数理解析研究所講究録
第619巻 1987年 97-113

接触幾何学に現われる特異点について

北大・理　山口佳三
(Keizo Yamaguchi)

接触幾何学＝一階一未知函数偏微分方程式論 なる図式において、Legendre特異点は、独立変数を指定した時の、解に現われる特異点である。接触幾何学に現われる特異点の他の例として、ここでは、方程式に現われる"特異点"について論じたい。内容は、V. V. Lychagin の次の論文の紹介である。

[L] Local classification of non-linear first order partial differential equations
Russian Math. Surveys 30:1 (1975) 105-175

詳細は、原論文を読んで頂くことにして、ここでは、問題の背景と概略を述べる。

0. 古典的一階偏微分方程式論

M を n 次元 C^∞-多様体、$J^1(M;\mathbb{R})$ を M 上の実数値函数の 1-jets の空間とする。$J^1(M,\mathbb{R})$ は canonical に $T^*(M)\times\mathbb{R}$ と同一視される。このとき $\hat{\pi} = du - \alpha$ は、$J^1(M,\mathbb{R})$ 上の接触構造

$$C = \{\hat{\pi} = 0\} \subset T(J^1(M,\mathbb{R}))$$

を定める。ここに、α は $T^*(M)$ 上の canonical 1-form である。

定義と用語：(i) $J^1(M,\mathbb{R})$ の部分多様体 R を M 上の函数に対する一階（非線型）偏微分方程式系と考える。

(ii) $J^1(M, \mathbb{R}) \supset R$ の解 $f \in C^\infty(M) \iff j^1(f); M \to J^1(M, \mathbb{R})$: graph の像が R に含まれる。

$S = j^1(f)(M)$ は、このとき、接触多様体 $(J^1(M, \mathbb{R}), C)$ の Legendre 部分多様体である。以下では $S \subset R$ なる Legendre 部分多様体 S をすべて R の解と呼ぶ。

(iii) π を $\hat{\pi}$ の R への制限とする。さらに、$^\forall x \in R$ で、$T_x(R)$ の部分空間 $D(x)$ を次で定める。

$$D(x) = \{ X \in T_x(R) \mid \pi(X) = 0 \} = T_x(R) \cap C(x)$$

(iv) $J^1(M, \mathbb{R}) \supset R$ が包合系である。$\iff$ $^\forall x \in R$ において $T_x(R)$ は $(J^1(M, \mathbb{R}), C)$ の Legendre 部分空間 (i.e. $(C(x), d\hat{\pi})$ の Lagrangean 部分空間) を含んでいる。

((これは、方程式系 R に対する compatibility condition である))

このとき、古典的一階偏微分方程式論の内容は、次の2つから成ると考えられる。

Regular な包合系 R (i.e. $D \subset T(R)$ が部分束) に対して

(A) 接触同値問題 (接触多様体の部分多様体論)

$^\forall x \in R$ の近傍に $(J^1(M, \mathbb{R}), C)$ の正準座標 $(x_1, \cdots, x_n, u, p_1, \cdots, p_n)$ がとれて、$R = \{ p_1 = \cdots = p_r = 0 \}$ となる。ここに、正準座標とは $C = \{ du - \sum_{i=1}^n p_i dx_i = 0 \}$ となる $J^1(M, \mathbb{R})$ の座標。

いいかえれば、regular な包合系 R は、局所的には常に、接触変換によって、R の次元のみによって定

まる標準的な線型方程式系に移される。従って次元の等しい包合系 (regularな) はすべて局所接触同値である。

(B) 求積論

上のような正準座標を、いかにして求めるか？この部分は、いわゆる特性系の理論であり、x^i, u^i, p_i は常微分方程式を解いて得られる。

以上の内容については、上記、Lychagin の論文の前半ないし次を参考にされたい。

大島・小松 著　一階偏微分方程式　岩波基礎数学

我々は、以下において包合系 R が regular でない場合に主として (A) の問題を論じたい。すなわち、R は $J^1(M,\mathbb{R})$ の部分多様体として、D の特異点を考察する。

1. 包合系の特異点と Hessian

包合系 $R \subset J^1(M,\mathbb{R})$ に対して

$$x \in R \text{ が特異点} \iff \Pi_x = 0 \quad (\text{i.e., } D(x) = T_x(R))$$

と定める。特に R の余次元が 1 であるとき、

$$x \in R \text{ が特異点} \iff T_x(R) = C(x)$$

である。従って、この場合、x を原点とする $J^1(M,\mathbb{R})$ の正準座標 $(x_1, \cdots x_n, u, p_1, \cdots, p_n)$ をとると、x の近傍で、

$$R = \{ u = f(x_1, \cdots x_n, p_1, \cdots p_n) \}$$

と書かれる。$\pi = df - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$ であるから、このとき、x は函数 f の特異点である。我々は、特異点 x の近傍での R の様子を接触同値の下で調べたい。

◎ 特異点における Hessian

R の特異点 x は R 上 π の特異点であるから、x での R の Hessian h_π を次で定める。

$$\begin{aligned} h_\pi : T_x(R) \times T_x(R) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) &\longmapsto v_1(\pi(Y)) \end{aligned}$$

ここに、Y は $Y_x = v_2$ なる R 上のベクトル場である。これが well-defined なることは、通常の函数 f の特異点での Hessian の場合（いわば $\pi = df$ の場合）と同様であり、次も容易にわかる。

$$h_\pi(v_1, v_2) - h_\pi(v_2, v_1) = d\pi(v_1, v_2)$$

簡単のため以下、R の余次元は 1 とする。このとき、$T_x(R) = C(x)$ であり、$d\pi$ は $T_x(R)$ の symplectic 形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を定める。従って Hessian h_π は $\langle\ ,\ \rangle$ を用いて、$T_x(R)$ の線型変換 H_x として表現できる。

$$H_x : T_x(R) \longrightarrow T_x(R) \ : \text{線型変換}$$

$$\langle H_x(v_1), v_2 \rangle = h_\pi(v_1, v_2)$$

このとき、H_x は次を満たしている。

$$\langle H_x(v_1), v_2\rangle - \langle H_x(v_2), v_1\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$$

明らかに、接触変換φは、包合系の特異点を特異点に移し、その微分φ_*は、$(T_x(R), \langle , \rangle)$に対しては conformal symplectic な変換として働く。さらにφ_*はH_xと可換である。H_xは接触変換の下で包合系の特異点を分類しようとするとき、最初の目安となる。

従って、我々の最初の課題は、symplectic ベクトル空間$(V, \langle , \rangle)$において、$\langle H(v_1), v_2\rangle + \langle v_1, H(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$を満たす$H : V \to V$を$Csp(V)$の下で分類することである。この部分については、[L] Chapter III. §2 を参照されたい。

2. 単独方程式の場合への帰着

接触多様体$(J^1(M, \mathbb{R}), C)$において、函数$f \in C^\infty(J^1(M, \mathbb{R}))$は、$J^1(M, \mathbb{R})$上の無限小接触変換$X_f$を次で定める;

$$\begin{cases} \hat{\pi}(X_f) = f \\ X_f \lrcorner\, d\hat{\pi} \equiv -df \pmod{\hat{\pi}} \end{cases}$$

$J^1(M, \mathbb{R}) \supset R$を余次元$r$の包合系として、$x$を$R$の特異点とする。適当な函数$f$を用いて、$x$の近傍で$R$を1次元ふくらませて、余次元$r-1$の regular な包合系$Q$が、局所的に次のようにして作られる; $f \in C^\infty(J^1(M, \mathbb{R}))$を$f(x) \neq 0$なる函数とする。さすれば、$(X_f)_x \notin C(x)$であり、従って、

$(X_f)_x \notin T_x(R)$ である。X_f の生成する 1-parameter 接触変換群を Φ_t とすると

$$\Phi : R \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow J^1(M, \mathbb{R})$$
$$(y, t) \longmapsto \Phi(y, t) = \Phi_t(y)$$

は、$(x, 0)$ の近傍 $U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ で埋め込みとなる。このとき、$Q = \Phi(U \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ は、regular な余次元 $r-1$ の包合系であり、U を余次元 1 の部分多様体として含んでいる。

従って、0. での結果より、x の近傍で、x を原点とする正準座標 $(x_1, \cdots, x_n, u, p_1, \cdots, p_n)$ がとれて、

$$Q = \{ p_1 = \cdots = p_{r-1} = 0 \}$$

となる。x は R の特異点であるから、$T_x(R) \subset C(x) = \{ du - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i = 0 \}$ よって、x の近傍で、

$$R = \{ p_1 = \cdots = p_{r-1} = u - f(x, p) = 0 \}$$

と書ける。さらに、この正準座標で、$X_{p_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i}$ である。また、R は包合系であるから、$X_{p_1}, \cdots, X_{p_{r-1}}$ は R に接している。従って、$f = f(x_r, \cdots, x_n, p_r, \cdots, p_n)$ である。よって次を得た。

命題 1 ([L] Chap. III §3 p.150)

$J^1(M, \mathbb{R}) \supset R$ を余次元 r の包合系とする。$x \in R$ を特異点とするとき、x を原点とする $J^1(M, \mathbb{R})$ の正準座標 $(x_1, \cdots, x_n, u, p_1, \cdots, p_n)$ と函数 f が存在して、R は x の近傍で、

$$R = \{ p_1 = \cdots = p_{r-1} = u - f(x_r, \cdots, x_n, p_r, \cdots, p_n) = 0 \}$$

と書ける。

命題1により包合系 R の特異点の近傍での様子は、余次元1の場合を調べればよい。余次元1の場合、R は特異点 x の近傍で、x を原点とする正準座標で、

$$R = \{ u = f(x_1, \cdots x_n, p_1, \cdots p_n) \}$$

と書かれる。我々の問題は、函数 f の標準形を求めることになる。

3. 標準形

この節では、余次元1の包合系 R の特異点 x において、Hessian が f の x での 2-jet を定めている様子を見る。

◎ Hessian の標準形

Symplectic ベクトル空間 $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ において、

$$\langle H(v_1), v_2 \rangle + \langle v_1, H(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

を満たす線型変換 $H: V \to V$ は、次のように分類される。

（概略、H の分類は、H を Jordan 行列として表わす、V の基底を、$\langle\ ,\ \rangle$ に関する直交関係を、どう満たすように取れるかで与えられる。）

まず、H の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、$1-\lambda$ も常に固有値となる。従って V は、$\langle\ ,\ \rangle$ の下、次の形に直交分解される：

$$V = \bigoplus_{\lambda, j} E_{\lambda, j}$$

ここに、$E_{\lambda, j}$ は固有値の組 $(\lambda, \bar{\lambda}, 1-\lambda, 1-\bar{\lambda})$ に対して定まる

H－不変部分空間である。$(\bigoplus_j E_{\lambda,j})^{\mathbb{C}}$ は、固有値 $\lambda, \bar{\lambda}, 1-\lambda, 1-\bar{\lambda}$ の広義固有空間の直和に一致する。$E_{\lambda,j}$ において、H を Jordan 行列として表わす基底の取り方は、次の6通りに分かれる。

(1) $\lambda \in \mathbb{R}$ & $\lambda \neq \frac{1}{2}$

(2) $\lambda = a + ib \quad (a \neq \frac{1}{2},\ b \neq 0)$

(3) $\lambda = \frac{1}{2} + i\mu$ & $\dim E_{\lambda,j} = 2n_j$: n_j : even

$(\mu \neq 0)$

(4) $\lambda = \frac{1}{2} + i\mu$ & $\dim E_{\lambda,j} = 2n_j$: n_j : odd

(5) $\lambda = \frac{1}{2}$ $\begin{cases} \text{(a)} \\ \text{(b)} \end{cases}$

各場合についての標準形の詳細は [L] p.143 参照のこと。ここでは、(1)の標準形のみ与えておく。

$\lambda \in \mathbb{R}$ & $\lambda \neq \frac{1}{2}$ のとき

$E_{\lambda,j}$ には、$\langle v_r, v_s \rangle = \langle w_r, w_s \rangle = 0$，$\langle v_r, w_s \rangle = (-1)^{r+1}\delta_{r, n_j - s}$ を満たす基底 $\{v_1, \cdots, v_{n_j}, w_1, \cdots, w_{n_j}\}$ が存在して、H はこの基底によって、次の形の行列で表わされる。

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1-\lambda & 1 & & 0 \\ & 1-\lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1-\lambda \end{matrix} \end{array}\right)$$

◎ 方程式の標準形　　　◎注意：単独方程式は常に包合系である。

R を余次元1(の包合系)とし、x を R の特異点とする。x の近傍で、

$$R = \{ u = f(x_1, \cdots x_n, p_1, \cdots p_n) \}$$

となる．x を原点とする正準座標を固定する。このとき．

$$\pi = df - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - p_i \right) dx_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i \right\}$$

であり．$\pi_x = 0$ かつ．x は座標の原点であるから．

$$f(x) = 0 \quad \& \quad (df)_x = 0$$

となる。従って．$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_x, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial p_1}\right)_x, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial p_n}\right)_x \right\}$ は $(T_x(R), \langle\ ,\ \rangle)$ の symplectic 基底となる。さらに．

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\pi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) = h_\pi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \left\langle H_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle 。$$

同様にして．

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial p_j}(x) = \left\langle H_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), \frac{\partial}{\partial p_j} \right\rangle \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j}(x) = \left\langle H_x\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right), \frac{\partial}{\partial p_j} \right\rangle$$

を得る。よって．$H_x : T_x(R) \to T_x(R)$ の標準形に応じて．f の x での 2-jet が定まる。

例として．$H_x : T_x(R) \to T_x(R)$ が．2つの実固有値 λ，$1-\lambda$ のみを持ち．それぞれただ1つの Jordan 細胞を持つ場合（i.e.，$T_x(R) = E_{\lambda, j}$ で (I) の型の標準形を持つ場合）に．f の 2-jet を求めてみよう。この場合．$\{ v_1, \cdots, v_n, w_n, \cdots, (-1)^{n-s} w_s, \cdots, (-1)^n w_1 \}$ が．symplectic 基底になっているから．$v_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ，$(-1)^{n-i} w_i = \frac{\partial}{\partial p_{n-i+1}}$ とおいて．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \langle H_x(v_i), v_j \rangle = 0 \quad , \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j}(x) = 0 , \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial p_j}(x) = \langle H_x(v_i), (-1)^{j-1} w_{n-j+1} \rangle = \lambda \delta_{ij} + \delta_{i-1,j} \end{cases}$$

を得る．従って．f の x での 2-jet は

$$\text{(I)} \qquad \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{i=1}^{n-1} x_i p_{i+1}$$

となる。同様にして、他の *Hessian* の標準形より得られる f の標準形は、次の通り。

(2) $a\sum_{i=1}^{n}(x_i p_i + x_i' p_i') + b\sum_{i=1}^{n}(x_i' p_i - x_i p_i') + \sum_{i=1}^{n-1}(x_i p_{i+1} + x_i' p_{i+1}')$

(3) $(-1)^{m+1}(p_m^2 + p_m'^2) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(x_i p_i + x_i' p_i') + \mu\sum_{i=1}^{m}(x_i' p_i - x_i p_i') + \sum_{i=1}^{m-1}(x_i p_{i+1} + x_i' p_{i+1}')$

(4) $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{i=1}^{n-1} x_i p_{i+1} \pm \mu\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}(x_i x_{n-i+1} - p_i p_{n-i+1})$

(5) a) $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{i=1}^{n-1} x_i p_{i+1}$

b) $\pm(-1)^{n+1} p_n^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{i=1}^{n-1} x_i p_{i+1}$

一般の場合、f の標準形は、上記(1)〜(5)の適当な和で書ける。例を少し上げておく。$H_x : T_x(R) \to T_x(R)$

(i) $H_x = 0$ の場合　　$f = 0$

(ii) H_x の固有値が、すべて実で相異なり、$\frac{1}{2}$ を含まない。

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i p_i$$

(iii) H_x の固有値が、すべて相異なり、$Re\,\lambda = \frac{1}{2}$ & $Im\,\lambda \neq 0$。

$$f = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \mu_i \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + p_i^2)$$

我々の、次の課題は、正準座標をさらに、取りかえて、f をいつ、*Hessian* の定める2次の標準形に、移せるかである。

（この部分は、いわば、函数の特異点で、非退化の仮定の下に、*Morse* の *Lemma* を示す部分に、対応している。）

4. 局所接触同値性と局所可解性

この節では、それぞれ特異点 x_1, x_2 を持つ単独方程式

R_1, R_2 に対して、R_1 を R_2 に移し、$\varphi(x_1)=x_2$ となる局所接触変換 φ の存在問題は、いわば φ の graph が満たすべき、特異点を持つ単独方程式の、特異点での局所可解性に帰着されることを見る。

まず、局所接触同値性より準備する。

$$
\begin{array}{ccc}
J^1(M,\mathbb{R}) & \longrightarrow & T^*(M)\times\mathbb{R} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \\
j^1_z(h) & \longmapsto & ((dh)_z,\ h(z))
\end{array}
$$

は、微分同型である。この同一視の下、$J^1(M,\mathbb{R})$ の $T^*(M)$ への射影を ϖ とする。また、$J^1(M,\mathbb{R})$ の微分同型 φ が $\varphi^*\hat{\pi}=\hat{\pi}$ を満たすとき、$\hat{\pi}$-diffeo. と呼ぶ（φ が $\varphi^*\hat{\pi}=f\cdot\hat{\pi}$ $\exists f\in C^\infty(J^1(M,\mathbb{R}))$ を満たすとき、接触変換であった）。$J^1(M,\mathbb{R})$ の部分多様体 R_1, R_2 とその上の点 x_1, x_2 に対して、(R_1,x_1) と (R_2,x_2) が局所 $\hat{\pi}$-同値であるとは、$\varphi(x_1)=x_2$ なる局所 $\hat{\pi}$-diffeo. で $\varphi(R_1)=R_2$ (locally) を満たすものが存在するときにいう。我々の出発点は、次の命題である。

命題 2 ([L] Chap 2 §1 p.130)

$J^1(M,\mathbb{R})$ の超曲面 R_1, R_2 が $x_1\in R_1$, $x_2\in R_2$ で、

$$\varpi_* : T_{x_i}(R_i) \longrightarrow T_{\varpi(x_i)}(T^*(M)) : \text{linear iso} \quad (i=1,2)$$

を満たしているとする。このとき次は同値である。

(i) (R_1,x_1) と (R_2,x_2) は局所 $\hat{\pi}$-同値である。

(ii) $\exists\ \varphi : R_1 \to R_2$: 局所微分同型で $\varphi(x_1)=x_2$ & $\varphi^*\pi_2=\pi_1$

を満たす。ここに、$\pi_i = \hat{\pi}|_{R_i}$ $(i=1,2)$。

(i) ⇒ (ii) は、明白である。(ii) ⇒ (i) は、概ね次のように示される。条件より、ϖ は R_i と $T^*(M)$ の局所微分同型である。このとき、φ は $T^*(M)$ の正準変換 ψ を導く。$T^*(M)$ の正準変換は、局所的には、0-*jet* の値の定数倍を除いて、$J^1(M,\mathbb{R})$ の $\hat{\pi}$-*diffeo* に一意的に持ち上がる。従って、ψ は $\psi(x_1)=x_2$ なる局所 $\hat{\pi}$-*diffeo* $\hat{\psi}$ を一意的に定める。後は、$\hat{\psi}|_{R_1} = \varphi$ をいえばよい。

特に、x が単独方程式 R の特異点である場合、x は命題2の仮定を満たしている。従って、特異点の近傍での単独方程式の局所接触同値性をいうには、π を保つ R の局所微分同型を与えればよい。

次に、局所同値性が局所可解性に帰着される方程式を与えよう。直積空間 $M \times M$ の第1成分への射影を p_1、第2成分への射影を p_2 とする。次の *submersion* を考える：

$$\nu : J^1(M,\mathbb{R}) \times J^1(M,\mathbb{R}) \longrightarrow J^1(M \times M;\mathbb{R})$$
$$(\,j^1_{z_1}(f),\ j^1_{z_2}(g)\,) \longmapsto j^1_{(z_1,z_2)}(p_1^*f - p_2^*g)$$

座標で書けば、$((x,u,p),(x',u',p')) \longmapsto (x,x',u-u',p,-p')$ である。

R_1, R_2 を $J^1(M,\mathbb{R})$ の超曲面（単独方程式）とし、x_1, x_2 をそれぞれの方程式の特異点とする。ν の $R_1 \times R_2 \subset J^1(M,\mathbb{R}) \times J^1(M,\mathbb{R})$

への制限を考えると、

$$\nu : R_1 \times R_2 \longrightarrow J^1(M \times M, \mathbb{R})$$

は、(x_1, x_2) の近傍で immersion となる。座標で書けば、

$((x, f(x,p), p), (x', f'(x',p'), p')) \longmapsto (x, x', f-f', p, -p')$ である。

よって、$\hat{R} = \nu(R_1 \times R_2) \subset J^1(M \times M, \mathbb{R})$ は、$J^1(M \times M, \mathbb{R})$ の単独方程式となり、(x_1, x_2) は $\hat{R}$ の特異点である。

次の命題を示そう。

命題 3（[L] Chap. IV §1 p 151）

R_1, R_2 を $J^1(M, \mathbb{R})$ の単独方程式とし、x_1, x_2 をそれぞれの方程式の特異点とする。このとき、次は同値である。

(i) (R_1, x_1) と (R_2, x_2) は、局所 弁-同値である。

(ii) $\hat{R} = \nu(R_1 \times R_2)$ の局所解（Legendre 部分多様体）S で (x_1, x_2) を通り

(※) $(q_i)_* : T_{(x_1, x_2)}(S) \longrightarrow T_{x_i}(R_i)$: linear iso. $(i = 1, 2)$

を満たすものが存在する。ここに、$q_i : R_1 \times R_2 \to R_i$: 射影である。

(i) ⇒ (ii) $J^1(M \times M, \mathbb{R})$ 上の canonical contact form の $\hat{R}$ への制限を θ とすると、ν の定義より

$$\theta = d(f-f') - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i + \sum_{i=1}^{n} p_i' dx_i' = \pi_1 - \pi_2$$

となる。従って、$\varphi : R_1 \to R_2$: 局所微分同型 $(\varphi(x_1) = x_2)$ に付

して、φ の graph$\{(x,\varphi(x))\} = \Gamma$ は、$R_1\times R_2$ の部分多様体であるが、$\varphi^*\pi_2 = \pi_1 \iff \nu(\Gamma)$: Legendre 部分多様体となる。

(ii) ⇒ (i) 条件(※)より、S は (x_1, x_2) の近傍で、$\exists^1 \varphi : R_1 \to R_2$ 局所微分同型 $(\varphi(x_1) = x_2)$ の graph となるから上記より、φ は $\varphi^*\pi_2 = \pi_1$ を満たす。

最後に、$\hat{R}$ において、$\hat{x} = (x_1, x_2)$ を通る解 S が存在するための条件を考えよう。特に Legendre 部分空間 $T_{\hat{x}}(S)$ の満たすべき性質を考察する。$\hat{x}$ は $\hat{R}$ の特異点であるから、$T_{\hat{x}}(\hat{R}) = C(\hat{x})$ であり、$(T_{\hat{x}}(\hat{R}), d\theta)$ は、symplectic ベクトル空間である。$T_{\hat{x}}(\hat{R})$ を $T_{x_1}(R_1)$ と $T_{x_2}(R_2)$ の直和と同一視するとき、$\theta = \pi_1 - \pi_2$ より、$T_{\hat{x}}(\hat{R})$ は symplectic ベクトル空間の直和

$$(T_{\hat{x}}(\hat{R}), d\theta) = (T_{x_1}(R_1), d\pi_1) \oplus (T_{x_2}(R_2), -d\pi_2)$$

となる。すなわち $\langle v_1 + v_2, w_1 + w_2\rangle = \langle v_1, w_1\rangle_1 - \langle v_2, w_2\rangle_2$, $v_i, w_i \in T_{x_i}(R_i)$ $(i = 1, 2)$ である。よって、Hessian は $h_\theta = h_{\pi_1} - h_{\pi_2}$ であるが、上の直和の下、$H_{\hat{x}} = H_{x_1} \oplus H_{x_2}$ となる。

このとき、$T_{\hat{x}}(\hat{R})$ の Legendre 部分空間 L に対して、

$$h_\theta|_L = 0 \iff L : H_{\hat{x}}\text{-不変}$$

である。また、$A : T_{x_1}(R_1) \to T_{x_2}(R_2)$: linear iso. に対して、$L = \{v + Av \in T_{\hat{x}}(\hat{R}) \mid v \in T_{x_1}(R_1)\}$ なる $T_{\hat{x}}(\hat{R})$ の部分空間を考えると、

$$L : \text{Legendre}\text{部分空間} \iff A : \text{symplectic 同型}$$

が成立する。さらに、このLが$H_{\hat{x}}$-不変なるとき、Aは

$$A \cdot H_{x_1} = H_{x_2} \cdot A$$

を満たしている。従って、次を得た。

補題4（[L] Chap IV §2 p153）

(1) $\hat{x}$を通る解Sで(※)を満たすものが存在すると、$L = T_{\hat{x}}(S)$は$T_{\hat{x}}(\hat{R})$の$H_{\hat{x}}$-不変Legendre部分空間であり、H_{x_1}とH_{x_2}はsymplectic同値となる。さらに、$\hat{A} \cdot H_{x_1} = H_{\hat{x}}|_L \cdot \hat{A}$より、$H_{\hat{x}}|_L$のJordan標準形は$H_{x_1}$のそれと一致する。ここに、$\hat{A}(v) = v + A(v) \in L$，$v \in T_{x_1}(R_1)$。

(2) 逆に、H_{x_1}とH_{x_2}がsymplectic同値（i.e., $^\exists A : T_{x_1}(R_1) \to T_{x_2}(R_2)$: symplectic同型 s.t. $A \cdot H_{x_1} = H_{x_2} \cdot A$）なるとき、

$$L = \{ v + Av \mid v \in T_{x_1}(R_1) \} \subset T_{\hat{x}}(\hat{R})$$

は、$H_{\hat{x}}$-不変Legendre部分空間である。

すなわち、$\hat{x} = (x_1, x_2)$を通る$\hat{R}$の解Sで(※)を満たすものの存在には、H_{x_1}とH_{x_2}がsymplectic同値なることが、必要条件であり、そうであるとき、(2)のLは、解の$\hat{x}$での初期条件を与えている。

5. $\hat{R}$の特異点における局所可解性

この節では 4 で得た単独方程式 $\hat{R}$ の特異点での局所可解性についての結果を述べる。証明は それぞれの文献をあたられたい。

存在定理は 考える範疇によって様相が異なる。まず 形式巾級数解について 次がある。これは 3 における座標を適当に取り直して 解の3次以上の Taylor 展開の係数を見て行けばよい。

定理5 ([L] Chap IV §2 p156)

R を $J^1(M, \mathbb{R})$ の単独方程式として x をその特異点とする。$T_x(R)$ の H_x-不変 Legendre 部分空間 L に対して $H_x|_L$ の固有値 $\{\lambda_i\}$ が

$$(*) \qquad \sum_i m_i\lambda_i \neq 1 \qquad \text{for } {}^\forall m_i \in \{0, 1, 2, \cdots\} \text{ s.t. } \sum_i m_i \geqq 3$$

を満たす時 形式解 S で $T_x(S) = L$ なるものが 唯一つ存在する。

C^∞-解について、次がある。証明には ベクトル場の特異点における標準形についての K.T. Cheng の結果が用いられる。

定理6 ([L] Chap V §1 p169)

R を $J^1(M, \mathbb{R})$ の単独方程式として x をその特異点とする。$T_x(R)$ の H_x-不変 Legendre 部分空間 L に対して $H_x|_L$ の固有値が $(*)$ を満たす時 C^∞-解 S で $T_x(S) = L$ なるものが存在する。

我々が求めるのは、方程式の退化した点での解であるから、定理5は、解析的解の存在(収束性)を意味しない。複素解析的範疇での 解の収束性については、次の preprint を参照されたい:

S. M. Webster : A normal form for a singular first order partial differential equation. University of Minesota Mathematics Report 85-114

上記定理と、命題3、補題4とを組み合わせると 単独方程式 R とその特異点 x に対して、Hessian H_x の固有値が (*) を満たせば、R は $\hat{}$-diffeo. で、3. で考察した標準形に、移ることがわかる。また、命題1により、包合系 R は、特異点 x において、H_x の固有値が (*) を満たせば、接触変換によって、標準形に移ることが結論される。