、図１のような分岐を伴う樹形図によって表現できることがわかったのであるが、それでは次に、どのような場合に、このような模式図で記述される系がフラクタル的な性質を示すのかを考えてみよう。

分岐を伴うランダム樹系図をつくるための最も簡単なルールは、次のようなものである。

ひとつの親の粒子からスタートし、その親は確率ｐで二つの子孫を産み、１－ｐの確率で成長を停止するものとする。子孫ができた場合には、各々の子孫がやはり同じ確率で、子孫を残すか、あるいはその代で途切れるかが決まるものとする。



このようなルールによって、例えば次のようなクラスターが作られる。



ここで、黒い丸、白い丸は、それぞれ子孫を産んだ粒子、産まなかった粒子を表わす。上の規則から明らかなように、このようなクラスターの生じる確率は、$p^6(1-p)^7$である。このルールでは、ひとつの子孫を産む場合や、３つ以上の子孫をを産む場合を除外しているが、それは、クラスターのフラクタル性に関しては本質的ではない。

このモデルにおいて、大きさがｓのクラスターの存在確率Ｗ（ｓ）はどのように求められるだろうか。大きさがｓとなるようなクラスターの形をすべて数え上げるのは大変そうであるが、幸い、このルールの場合には、マルコフ的な性質があるため次のような漸化式が成立する。

$$W(s+1) = p\cdot\sum_{s'=1}^{s-1} W(s')\,W(s-s') \qquad (1)$$

$$W(1)=1-p\,,\quad W(2)=0$$

この漸化式は、母関数 $Z(x)=\Sigma x^{s-1}w(s)$ を導入することによって，zに関する２次方程式となり、解くことができる。その解は、次のようになる。

$$W(2m+1)=\frac{(2m-1)!!\cdot 2^{m}}{(m+1)!}p^{m}\cdot(1-p)^{m+1} \qquad (2)$$

$$W(2m)=0$$

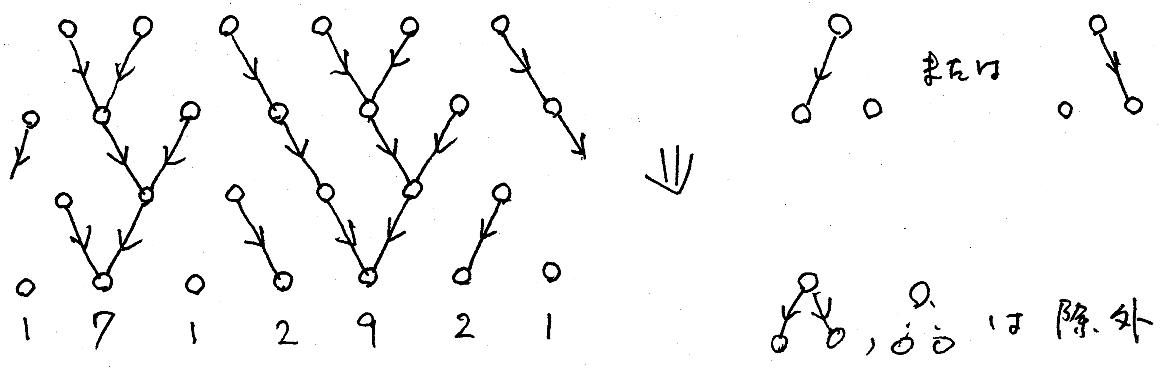
ここで、スターリングの公式を用いて階乗を近似すると次のようになる。

$$W(2m+1)\doteqdot\frac{1-p}{\sqrt{2\pi}}m^{-3/2}\cdot e^{-am}, \quad a=\log 4p(1-p), \qquad (3)$$

この式をみればわかるように、$p=1/2$以外では、sの分布はsの十分大きなところでは指数関数的に減少している。ちょうど$p=1/2$の時だけが例外で、ベキ分布に従い、フラクタル的な性質を持つようになる。これは、相転移である。どのような相転移かというと、$p<1/2$の時にはクラスターはすべて有限の大きさであるが、$p>1/2$になると無限に大きいクラスターが有限の確率で現われるようになる。つまり、ふつうのパーコレーションと全く同じたぐいの相転移になっているわけである。このように、最も簡単な分岐モデルでも、フラクタル的な性質を持ち得ることはわかったが、ある特定のパラメータを選ばなければフラクタルにならないのではおもしろくない。というのは、破壊や凝集においては、いつでもフラクタル的な性質を示すのであるから、それならば、なぜ破壊や凝集の場合にはちょうど臨界点になるようにパラメータが決まるのかを説明しなくてはならないからである。

自動的にベキ分布がでてくるような凝集過程のモデルとして、筆者らは、川のモデルを解析している[1]。それは、次のようなモデルである。

斜面に一様に雨が降っている状況を考える。その斜面にはランダムな凹凸があり、降った雨は左または右にランダムウォークをしながら流れ落ちることになる。そこで、面上の流れの場を、次のように構成することにする。下図のような互い違いの格子を考え、格子点に降った雨は、確率１／２で右下または左下に流れ落ちるものとする。両方に流れたり、どちらにも流れなかったりすることはないとする。



このモデルにおいて注目する量は、十分下流での流量の分布である。雨はすべての点に等しく降っているとしているので、流量は、下流の点とつながっているクラスターの大きさにほかならない。数値シミュレーションによって調べてみた結果、流量sの分布は、次のようなベキ分布になっていた。

$$P(\geq s) = \int_s^{\infty} W(s')\,ds' \propto s^{-\alpha}, \quad \alpha = 1/3 \tag{4}$$

このモデルは、さらに、空間の次元を高くしたり、遠くの点とも相互作用するように拡張しても、ベキ分布に従うことがわかっている。例えば、空間の次元が無限大の時には、先にのべた分岐モデルと同じ分布になる。

一般化されたモデルは次の式によって記述される。

$$\begin{aligned} & S_i(n+1) = \sum_j W_{ij}(n)\cdot S_j(n) + 1, \\ & W_{ij}(n) = \begin{cases} 1 & \text{prob.} \quad p(i,j) \\ 0 & 〃 \quad 1 - p(i,j) \end{cases} \\ & \sum_i W_{ij}(n) = 1, \quad \sum_i p(i,j) = 1 \end{aligned} \tag{5}$$

例えば、オリジナルな川のモデルは、$P(i,j) = \frac{1}{2}\cdot\delta_{i+1,j}$ の場合に対応している。ここで欲しいのは $s_1(\infty)$ の分布であるが、それを直接考えるよりは、特性関数を考えた方が解析しやすい。

特性関数は、次の式によって定義される。

$$Z(\rho, n) \equiv \langle e^{-\rho s_i(n)} \rangle \tag{6}$$

ここで＜・・・＞は、$\{w_{ij}\}$ とｉについての平均を表わす。ｓの分布Ｐと特性関数は、ラプラス変換でつながっているので、次のような関係が成り立つ。

$$Z(\rho) = 1 + \mathrm{const}\cdot \rho^{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad P(\geq s) \propto s^{-\alpha} \tag{7}$$

したがって、ｓの分布がベキであるかどうかは、Ｚの原点近傍の振舞いを調べればよい。

Ｚは、このモデルの時間発展の式を用いれば、次のように表わされる。

$$\begin{aligned} Z(\rho, n+1) &= \langle e^{-\rho - \rho \sum_j w_{ij}(n)\cdot s_j(n)} \rangle \\ &= e^{-\rho} \langle \prod_j [\, p(-j)\, e^{-\rho s_j(n)} + 1 - p(-j) \,] \rangle \end{aligned} \tag{8}$$

例えば、オリジナルな川のモデルの場合には、次のようになる。

$$Z(\rho, n+1) = \frac{e^{-\rho}}{4} \{ \langle e^{-\rho(s_i(n) + s_{i+1}(n))} \rangle + 2\, Z(\rho, n) + 1 \tag{9}$$

ここで、２体の分布に対する特性関数が第一項にでてくるが、もしも、それを一体の特性関数の積で置き換えてみると次のようになる。

$$\langle e^{-\rho(s_i + s_{i+1})} \rangle = \langle e^{-\rho s_i} \rangle^2 \Rightarrow Z(\rho, \infty) = 1 + \mathrm{const}\cdot \rho^{1/2} \tag{10}$$

これは、分布としては $P(\geq s) \propto s^{-1/2}$ であり、ベキ分布ではあるが、(4) 式とは一致しない。(4) 式の分布を導くためには、多体の分布を解かなければならず、次のようにｒ体の特性関数を定義する必要が生じる。

$$Z_r(\rho, n) \equiv \langle e^{-\rho(s_i(n) + s_{i+1}(n) + \cdots + s_{i+r}(n))} \rangle \tag{11}$$

これを用いると、(8) 式は、次のように厳密に書くことができる。

$$Z_r(\rho, n+1) = \frac{e^{-\rho r}}{4} [\, Z_{r-1}(\rho, n) + 2\, Z_r(\rho, n) + Z_{r+1}(\rho, n) \,] \tag{12}$$

$n \to \infty$で解が一意的に存在することを仮定すれば、これは連立一次方程式となり、次のように解ける。

$$Z_1(\rho,\infty)=\cfrac{1}{4e^{\rho}-2-\cfrac{1}{4e^{2\rho}-2-\cfrac{1}{4e^{3\rho}-2-\cfrac{1}{\ddots-\cfrac{1}{4e^{s\rho}-2-\cfrac{1}{\ddots}}}}}} \qquad (13)$$

これは数値的にいくらでも精度よく解くことができ、(4) 式の結果が正しいことが確かめられる。

さて、これまでに分岐のモデルと川のモデルを考えてきたが、両者はどんな関係にあるのだろうか。まず、時間の向きが逆になっていることは明かだろう。しかし、そのことはクラスターの大きさの分布を求める時には全く関係がない。どちらも同じような分岐を伴う木の枝のような形の大きさ分布を考えている。問題なのは、前者ではある特定のパラメータの場合だけしかベキ分布にならなかったのに、なぜ、後者ではいつでもベキ分布が成り立つのかである。それを明らかにするには、前者のモデルの臨界条件をもう一度考え直してみると良い。

２つの子孫をつくる確率ｐが１／２であるという条件は、子孫の数の期待値がいつでも１であることと等価である。つまり、臨界条件は、１つの親から生じる子孫の数は時間がどれだけたっても期待値としては増えも減りもしないこと、と言い換えることができるわけである。では、川のモデルでは、どうなっているだろう。川のモデルの場合には、ひとつの下流から川を遡ったとき、ｎステップ上流では何本の支流に分岐しているかが、子孫の数と対応している。分岐や行き止まりがあるので複雑ではあるが、実は、自明でいつでも１になっている。というのは、まず、格子空間上に流れを作ったので、どのステップでも川の総数は同じである。そして、どの川も必ず一番下流まで流れているので、上流にあ

るどの支流も必ず何処かの下流の子孫になっている。したがって、子孫の数の期待値は常に１である。これは、川のモデルを一般化してもいつでも成り立つことである。それゆえ、川のモデルではいつでも臨界状態になっており、ベキ分布が成立していたわけである。ただし、ベキの指数は普遍的ではない。

以上の議論から、次の命題が成り立っているのではないかと推測される。

定常状態にある非平衡開放系のうちフラクタル的な振舞いを見せるものは、一般的に、自動的に臨界条件を満たすようになっているのではなかろうか。

参考文献

1　高安秀樹、月刊地球　９１号、ｐ２２-２６（１９８７）．
H. Takayasu and I. NIshikawa, Science on Form(KTK Scientific Publishers) p.15-22(1986).