数理解析研究所講究録
第620巻 1987年 1-69

融合積分解とその応用

大阪大 前田 亨(Toru MAEDA)

群の融合積は、Van Kampen－Seifertの定理にみられるように、空間の基本群(よって、空間)の研究に於て基本的に重要なことは、知られている通りである。これは、融合積が、無限群の構造研究で、いかに中心的かを示している。本稿では、次の5つの講演において、群の融合積、その意味での有限表示群の分解(特に、或る1つの部分群に関する既約因子への分解 — star decomposition)の基本問題と、それに関した幾つかの結果を述べる。結び目、絡み目理論等への応用が、後半で扱われる。

講演項目

講演1： Amalgamated Decompositions

講演2： Star Decompositions of Groups along splitting Cyclic Groups

講演3： Existence of Factorizations for Links & Surfaces

講演4： Group of Knot Groups

講演5： A Note on Groups of Composite Knots

有限群論は、単純群の分類の完成によって、その構造研究の才1段階を終えるという大成果を得た。一方、無限群論、特に有限表示群の構造論においては、分類不可能性が知られている（［１］）。この様な状境下で、有限表示群の構造研究の限界と方法を見い出すことが問題である。現時点で、私が最も基本的にすべきだと思うことは、(Ⅰ)群の構成法と分解、(Ⅱ)群の表現論 である。そして、具体的に与えられた群の構造を明らかにする（重要な群のclassの考擦をする）ことである。

(Ⅰ) の群の構成法のうち、中心的なものは、次の

3つである。

構成法 1（群の正規拡大）

群 N, H と、写像 $\varphi : H \to \mathrm{Aut}\, N$　　$\xi : I \times H \to N$

s.t.　$\varphi(v)(\varphi(u)(a)) = \xi(u,v)^{-1} \cdot \varphi(uv)(a) \cdot \xi(u,v)$

$\xi(uv,w) \cdot \varphi(w)(\xi(u,v)) = \xi(u,vw) \cdot \xi(v,w)$

$((1,1) = 1$　,　$a \in N$, $u, v, w \in H$

が与えられたとき、集合 $G = H \times N$ に対し、積を、

$$(h_1, n_1) \cdot (h_2, n_2) = (h_1 \cdot h_2,\ \xi(h_1, h_2) \cdot \varphi(h_2)(n_1) \cdot n_2)$$

と定義すると、G は群になる。これを N の正規拡大、または、N の H による拡大といい、$E(N, H, \varphi, \xi)$ と書く。

N は、写像 $n \longrightarrow (1, n)$ により、自然に G の正規部分群として埋め込まれ、$G/N \cong H$ である。

この方向からの群の分解が、"*subnormal series*" であり、有限群に対しては、Schreier の細分定理に基づく、*composition series* に関する *Jordan-Hölder* の定理が本質的である。重要な *subnormal series* としては、アーベル群との関係で、*derived series* や *lower central series* 等がある。

構成法 2 (HNN拡大)

群Sと、その部分群 C 及び D、更に、同型写像 $\psi: C \xrightarrow{\cong} D$ が与えられたとき、

$$G = S*\langle t: \rangle \big/ \langle\, t^{-1}ct\psi(c^{-1}) \mid c \in C \,\rangle^{S*\langle t: \rangle}$$

(自由積 $S*\langle t: \rangle$ の、そこでの $\{t^{-1}ct\psi(c^{-1}) \mid c \in C\}$ の *normal closur* $\langle\, t^{-1}ct\psi(c^{-1}) \mid c \in C \,\rangle^{S*\langle t: \rangle}$ による商群)を、Sの<u>HNN拡大</u>といい、$HNN(S,\psi)$ と書き表わす。 Sは、Gの *base group*、C、D は、*associated subgroups* と呼ばれる。 Gは常に無限群である。

Sは、自由積 $S*\langle t: \rangle$ に自然に埋め込まれるが、それは、$S*\langle t: \rangle$ から G への自然な全準同型写像により、$G = HNN(S,\psi)$ にも埋め込まれる。

よって、与えられた群 G が、その或る部分群 S に対し、$G = HNN(S,\psi)$ となれば、Gは、$HNN(S,\psi)$ と分解されたと言ってよいであろう。何故なら、Gの構造は、Sの構造と ψ の作用とで理解されるからである。 与えられた群を、HNN拡大の積み重ねとして、構造研究するのも、1つの方法であろう。

或る群 G が、ある部分群の HNN 拡大となっているとき、G は、HNN 拡大の構造をもつと呼ぶことにする。明らかに、これは、G から、無限巡回群の上への準同型写像が存在する（i.e. G が、無限巡回群 $\langle t : \rangle$ による（*splitting*）*extension* になっている）ことと同値である。$S \lhd \mathrm{HNN}(S,\psi)$ になるのは、$S = C = D$ のとき。

Example 0.1　$T = \langle x : \rangle$，無限巡回群，とし、φ を、$\varphi(x) = x^{-1}$ で与えられる T の自己同型写像とすると、群 $S = HNN(T,\varphi) = \langle x, y : y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$ を得る。S を T の $\langle y : \rangle$ による拡大 $E(T, \langle y : \rangle, \varphi, \xi)$，$\xi(y_1, y_2) = 1$，$y_1, y_2 \in \langle y : \rangle$，と考えてもよい。更に、$\psi$ を、$\psi(x) = y$ で与えられる T から $\langle y : \rangle$ への同型写像とすると、$G = HNN(S,\psi)$ を得る。., $t : y^{-1}xy = x^{-1}$, $t^{-1}xt = y \rangle = \langle x, t : t^{-1}x^{-1}txt^{-1}xt = x^{-1} \rangle$ を得る。このとき、G から無限巡回群上へのいかなる準同型写像の *kernel* も、有限生成群とはなれない。

構成法 3 （融合積）

群 A、B と、それぞれの部分群 C、D、更に、同型写像 $\varphi : C \xrightarrow{\cong} D$ が与えられたとき、自由積 $S =$

A * B の商群

$$G = A*B / \langle c\varphi(c^{-1}) \mid c \in C \rangle^{A*B}$$

を、AとBの、C（又は、D）を融合部分群とする融合積といい、$A \underset{\varphi}{*} B$ 又は、$A \underset{c_i = \varphi(c_i)}{*} B$ （但し、$\{c_i\}$ は、Cの生成系）と、書き表わす。明らかに、$C = 1$ のときが、AとBの自由積であり、AとBは、自然に埋め込まれている。A，Bは更に、$S = A * B$ から G への自然な全準同型写像により、G にも埋め込まれる。

<u>Remark</u> 0.2　融合積 $A \underset{\varphi}{*} B$ は、自由積 $A * B$ の HNN 拡大の商群 $HNN(A*B, \varphi) / \langle t \rangle^{HNN(A*B, \varphi)}$。

<u>Remark</u> 0.3　$G = A \underset{\varphi}{*} B$，$\varphi : C \xrightarrow{\cong} D$，が有限群になるのは、A，B 共に有限群で、$A = C$ 又は、$B = D$ のときに限る。また、$A \trianglelefteq G$ となるのは、$A = C$、$D \trianglelefteq B$ のときに限る。

<u>Example</u> 0.4　$A = \langle x : x^4 = 1 \rangle$，$B = \langle y : y^6 = 1 \rangle$，$C = gp(x^2)$，$D = gp(y^3)$，$\varphi : C \xrightarrow{\cong} D$ を $\varphi(x^2) = y^3$ とすると、$G = A \underset{\varphi}{*} B = A \underset{x^2 = y^3}{*} B = \langle x, y : x^4 = y^6 = 1,$

$x^2 = y^3 >$。この群 G を正規拡大の立場から見てみよう。$\mathbb{Z}_n$ を、位数 n の巡回群とする。G の centre は、$gp(x^2) \cong \mathbb{Z}_2$ で、$G/gp(x^2) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$。よって、$G$ は、$\mathbb{Z}_2$ の $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ による中心拡大となっている。また、y の G における normal closur $\langle y \rangle^G \cong \mathbb{Z}_6 * \mathbb{Z}_6$ で、$G/\langle y \rangle^G \cong \mathbb{Z}_2$ であるから、$\mathbb{Z}_6 * \mathbb{Z}_6$ の $\mathbb{Z}_2$ による拡大とみることも出来る。一方、G の1次元 homology 群 $H_1(G) \cong G/[G,G]$（$[G,G]$ は、G の交換子群）は、$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$ と同型であるから、HNN 拡大の構造は有しない。

群が、HNN 拡大又は、融合積の構造をもつことの特徴付けが、次の　通りになされている：

　　樹グラフに作用する、

任意の有限表示群は、2次元複体又は、5次元多様体の基本群として実現できる。このことから、有限表示群の研究と（compact）多様体、複体の研究は、互いに深く掛り合っている。例えば、構成法 1，2，3 は、多様体論の構成法で基本的な、ファイバー空間、mapping torus，連結和に、それぞれ対応している。

低次元多様体論においては、多様体の構造と、その基本群との関係は密接で、早くから、その重要性が知られていた。Walthausen [2] 等の仕事があり、近年では、Thurstonの登来により、更に、その関係の意味、重要性を深めていることは、特記すべきであろう。そこにおいても、上記3つの構成法は、中心的であり、加えて、表現論の重要性も、本質的になって来た。表現は、有限単純群の分類で知られている置換群、Lie群、更に、群環への表現であり、これにより、群の構造（部分群束，準同型、性質）が、1つ1つ明らかになって来ている。勿論，それに対応する幾何学的構造もである。

講演1 Amalgamated Decompositions

本講演の目的は、融合積を再定義し、それに基づく星型分解（star decomposition）と、義と、そこでの基本問題を考えることにある。星型分解に関する細分定理、異なる星型分解の例、唯一分解の為の十分条件等が与えられる。

§1. Amalgamations

A. Pairs

Definition 1.1　群 X に対し、

$$\mathcal{C}_X = \{ \langle G, \varphi \rangle \text{（対）} \mid (1)\ G \text{は群}\ (2)\ \varphi : X \to G : \text{embedding} \}$$

と定義する。

Definition 1.2　$\langle G_1, \varphi_1 \rangle, \langle G_2, \varphi_2 \rangle \in \mathcal{C}_X$ に対し、G_1 から G_2 への同型写像 h で、$h \circ \varphi_1 = \varphi_2$ となるものが存在するとき、$\langle G_1, \varphi_1 \rangle$ と $\langle G_2, \varphi_2 \rangle$ は同型であるといい、$\langle G_1, \varphi_1 \rangle \cong \langle G_2, \varphi_2 \rangle$、あるいは、$h : \langle G_1, \varphi_1 \rangle \xrightarrow{\cong} \langle G_2, \varphi_2 \rangle$ と書き表わす。

明らかに、'$\cong$'は、$\mathcal{C}_X$ 上の同値関係である。$\mathcal{C}_X/\cong$ を、C_X で、$\langle G, \varphi \rangle$ の同型類を、(G, φ) で書く。例えば、$C_{\{1\}}$。この場合には、$\mathcal{C}_{\{1\}}$ で、$\langle G_1, \varphi_1 \rangle \cong \langle G_2, \varphi_2 \rangle$ と、$G_1 \cong G_2$ は、同値であるから、$C_{\{1\}}$ = 抽象群全ての集り、と思ってよい。

Example 1.3　X を、$\mathbb{Z}_3 = \langle s : s^3 = 1 \rangle$, 位数 3 の巡回群、とする。$G = \mathbb{Z}_m = \langle t : t^m = 1 \rangle$、位数 m の巡回群、とする。$3 \nmid m$ ならば、$\mathbb{Z}_m$ は $\mathbb{Z}_3$ を部分群に含まないから、$\mathbb{Z}_m$ を群部分にもつ pair は、$C_{\mathbb{Z}_3}$ には存在しない。$m = 3m'$ ならば、$\{1, t^{m'}, t^{2m'}\}$ が、$\mathbb{Z}_m$ の唯一の位数 3 の部分群である。$\mathbb{Z}_3$ には、唯一の外部自己同型写像 $\rho(s) = s^2$ がある。この ρ が導く $\{1, t^{m'}, t^{2m'}\}$ の同型交換が、$\mathbb{Z}_m$ の自己同型に拡張されるか否かが、$\mathbb{Z}_m$ を群部分にもつ pair を、$C_{\mathbb{Z}_3}$ 中で考えるときには問題となる。φ_m を、$\varphi_m(s) = t^{m'}$ なる $\mathbb{Z}_3$ から $\mathbb{Z}_m$ への準同型写像とすると、$2 \nmid m'$ のとき、$\langle \mathbb{Z}_m, \varphi_m \rangle \cong \langle \mathbb{Z}_m, \varphi_m \circ \rho \rangle$、$2 | m'$ のとき、$\langle \mathbb{Z}_m, \varphi_m \rangle \not\cong \langle \mathbb{Z}_m, \varphi_m \circ \rho \rangle$ となる。$C_{\mathbb{Z}_3}$ 中、$\mathbb{Z}_m$ を群部分にもつ pair は、前者の場合、1つ、後者の場合には、2つ存在することになる。この様に、pair の考え方では、G 中の X の埋め込

まれた像だけでなく、その埋め込まれ方までが重要となる。

Example 1.4　Xを、$\mathbb{Z}=\langle s:\rangle$、無限巡回群、かつ、$G$も、無限巡回群 $\langle t:\rangle$ とする。自然数 m に対し、φ_mを、$\varphi_m(s)=t^m$ で定まる$\mathbb{Z}$からGへの準同型写像とする。このとき、(G,φ_m), $m=1,2,\cdots$，が、$C_{\mathbb{Z}}$ 中、無限巡回群を群部分にもつ全ての異なる pair を与えている。

以上、最も簡単な例をみたが、X, Gを種々考え、φをいろいろと取ることにより、興味ある例達、たくさん見付け、また、構成することが出来る。（[3]、本講演4, 5 も参照されたい。）

B. Product

Definition 1.5　群Xの1つの生成系を $\{x_i\}_{i\in I}$ とする（ここでは、便義上、fix させておく）。$\langle G_1,\varphi_1\rangle$, $\langle G_2,\varphi_2\rangle \in \mathcal{C}_X$ に対し、

$$\langle G_1,\varphi_1\rangle * \langle G_2,\varphi_2\rangle = \langle G_1 \underset{\varphi_1(x_i)=\varphi_2(x_i)}{*} G_2 ,\ \varepsilon_1\circ\varphi_1\ (=\varepsilon_2\circ\varphi_2)\rangle$$

と定義し、$\langle G_1,\varphi_1\rangle$ と $\langle G_2,\varphi_2\rangle$ の融合積（amalgamated product）と呼ぶ。ε_1，ε_2 は、それぞれ G_1，G_2 の $G_1 \underset{\varphi_1(x_i)=\varphi_2(x_i)}{*} G_2$ への自然な埋め込み写像である。

準定理 1.6　抽象群 X と、任意の $\langle G_k,\varphi_k\rangle\in\mathcal{C}_X$，$k=1,2,3,4$，に対し、

(1)　$\langle G_1,\varphi_1\rangle * \langle G_2,\varphi_2\rangle \in \mathcal{C}_X$

(2)　$\langle G_1,\varphi_1\rangle * \langle X, id_X\rangle \cong \langle G_1,\varphi_1\rangle$

(3)　$\langle G_1,\varphi_1\rangle \cong \langle G_2,\varphi_2\rangle$ かつ $\langle G_3,\varphi_3\rangle \cong \langle G_4,\varphi_4\rangle$

ならば、$\langle G_1,\varphi_1\rangle * \langle G_3,\varphi_3\rangle \cong \langle G_2,\varphi_2\rangle * \langle G_4,\varphi_4\rangle$

証明．自明なので省略。

このことより、‘$*$’は、$\mathcal{C}_X$ の内部演算を定義し、‘$\cong$’は、この演算に対し、合同関係となる。(2) と合わせて次を得る：

定理 1.7　抽象群 X に対し、$\mathcal{C}_X$ は積‘$*$’に関し、単位元 (X, id_X) をもつ可換半群となる。

$$(G_1, \varphi_1) * (G_2, \varphi_2) = (\langle G_1, \varphi_1 \rangle * \langle G_2, \varphi_2 \rangle)$$

を (G_1, φ_1), (G_2, φ_2) $(\in C_X)$ の融合積と呼ぶ。

Remark 1.8　$X = \{1\}$ のときが、自由積に相当する。

$\mathbb{C}$. Subclasses

現実の研究では、C_X よりは、その或る条件を満たす subclass が、興味深かったり、重要である場合がほとんどである。そこで、積 '$*$' と、subclass に関する自然ないくつかの定義と、基本的な subclass の例を幾つか述べることにする。

Definition 1.9　抽象群 X に対し、C_X の subclass $\mathfrak{D} \neq \phi$ が、('$*$' に関して) closed であるとは、$\mathfrak{D}$ が、C_X の上記半群構造に関して部分半群をなすこと。i.e. $(G_1, \varphi_1), (G_2, \varphi_2) \in \mathfrak{D}$ ならば、$(G_1, \varphi_1) * (G_2, \varphi_2) \in \mathfrak{D}$。

Definition 1.10　C_X の (closed な) subclass $\mathfrak{D}$ が、完全 (complete) であるとは、任意の $(G_1, \varphi_1), (G_2, \varphi_2) \in C_X$ に対し、$(G_1, \varphi_1) * (G_2, \varphi_2) \in \mathfrak{D}$ ならば、(G_1, φ_1),

$(G_2, \varphi_2) \in \mathcal{D}$ となること。（このとき、明らかに、$(X, id_X) \in \mathcal{D}$。）

基本的な subclass を4つ定義しておく：

抽象群 X に対し、

$$FG_X = \{ (G, \varphi) \in C_X \mid G \text{は、有限生成群} \}$$

$$FP_X = \{ (G, \varphi) \in C_X \mid G \text{は、有限表示群} \}$$

$$NR_X = \{ (G, \varphi) \in C_X \mid \varphi(X) \lhd G \}$$

$$SP_X = \{ (G, \varphi) \in C_X \mid G \text{の或る正規部分群} N \text{に対し、} 1 \longrightarrow N \longrightarrow G \overset{\varphi}{\leftrightarrows} X \longrightarrow 1 \text{ ; split} \}$$

とする。

準定理 1.11 (1) 任意の群 X に対し、

1) FG_X は、closed，

2) FG_X が complete $\Longleftrightarrow$ X が、有限生成

準定理 1.12 （G. Baumslag [4]）

FP_X が closed $\Longleftrightarrow$ X が、有限生成群。

Remark 1.13 有限表示をもたない有限生成群 X で、

$FP_X \neq \phi$ なるものがある。

準定理 1.14　任意の群 X に対し、NR_X は、completely closed。

Note 1.15　$(G, \varphi) = (G_1, \varphi_1) * (G_2, \varphi_2) \in NR_X$ ならば、$G/\varphi(X) \cong (G_1/\varphi_1(X)) * (G_2/\varphi_2(X))$（自由積）。

準定理 1.16　任意の群 X に対し、SP_X は、completely closed。

Note 1.17　$(G, \varphi) = (G_1, \varphi_1) * (G_2, \varphi_2) \in SP_X$.

$$1 \longrightarrow N_1 \longrightarrow G_1 \overset{\varphi_1}{\rightleftarrows} X \longrightarrow 1 \quad : \text{split}$$
$$1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow G_2 \overset{\varphi_2}{\rightleftarrows} X \longrightarrow 1 \quad : \text{split}$$
$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \overset{\varphi}{\rightleftarrows} X \longrightarrow 1 \quad : \text{split}$$

ならば、$N \cong N_1 * N_2$（自由積）。

証明。[3 . Prop 2.1.4] の証明参考。

D. Decompositions. (star decomposition)

Definition 1.18　X を群，E を C_X の closed な subclass とする。$(G, \varphi) \in E$ が，E で prime（又は，indecomposable, irreducible）とは，

(1)　$(G, \varphi) \neq (X, id_X)$，かつ，

(2)　(G, φ) は，E の 2 つの pair の積にならないか，

(3)　$(G, \varphi) = (G_1, \varphi_1) * (G_2, \varphi_2)$，$(G_1, \varphi_1), (G_2, \varphi_2) \in E$ ならば，$(G_1, \varphi_1) = (X, id_X)$ 又は，$(G_2, \varphi_2) = (X, id_X)$。

となることである。特に，「E で」と断わらない場合は，「C_X で」という意味である。

Definition 1.19　同じ X，E に対し，

$$(G_1, \varphi_1) * \cdots * (G_n, \varphi_n) \quad , \quad n < \infty$$

が，$(G, \varphi) \in E$ の素因子分解であるとは，各 (G_i, φ_i) が，E で prime かつ $(G, \varphi) = (G_1, \varphi_1) * \cdots * (G_n, \varphi_n)$。

II. 基本問題

問題 I（埋め込み問題）　群 X の 1 つの生成集合 $A = \{a_k\}$ に対し，$\varphi : A \to$ 群 G が与えられたとき，

φは、XからGへの単射準同型写像に拡張できるか。

問題II（同型問題）$\langle G_1, \varphi_1 \rangle$, $\langle G_2, \varphi_2 \rangle \in \mathcal{C}_X$に対し、$\langle G_1, \varphi_1 \rangle \cong \langle G_2, \varphi_2 \rangle$か否かを判断しろ。

問題II′（分類問題）$\mathcal{C}_X$に対し、又は、そのsub-classesに対し、同型類を分類せよ。

問題III（素因子性問題）$(G, \varphi) \in \mathcal{C}_X$に対し、それが、与えられた$\mathcal{C}_X$のsubclass Eでprimeか否かを判定せよ。

問題III′（素因子分類問題）$\mathcal{C}_X$とそのsubclass Eに対し、Eでprimeな$\mathcal{C}_X$のpairを分類せよ。

問題IV（素因子分解の存在性問題）$(G, \varphi) \in \mathcal{C}_X$と$\mathcal{C}_X$の部分class Eに対し、$(G, \varphi) \in E$の素因子分解が存在するか。

問題V（素因子分解の比較問題）$(G, \varphi) \in \mathcal{C}_X$のsub-class Eに関する2つの素因子分解が与えられたとき、

それらを比較せよ。

問題Ⅴ′（唯一性問題）　$(G, \varphi) \in C_X$ と subclass E （$(G, \varphi) \in E$）に対し、(G, φ) のEに関する素因子分解は唯一であるか。

（注意）一般には唯一ではない。

問題Ⅴ″（一般比較問題）　$(G, \varphi) \in C_X$，$(G, \psi) \in C_Y$ に対し、それぞれの C_X，C_Y に関する素因子分解を比較せよ。

これら5種9つの問題をここでは基本問題と名付けることにする。　自由積の場合、Ⅰは 語の問題、Ⅱは 同型問題 、Ⅳは、Wagner - Grushko - Neumann の定理より肯定的 、Ⅴは 一般化された Nielsen 変換の話しとなる。

証明は省略するが、比較問題に関して、次の定理が Karrass - Solitar の部分群定理（[5]）より示せた：

定理1.20（細分定理）　$(G,\varphi)\in\mathcal{C}_X$ の素因子分解

$$(G,\varphi)=(A_1,\varphi_1)*\cdots*(A_m,\varphi_m)$$
$$=(B_1,\psi_1)*\cdots*(B_n,\psi_n)$$

に対し、A_p, B_q の樹積又は、樹積のHNN拡大としての表現で、A_p の頂点に対応する群の p 全体に渡る族と、B_q の、頂点に対応する群の q 全体に渡る族との間に、全単射な対応があって、それぞれ対応する群が同型になるものが存在する。m, n は一般には等しくない。

この定理の系として、[3], Theorem 2.2.7, (3) が証明される。i.e. knot-like groups と呼ばれる class に対し、分解の唯一性が示せる。

講演2 Star Decompositions of Groups along Splitting Cyclic Groups

我々は、結び目群の pair（定義3.　）を含むものとして、次の様な $C_{\mathbb{Z}}$ の部分半群

$$C = \left\{ (G, \varphi) \in C_{\mathbb{Z}} \;\middle|\; \begin{array}{l} (1)\ G \text{ は、有限表示、} \\ (2)\ G/[G,G] \cong \mathbb{Z} = \langle t : \rangle \\ (3)\ \varphi(1)[G,G] \text{ は } G/[G,G] \text{ を生成する} \end{array} \right\}$$

について、前講演での基本問題を考える。これについては、以前［3］において述べたが、Existence Problem に関しては、証明が不十分であったので、次の唯一性定理、存在定理のうち、存在の方を証明する。

存在定理 2.1　C は completely closed で、任意の C の pair は、素因子分解をもつ。

唯一性定理 2.2　C の任意の pair の素因子分解は、唯一である。

§ 2.1 存在定理の証明

群拡大の立場から $(G,\varphi)\in\mathcal{C}$ を見ると、

$$1 \longrightarrow [G,G] \longrightarrow G \overset{\varphi}{\rightleftarrows} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

は、*splitting extension* となっている。そこで、Gの交換子群 $[G,G]$ と、積 $*$ の関係については、次が基本的である。

<u>定理</u>2.3 ([3], *Prop*. 2.1.4) (*Note* 1.17)
$(G_1,\varphi_1),(G_2,\varphi_2)\in\mathcal{C}$ に対し、$(G,\varphi)=(G_1,\varphi_1)*(G_2,\varphi_2)$ ならば、$[G,G]=[G_1,G_1]*[G_2,G_2]$（自由積）である。

準定理 2.4 ([3], *Theorem* 2.2.7.(2))
$\mathcal{C}$は、*completely closed* である。

次に、任意の pair $(G,\varphi)\in\mathcal{C}$ に対し、Gは次の様なHNN拡大と見ることが出来る。

<u>定理</u> 4.5 任意の $(G,\varphi)\in\mathcal{C}$ に対し、Gは、$\varphi(1)$を、

free partの生成元とし、有限生成群をbase groupとするHNN拡大となっている。

証明。Gの有限表示の1つを

$$\mathcal{P}_1 = \langle x_1, x_2, \cdots, x_p ; R_1(x_\nu), R_2(x_\nu), \cdots, R_q(x_\nu) \rangle$$

とする。$W(x_\nu)$を、$x_1, x_2, \cdots, x_p$の語で、$\varphi(1)$を表わすものとする。$\mathcal{P}_1$に、generating symbol xを、defining relator $xW(x_\nu)^{-1}$と共に加え、Gの表示

$$\mathcal{P}_2 = \langle x, x_1, x_2, \cdots, x_p ; R_1(x_\nu), R_2(x_\nu), \cdots, R_q(x_\nu), xW(x_\nu)^{-1} \rangle$$

を得る。αを、GからG/[G,G] = $\langle t : \rangle$への、abelianizerで、$\alpha(x) = t$となるものとする。すると、各$\nu = 1, 2, \cdots, p$に対し、$\alpha(x_\nu) = t^{\alpha_\nu}$を得る。そこで、$\mathcal{P}_2$に、generating symbol a_νとdefining relation

(2.6) $\quad a_\nu = x_\nu x^{-\alpha_\nu}$

を加え、次に、(2.6)を$x_\nu = a_\nu x^{\alpha_\nu}$と変え、これを使って、generating symbol x_νを消去することにより、

$$\mathcal{P}_3 = \langle x, a_1, a_2, \cdots, a_p ; R_1(a_\nu x^{\alpha_\nu}), R_2(a_\nu x^{\alpha_\nu}), \cdots, R_q(a_\nu x^{\alpha_\nu}), xW(a_\nu x^{\alpha_\nu})^{-1} \rangle$$

を得る。$R_\lambda(a_\nu x^{d_\nu})$，$xW(a_\nu x^{d_\nu})^{-1}$ をそれぞれ、単に R_λ, R_{q+1} で表わすこととする。今、$R_{\lambda'}$，$1 \leqq \lambda' \leqq q+1$，が、$C_{\lambda'1}^{\varepsilon_{\lambda'1}} C_{\lambda'2}^{\varepsilon_{\lambda'2}} \cdots C_{\lambda' r_{\lambda'}}^{\varepsilon_{\lambda' r_{\lambda'}}}$，ここに $C_{\lambda' j}$ は、generating symbol x, a_ν の1つ、$\varepsilon_{\lambda' j} = \pm 1$，であるならば、$b_{\lambda' j} = C_{\lambda'1}^{\varepsilon_{\lambda'1}} \cdots C_{\lambda' j}^{\varepsilon_{\lambda' j}}$，$j = 1, 2, \cdots, r_{\lambda'}$，とし、$C_{\lambda' j}^{*}$ を、$C_{\lambda' j}$ が a_ν の中であれば、$x^{\sigma_x(b_{\lambda' j-1})} C_{\lambda' j}\, x^{-\sigma_x(b_{\lambda j-1})}$，$C_{\lambda' j}$ が x ならば、1 と定める。但し，$b_{\lambda' 0} = 1$ と考える。また、$\sigma_x(b_{\lambda' j-1})$ は、$b_{\lambda' j-1}$ 中の x の index sum である。一方、$\alpha(x) = t$，$\alpha(a_\nu) = \alpha(x_\nu x^{-d_\nu}) = t^{d_\nu} t^{-d_\nu} = 1$ であるから、$R_{\lambda'} = C_{\lambda'1}^{*\varepsilon_{\lambda'1}} C_{\lambda'2}^{*\varepsilon_{\lambda'2}} \cdots C_{\lambda' r_{\lambda'}}^{*\varepsilon_{\lambda' r_{\lambda'}}}$。次に、$m = \min_{\lambda'} \min_{1 \leqq j \leqq r_{\lambda'}} (\sigma_x(b_{\lambda' j}))$
$M = \max_{\lambda'} \max_{1 \leqq j \leqq r_{\lambda'}} (\sigma_x(b_{\lambda' j}))$ とする。ここで、$\mathcal{P}_3$ の、generating symbol に $a_{\nu k}$，$1 \leqq \nu \leqq p$，$m \leqq k \leqq M+1$，を、defining relator に $a_{\nu k} x^k a_\nu^{-1} x^{-k}$ を、加える。そして、$a_{\nu k} x^k a_\nu^{-1} x^{-k}$ を使って、$R_{\lambda'}$ を全て $a_{\nu k}$ の語に変える。その後、$a_{\nu k'} x^{k'} a_\nu^{-1} x^{-k'}$，$m+1 \leqq k' \leqq M+1$，を、順次、$a_{\nu k'}\, x\, a_{\nu k'-1}^{-1} x^{-1}$ に変える。最後に、$a_{\nu m} x^m a_\nu^{-1} x^{-m}$ を使って、a_ν を generating symbol から消去する。この様にして得られた G の表示は、明らかに、G が、$a_{\nu k}$，$1 \leqq \nu \leqq p$，$m \leqq k \leqq M+1$，で生成される群を base group として、x を（すなわち，$\varphi(1)$ を），free part の生成元とする HNN 拡大であることを表わしている。//

となる。そこで、次の事実に注意する。

(2.11) 任意の $(X, \rho) \in C$ と、有限生成部分群 $H \leq [X, X]$ に対し、$\tilde{X} = X/H^X$, H^X は H の X に於ける正則閉包、とすると、$(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ は C の元である。但し、$\tilde{\rho}$ は、自然な全準同型写像 $X \longrightarrow \tilde{X}$ によって ρ から自然に導びかれる準同型写像である。

(2.12) $(X, \rho) \in C$ に associate した X の HNN 拡大としての表示（定理 2.5）を、

$$\langle x, S : xAx^{-1} = B \rangle$$

とし、H を S の有限生成部分群とする。このとき、補題 2.11 で考えた $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ に associate した HNN 拡大としての $\tilde{X}$ の表示として、

$$\langle x, \tilde{S} : x\tilde{A}x^{-1} = \tilde{B} \rangle$$

が取れる。こゝに、$\tilde{S}, \tilde{A}, \tilde{B}$ は、それぞれ S, A, B の、全準同型写像 $X \to \tilde{X}$ による像である。

（これらの証明は自明であろう。）

注1. associated subgroup も有限生成でとれている。
注2. base group は、決して有限表示になれない場合もある。

以上の準備のもとに、証明にはいろう。そこで、定理2.1が成立しなかったとする。すると、Cの素因子分解をもたないpairが少なくとも1つ存在する。そこで、pairの、定理2.5の意味でのHNN拡大としての全ての構造を、Cの素因子分解をもたないpair全てにわたり考え、その中で、base groupの階数の最小Nを与えるHNN拡大としての構造の1つを

(2.7) $\mathcal{P} = \langle x, S\ ;\ xAx^{-1} = B \rangle$

とし、これを与えるpairを(G, φ)とする。i.e. $\mathcal{P}$はGの表示で，xは$\varphi(1)$を表わし，base group S の階数 $\operatorname{rank} S = N$ である。

補題2.7　Sは、階数Nの自由群である。

証明. (G, φ)は素因子分解をもたない。よって、(G, φ)は既約でないから、$(G, \varphi) = (X_1, \varphi_1) * (Y_1, \psi_1)$、

$(X_1,\varphi_1)\not\cong(\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$，$(Y_1,\psi_1)\not\cong(\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$、と分解できる。すると、$(X_1,\varphi_1)$か$(Y_1,\psi_1)$の少なくとも一方は、素因子分解をもたない。$(Y_1,\psi_1)$がそうであるとする。$(Y_1,\psi_1)$に上記と同じ議論を行うということをくり返すことにより、正の各整数nに対し、(G,φ)の分解

$$(2.8)\qquad \begin{aligned}(G,\varphi) &= (X_n,\varphi_n)*(Y_n,\psi_n),\\ (X_n,\varphi_n) &= (X_{n-1},\varphi_{n-1})*(X_n^*,\varphi_n^*) \quad (\text{但し } n\geqq 2),\\ (Y_n,\psi_n) &= (X_{n+1},\varphi_{n+1})*(Y_{n+1},\psi_{n+1}),\end{aligned}$$

が存在する。$(X_n^*,\varphi_n^*)\not\cong(\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$である。すると、定理2.3より、$[G,G]=[X_n,X_n]*[Y_n,Y_n]$。$S\leq[G,G]$は明らかであるから、$S$に、Kuroshの部分群定理を適用することにより、

$$(2.9)\qquad S = F_u * \left(\mathop{*}_{\xi}(S\cap[X_n,X_n]^{g_\xi})\right) * \left(\mathop{*}_{\mu}(S\cap[Y_n,Y_n]^{h_\mu})\right)$$

F_uは階数uの自由群（$u\leq N$），$g_\xi, h_\mu\in G$。

また、Wagner, Groshko, Neumann の定理により、

$$(2.10)\qquad N = u+\sum_{\xi}\operatorname{rank}(S\cap[X_n,X_n]^{g_\xi}) + \sum_{\mu}\operatorname{rank}(S\cap[Y_n,Y_n]^{h_\mu})$$

これより、まず次が分かる。

(2.13)　任意の n に対し、$S\cap[X_n,X_n]^{g_\xi}=1$.

なんとならば、或る n と g_ξ に対し、$S\cap[X_n,X_n]^{g_\xi}\neq 1$ ならば、(2.10)より、$\mathrm{rank}(S\cap[X_n,X_n]^{g_\xi})$ は有限であるから、$\tilde{G}=G/(S\cap[X_n,X_n]^{g_\xi})^G$ は、(2.12)により表示

(2.14)　$\langle x, S\,;\ xAx^{-1}=B,\ (S\cap[X_n,X_n]^{g_\xi})$ の生成元$\rangle$

を持つ。よって、$\tilde{G}$ の表示として

$$\langle x,\tilde{S}\,;\ x\tilde{A}x^{-1}=\tilde{B}\rangle\ ,\quad \tilde{S}=S/(S\cap[X_n,X_n]^{g_\xi})^S$$

が得られる。すると、(2.9)より、$\mathrm{rank}\,\tilde{S}\lneqq\mathrm{rank}\,S$
また、$(\tilde{G},\tilde{p})\in C$ となり、$\mathrm{rank}\,S$ の最小性に反する。

更に、

(2.15)　$\exists m\quad \forall n>m\quad S\cap[Y_n,Y_n]^{h_\mu}=1$

∵　$\forall n$　$S\cap[Y_n,Y_n]^{h_\mu}\neq 1$ があれば、その正規部分群で(2.12)のように G の剰余群を取れば、

rank $(S \cap [Y_n, Y_n]^{h_n}) < \infty$ より、rank S の最小性に反するCで分解をもたないものがつくれる。

よって、ある適当に大きなnに対し、(2.9) は、$S = F_n$ となり補題は証明された。

補題2.16 $\langle S \cup xSx^{-1} \rangle =$ 自由群

∵ $\langle S \cup xSx^{-1} \rangle \cong \underset{B = xAx^{-1}}{S * (xSx^{-1})}$ となる。この点に注意して、$\langle S \cup xSx^{-1} \rangle$ を自由積 $[X_n, X_n] * [Y_n, Y_n]$ の部分群とみて Kurosh部分群定理を用い、その各自由積の意味の素因子に対し、$\underset{B = xAx^{-1}}{S * (xS^{-1}x^{-1})}$ の部分群として Karrass-Solitar 部分群定理を用いれば、(2.13), (2.15) の条件より、この補題の結果が出る。

Cに属する (G, φ) の条件(2) より、$G/[G,G]$ の簡単な計算より、

(2.17) $\langle S \cup xSx^{-1} \rangle =$ (rank N の自由群).

この議論をくり返すことにより、

(2.18) $\langle S \cup xSx^{-1} \cup \cdots \cup x^kSx^{-k} \rangle =$ (rank$N$

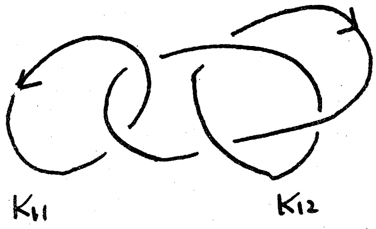
の自由群）　$\forall k < \infty$

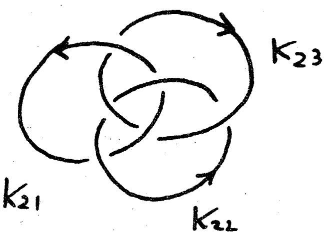
が示せる。よって，(X_n, φ_n) に対し定理4.5を用い HNN拡大で，有限生成な base group，例えば S_x，をもつものとする。すると，或る十分大きな k' に対し $S_x < (S \cup xSx^{-1} \cup \cdots \cup x^{k'}Sx^{-k'})$ になっていると見てよい。そこで，再び，(G, φ) を $(S \cup xSx^{-1} \cup \cdots \cup x^{k'}Sx^{-k'})$ の HNN拡大と見て，$H = S_x$ として，(2.12) を用いれば，Nの最小 rank性に反した C の pair がつくれることとなり矛盾。よって，存在定理は証明された。

講演3 Existence of Factorizations for Links & Surfaces

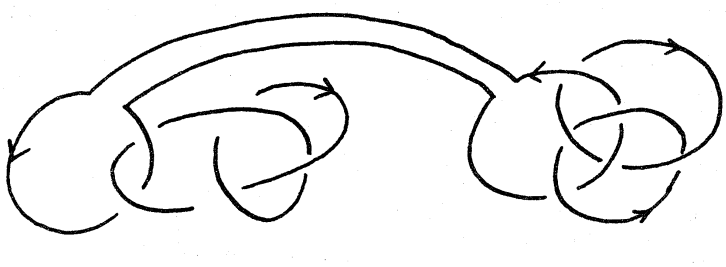
3次元球面S^3中の向きのついた順な絡み目$L_1 = K_{11} \cup \cdots \cup K_{1p}$, $L_2 = K_{21} \cup \cdots \cup K_{2q}$に対し、『積』が、結び目の積の拡張として定義される（[7]）. 簡単に例で示そう。

L_1)

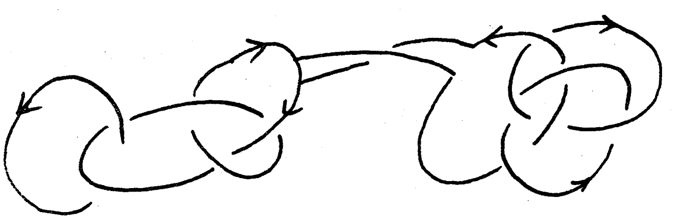




$(L_1 ; K_{11}) \# (L_2 ; K_{21})$ は.



$(L_1 ; K_{12}) \# (L_2 ; K_{21})$



この積に対し、逆に分解が自然に定義されるが、それに関しては、よく知られた次の定理がある：

定理 3.1 (Shubert [6], Hashizume [7])
順な有向絡み目の分解は有限回で終り、分解しきれない素な絡み目まで分解した素因子分解は唯一である。

詳しいことは省略するが、我々の定理 2.1 と、torus 分解に関する T.P. Sharlen の結果([8], Lemma 2.7) を用いれば、この古典的に重要な結果が、Kneser の予想の証明同様に証明される。

//

定理 3.2 この絡み目の積は、自由可換半群をなす。

講演4 Group of Knot Groups

n次元の順な結び目は、合成のもとで、（自由な）可換半群を形成する（定理3.2）。L.P. Neuwirth は、著書『Knot Groups』に於て、この半群に、或る合同関係を定め、n次元結び目群の群なるものを定義した。本講演では、この群の構造を完全に決定する。

定理4.1　全ての正の整数nに対し、n次元結び目群の群は、可算無限次元の自由可換群である。

これは、［9］中の problem I（1次元結び目群の群は、自明でない群か）に、肯定的に答えている。

§4.1　結び目群の群（［9］, Chap.VIII, §4 & §7）

この章では、L.P. Neuwirth の「群の群」（［9］, §3 & §4）を、講演2で取り扱った pair の集り $\mathcal{C}$ の或る性質を満たす subclass に対し、定義、招介する。さらに、この場合には、強い意味での群の群が定義できることを示す。特別な場合として、結び目群の群が最

後に定義される。

$\mathcal{D}$を、$\mathcal{C}$の subclass で、次の条件を満たすものとする：

（条件１） $(\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}}) \in \mathcal{D}$,

（条件２） $(G, \varphi) \in \mathcal{D} \Rightarrow (G, \varphi \circ \iota) \in \mathcal{D}$,

ここに、ι は、$\mathbb{Z}$上の *involution* である。i.e. $\iota(1) = -1$ 。

<u>定義</u> 4.2 $\mathcal{D}$の元の間の関係 $\mathfrak{r}$ (*resp.* $\mathfrak{s}$) を次で定める：

$(G, \varphi)\ \mathfrak{r}\ (K, \psi)$ (*resp.* $(G, \varphi)\ \mathfrak{s}\ (K, \psi)$) とは、群 $G \underset{\varphi(1)=\psi(-1)}{*} K$ の自己同型写像 (*resp.* *involution*) で、その部分群 $\varphi(\mathbb{Z})$ 上の *involution* を誘導するものが存在することである。

<u>Remark</u> 4.3 定義 4.2 は、*well-defind* である。

<u>Claim</u> 4.4 $(G, \varphi)\ \mathfrak{s}\ (K, \psi) \Rightarrow (G, \varphi)\ \mathfrak{r}\ (K, \psi)$。

<u>Claim</u> 4.5 ([9], p.78) $(G, \varphi) * (G, \varphi \circ \iota)\ \mathfrak{s}\ (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$。

関係 r（同様に，s）が、合同関係のうち、*transitivity* 以外を満たすことは、明らかである。関係 r を *transitive* なものにかえる為に、次の関係 $\equiv_{\mathcal{D}}$ が、L.P. *Neuwirth* によって導入された。

<u>定義</u> 4.6　$\mathcal{D}$ の元、(G,φ) と (K,ψ) が、$(G,\varphi) \equiv_{\mathcal{D}} (K,\psi)$ （*resp.* $(G,\varphi) \mathrel{\natural}_{\mathcal{D}} (K,\psi)$）とは、

$$(G,\varphi)\, r\, X_1\, r \cdots\cdots r\, X_N\, r\, (K,\psi)$$
$$\left(\text{resp. } (G,\varphi)\, s\, X_1\, s \cdots\cdots s\, X_N\, s\, (K,\psi)\right)$$

なる $X_1, \cdots, X_N \in \mathcal{D}$，$N < \infty$，が存在することである。

<u>準定理</u> 4.7

（1）$\mathcal{D}/\natural_{\mathcal{D}}$ は、可換群である，

（2）$\mathcal{D}/\equiv_{\mathcal{D}}$ は、$\mathcal{D}/\natural_{\mathcal{D}}$ の商群である。

証明）（1）［9］、*Theorem* 8.4.1 の証明に準ずる。

（2）*Claim* 4.3 より明らか。//

これらの群 $\mathcal{D}/\equiv_{\mathcal{D}}$ 及び $\mathcal{D}/\rho_{\mathcal{D}}$ を、それぞれ、$\mathcal{D}$の群、及び、強い意味での$\mathcal{D}$の群と呼ぶことにする。

n次元結び目の pair の集り$\mathcal{K}_n$は、明らかに、条件1、2を満たす $\mathcal{C}$ の subclass である（[9], Chap.VIII, §7）から、$\mathcal{K}_n$の群、強い意味での$\mathcal{K}_n$の群が定義される。それぞれ、n次元結び目群の群、強い意味でのn次元結び目群の群と呼ぶ。

次の3つの結果は、L.P. Neuwirth による：

定理 4.8（[9], Theorem 8.7.1）$(G,\varphi) \in \mathcal{K}_1$ に対し、
$(G,\varphi) \equiv (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}}) \Rightarrow$ Gの Alexander 多項式は、symmetric。

系 4.9（[9], Corollary 8.7.1）$(G,\varphi), (K,\psi) \in \mathcal{K}_1$ に対し、$(G,\varphi) \equiv (K,\psi)$ ならば、$\underset{\varphi(1)=\psi(-1)}{G * K}$ の Alexander 多項式は、symmetric。

系 4.10（[9], Corollary 8.7.2）Alexander 多項式を持つ2次元結び目の pair の全ての集りは、条件1,2を満たす $\mathcal{C}$ の subclass で、その群は、自明でない。

§ 4.2 関係 $\equiv$ と $\natural$ の素因子分解による特徴付け

この章では、次の定理を証明することを、主目的とする。

<u>定理</u> 4.11　$\mathcal{D}$ を、$\mathcal{C}$ の任意な *closed subclass* で、条件 1 と 2 を満たすものとする。このとき、次が成立：

(1)　$(G,\varphi),(K,\psi)\in\mathcal{D}$ に対し、

$$(G,\varphi)\equiv_{\mathcal{D}}(K,\psi)\Leftrightarrow(G,\varphi)\,\mathfrak{r}\,(K,\psi)$$

$$(G,\varphi)\natural_{\mathcal{D}}(K,\psi)\Leftrightarrow(G,\varphi)\,\mathfrak{s}\,(K,\psi)。$$

(2)　$\mathcal{D}$ の群は、自由可換群である。

(2′)　強い意味での $\mathcal{D}$ の群は、$\mathcal{D}$ の群と、幾つかの位数 2 の巡回群の直和である。

証明は、次の関係 $\mathfrak{r}$ と $\mathfrak{s}$ の、*pair* $(\in\mathcal{C})$ の素因子分解による特徴付けに基づく。

<u>特徴付け補題</u> 4.12　任意の $(G,\varphi)\in\mathcal{C}$ に対し、

(i)　$(G,\varphi)\,\mathfrak{r}\,(\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$ となる為の必要十分条件は、(G,φ) が、同型の意味で、次の様な $\mathcal{C}$ での素因子分

解を持つことである：

$$(4.13)\qquad \Big[\mathop{\ast}_{i=1}^{p}(A_i,\alpha_i)\Big] \ast \Big[\mathop{\ast}_{j=1}^{q}((B_j,\beta_j)\ast(B_j,\beta_j\circ\iota))\Big]、$$

ここに、$(A_i,\alpha_i)\ \mathfrak{r}\ (\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$，$i=1,\cdots,p$，であり、$(B_j,\beta_j)\ \mathfrak{r}\ (\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$ でない，$j=1,\cdots,q$ 。

(ii) $(G,\varphi)\ \mathfrak{S}\ (\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$となる為の必要十分条件は、$(G,\varphi)$が、同型の意味で、次の様な$G$での素因子分解を持つことである：

$$(4.14)\qquad \Big[\mathop{\ast}_{i'=1}^{p'}(A'_{i'},\alpha'_{i'})\Big] \ast \Big[\mathop{\ast}_{i''=1}^{p''}((A''_{i''},\alpha''_{i''})\ast(A''_{i''},\alpha''_{i''}\circ\iota))\Big]$$

$$\ast\Big[\mathop{\ast}_{j=1}^{q}((B_j,\beta_j)\ast(B_j,\beta_j\circ\iota))\Big]、$$

ここに、$(A'_{i'},\alpha'_{i'})\ \mathfrak{S}\ (\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$，$i'=1,\cdots,p'$，であり、$(A''_{i''},\alpha''_{i''})\ \mathfrak{r}\ (\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$、かつ$(A''_{i''},\alpha''_{i''})\ \mathfrak{S}\ (\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$でない、$i''=1,\cdots,p''$、$(B_j,\beta_j)\ \mathfrak{r}\ (\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$でない（よって、$(B_j,\beta_j)\ \mathfrak{S}\ (\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$ でない），$j=1,2,\cdots,q$。

<u>注意</u>。明らかに、

$$\mathop{*}_{i=1}^{p}(A_i,\alpha_i)=\left[\mathop{*}_{i'=1}^{p'}(A'_{i'},\alpha'_{i'})\right]*\left[\mathop{*}_{i''=1}^{p''}((A''_{i''},\alpha''_{i''})*(A''_{i''},\alpha''_{i''}\circ\iota))\right]。$$

<u>(i)の証明。</u>　*Claim* 4.4 と *Claim* 4.5 より、十分性は明らか。必要性を証明する。(G,φ) の $\mathcal{C}$ での素因子分解を、

$$(4.15)\quad \left[\mathop{*}_{i=1}^{p}(A_i,\alpha_i)\right]*\left[\mathop{*}_{j'=1}^{q'}(B_{j'},\beta_{j'})\right]$$

とする。ここに、$(A_i,\alpha_i)\,\Upsilon\,(\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$ (i.e. $(A_i,\alpha_i)\cong(A_i,\alpha_i\circ\iota)$), $i=1,\cdots,p$, であり、$(B_{j'},\beta_{j'})\,\Upsilon\,(\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$ でない (i.e. $(B_{j'},\beta_{j'})\ncong(B_{j'},\beta_{j'}\circ\iota)$), $j'=1,\cdots,q'$。すると，$(G,\varphi\circ\iota)$ の $\mathcal{C}$ での素因子分解は、

$$\left[\mathop{*}_{i=1}^{p}(A_i,\alpha_i\circ\iota)\right]*\left[\mathop{*}_{j'=1}^{q'}(B_{j'},\beta_{j'}\circ\iota)\right]$$

である。今、$(G,\varphi)\,\Upsilon\,(\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$ であるから、$(G,\varphi)\cong(G,\varphi\circ\iota)$。$\mathcal{C}$ の素因子分解唯一性定理により、各 $(B_{j'},\beta_{j'})$ に対し，これに同型な $(B_k,\beta_k\circ\iota)$ が 1対1 に定まる。これは、関係 Υ が、同型で不変な性質 (*Remark* 4.3) であることから、$(A_i,\alpha_i\circ\iota)$ の因子には対応しないことによる。さらに、$(B_{j'},\beta_{j'})\ncong(B_{j'},\beta_{j'}\circ\iota)$ より、$j'\neq k$。この様な、j' を k に対応させる $\{1,2,\cdots,q'\}$ 上の置換を、T とする。T の巡環への分解 ($\nu_1^{(1)},\nu_2^{(1)},\cdots$

$\cdot, \nu_{m_1}^{(1)}) \cdots\cdot (\nu_1^{(t)}, \nu_2^{(t)}, \cdots, \nu_{m_t}^{(t)})$ を考えると、$m_1, \cdots,$ m_t は全て、偶数でなければならない。なんとならば、

$$(B'_{\nu_1^{(s)}}, \beta'_{\nu_1^{(s)}}) \cong (B'_{\nu_3^{(s)}}, \beta'_{\nu_3^{(s)}}) \cong \cdots$$

$$(B'_{\nu_1^{(s)}}, \beta'_{\nu_1^{(s)}} \circ \iota) \cong (B'_{\nu_2^{(s)}}, \beta'_{\nu_2^{(s)}}) \cong (B'_{\nu_4^{(s)}}, \beta'_{\nu_4^{(s)}}) \cong \cdots$$

となり、m_s が奇数ならば、$(B'_{\nu_1^{(s)}}, \beta'_{\nu_1^{(s)}}) \cong (B'_{\nu_1^{(s)}}, \beta'_{\nu_1^{(s)}} \circ \iota)$ となって、矛盾！ よって、

$$\mathop{\ast}_{j'=1}^{q'} (B'_{j'}, \beta'_{j'}) \cong \mathop{\ast}_{s=1}^{t} \Big(\mathop{\ast}_{u=1}^{\frac{m_s}{2}} \big((B'_{\nu_{2u-1}^{(s)}}, \beta'_{\nu_{2u-1}^{(s)}}) \ast (B'_{\nu_{2u}^{(s)}}, \beta'_{\nu_{2u}}) \big) \Big)$$

$$\cong \mathop{\ast}_{s=1}^{t} \Big(\mathop{\ast}^{\frac{m_s}{2}} \big((B'_{\nu_1^{(s)}}, \beta'_{\nu_1^{(s)}}) \ast (B'_{\nu_1^{(s)}}, \beta'_{\nu_1^{(s)}} \circ \iota) \big) \Big)$$

となり、(4.15) より、(4.13) が得られる。

<u>(ii) の証明</u>。 Claim 4.5 より、十分性は明らか。よって、必要性を証明する。Claim 4.4 と (i) より、$(G, \varphi) \not\cong (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ ならば、(4.13) のような素因子分解を、(G, φ) は、$\mathcal{C}$ で持つことになる。そこで、

$$(4.16) \qquad \mathop{\ast}_{i=1}^{p} (A_i, \alpha_i) \cong \Big[\mathop{\ast}_{i'=1}^{p'} (A'_{i'}, \alpha'_{i'}) \Big] \ast \Big[\mathop{\ast}_{i''=1}^{p''} \big((A''_{i''}, \alpha''_{i''}) \ast (A''_{i''}, \alpha''_{i''} \circ \iota) \big) \Big]$$

を示せば良い訳である。証明は、(i) の場合に似ている。$\mathop{\ast}_{i=1}^{p} (A_i, \alpha_i)$ という素因子分解を、並びかえて、

$$\left[\mathop{*}_{i'=1}^{p'}(A'_{i'},\alpha'_{i'})\right] * \left[\mathop{*}_{i'''=1}^{p'''}(A'''_{i'''},\alpha'''_{i'''})\right]$$

ここに、$(A'_{i'},\alpha'_{i'})\ \S\ (\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$ (i.e. involution によって、$(A'_{i'},\alpha'_{i'})\cong(A'_{i'},\alpha'_{i'}\circ\iota)$), $i'=1,\cdots,p'$, であり、$(A'''_{i'''},\alpha'''_{i'''})$ は、$(A'''_{i'''},\alpha'''_{i'''})\ I\ (\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$ ではあるが、$(A'''_{i'''},\alpha'''_{i'''})\ \S\ (\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$ でない (i.e. $(A'''_{i'''},\alpha'''_{i'''})\cong(A'''_{i'''},\alpha'''_{i'''}\circ\iota)$ ではあるが、これは、involution では、導かれない), $i'''=1,\cdots,p'''$, とする。今、$(G,\varphi)\ \S\ (\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$ であるから、群 G の involution ξ で、$\xi\circ\varphi=\varphi\circ\iota$ となるものが存在する。(i)のとき同様, Remark 4.3 により、C の素因子分解唯一性定理において、$(A'_{i'},\alpha'_{i'})$ に対応するのは、何か $(A'_{l'},\alpha'_{l'})$ であり、$(A'''_{i'''},\alpha'''_{i'''})$ に対応するのは、$(A'''_{l'''},\alpha'''_{l'''})$ であり、さらに、(B_j,β_j) に対応するのは、$(B_j,\beta_j\circ\iota)$ である。但し、ξ で、写像されるというのではなく、対応するというだけである。そこで、準定理2. により、ξ より、$\mathop{*}_{i'''=1}^{p'''}(A'''_{i'''},\alpha'''_{i'''})$ から $\mathop{*}_{i'''=1}^{p'''}(A'''_{i'''},\alpha'''_{i'''}\circ\iota)$ への、involution $\bar{\xi}$ が導かれる。このとき、$\bar{\xi}$ が導く対応は、ξ のものに等しい。さらに、i''' に対応する l''' は、$i'''\neq l'''$ となる。なんとならば、もし $l'''=i'''$ ならば、再び準定理2. より、$(A'''_{i'''},\alpha'''_{i'''})$ から $(A'''_{i'''},\alpha'''_{i'''}\circ\iota)$ への involution $\bar{\bar{\xi}}_{i'''}$ が

$\bar{\xi}$（又は、ξ）から導かれる。よって、$(A'''_{i'''}, \alpha'''_{i'''})$ $\$$ $(\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ となり矛盾する。このことと、$\bar{\xi}$が involution であることにより、$\bar{\xi}$から導かれる$\{1, 2, \cdots, p''\}$上の置換の巡環への分解は、互換の積となる。よって、(i) の場合同様、(4.16)が示せる。//

素因子分解定理により、Cの各元(G, φ)の素因子分解において、(4.13) 又、(4.14) の形の最大の部分(素因子分解)がとれる。それぞれにおける、(G, φ)の素因子分解の残りの部分を、$S(G, \varphi)$, $T(G, \varphi)$ で書き表わすことにする。$(G, \varphi) \Upsilon (K, \psi) \Leftrightarrow (G, \varphi) * (K, \psi \circ \iota) \Upsilon (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$、また、$(G, \varphi) \$ (K, \psi) \Leftrightarrow (G, \varphi) * (K, \psi \circ \iota) \$ (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ であるから、補題 4.12 より、次の系を得る。

<u>系</u> 4.17 (i) $(G, \varphi) \Upsilon (K, \psi) \Leftrightarrow S(G, \varphi) \cong S(K, \psi)$、
(ii) $(G, \varphi) \$ (K, \psi) \Leftrightarrow T(G, \varphi) \cong T(K, \psi)$。

よって、定理 4.11.(1) は、明らかである。また、同定理の (2) は、この (1) と、系 4.17, C の素因子分解の唯一性定理から直ちに導かれる。さらに、(2') は、

$(A'''_{i'''}, \alpha'''_{i'''}) * (A'''_{i'''}, \alpha'''_{i'''}) \cong (A'''_{i'''}, \alpha'''_{i'''}) * (A'''_{i'''}, \alpha'''_{i'''} \circ \iota)$

と、Claim 4.5 より明らかである。

<u>Claim</u> 4.18　(1)　Cの群は、既約な$(G, \varphi) \in C$で、$(G, \varphi) \not\cong (G, \varphi \circ \iota)$なるもの全ての集りを基底としてもつ自由可換群である。　(2)　強い意味でのCの群は、Cの群と、既約な$(G, \varphi) \in C$で、$(G, \varphi) \cong (G, \varphi \circ \iota)$かつ、この同型がinvolutionでは与えられないものが生成する位数2の巡回群等との直積である。

以後、(resp. 強い意味での) $\mathcal{D}$の群 $\mathcal{D}/\equiv_{\mathcal{D}}$ (resp. $\mathcal{D}/\approx_{\mathcal{D}}$) を、$\mathcal{D}/r$ (resp. $\mathcal{D}/s$) で表わす。

<u>準定理</u> 4.19　$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$を、$C$の任意なsubclassで、条件1，2を満たすclosedなものとする。このとき、

(1)　$\mathcal{D}_1/r$ (resp. $\mathcal{D}_1/s$) は、C/r (resp. C/s) 中の$\mathcal{D}_1$の像に同型である。

(2)　$\mathcal{D}_1 \supset \mathcal{D}_2 \Rightarrow \mathcal{D}_1/r \geq \mathcal{D}_2/r$ 且 $\mathcal{D}_1/s \geq \mathcal{D}_2/s$。

証明は、定理 4.11.(1) より明らか。

n次元結び目群の群に関しては、次が言える。

<u>準定理</u>4.20　任意の$n \geqq 3$に対し、

(1)　$K_1/\underset{\sim}{r} < K_2/\underset{\sim}{r} < K_n/\underset{\sim}{r} = K_{n+1}/\underset{\sim}{r} < C/\underset{\sim}{r}$ 、

(2)　$K_1/\underset{\sim}{s} < K_2/\underset{\sim}{s} < K_n/\underset{\sim}{s} = K_{n+1}/\underset{\sim}{s} < C/\underset{\sim}{s}$ 。

<u>証明</u>。準定理3.　及び準定理4.19.(2)より、

$$
\begin{array}{l}
K_1/\underset{\sim}{r} \leq K_2/\underset{\sim}{r} \leq K_n/\underset{\sim}{r} = K_{n+1}/\underset{\sim}{r} \leq C/\underset{\sim}{r} \\
K_1/\underset{\sim}{s} \leq K_2/\underset{\sim}{s} \leq K_n/\underset{\sim}{s} = K_{n+1}/\underset{\sim}{s} \leq C/\underset{\sim}{s}
\end{array}
\quad (n \geqq 3)
$$

系4.10より、$K_1/\underset{\sim}{s} \neq K_2/\underset{\sim}{s}$。[3]、*Example* 2、(2)より、$K_2/\underset{\sim}{s} \neq K_3/\underset{\sim}{s}$（*F. Hosokawa* - *A. Kawauchi* [10]又は、Farber [11]を用いる）。また、[12]、[13]、[14]、より、$K_3/\underset{\sim}{s} \neq C/\underset{\sim}{s}$。故に、(2)が成り立つ。このことより、(1)が成り立つことは明らか。//

§4.3 定理4.1の証明

定理4.8、系4.9は、1次元結び目群の *Alexander* 多項式が *symmetric* なことから役に立たない。そこで、もとにもどって、定理4.11.(2)及び *Claim* 4.18.(1)、準定理4.19.(1) & (2)、準定理4.20より、1次元結び目に関した無限個の異ったpair(G, φ)で、Cで既約、

且つ、$(G,\varphi)\not\cong(G,\varphi\circ\iota)$となるものがあることを示せばよい。これは、定理5.1で証明する。(但し、そこで扱われる例は、Witten, Ziemamman等のtorus分解に関した、結び目の分解に対する結果からもすぐに証明される。)

講演5　A Note on Groups of Composite Knots

granny knot と square knot との例([ ])から、Prof. J. Martine が、1983年に、Univ. of Saskatchwan で、私的に、次の問いをされた。

問題　4つの1次元結び目 k_1, k_1', k_2, k_2' に対し、次が成立するか。

$G(k_1) \cong G(k_1')$ 且つ $G(k_2) \cong G(k_2')$ ならば、

$$G(k_1 \# k_2) \cong G(k_1' \# k_2')。$$

次の定理が、本講演でのべる、そのときの否定的答えである。

定理 5.1　任意の整数 $p \neq -2, -1, 0, 1$ に対し、$k(p)$を、$(2p+1, 3, -3)$型の pretzel knot とする。このとき、

$$G(k(p) \# k(p)) \not\cong G(k(p) \# k(-p-1))$$

である。

結び目 $k(p)$ の pair を (G_p, φ_p) とすると、$k(-p-1)$

は、$k(p)$ の mirror image であるから、その pair は、$(G_p, \varphi_p \circ \iota)$ で与えられる。

§ 5.1 Pretzel knots と Symmetries

k を、3 次元球面 S^3 中の結き付けられた結び目とする。k に対する triple (G, φ, φ^*) とは、(G, φ) が、k の pair で、φ^* が、$\mathbb{Z}$ から G への準同型写像で、$(\varphi(1), \varphi^*(1))$ が k の meridian-longitude pair であるものを言う（[9], Chapter VII, §1）。1 次元結び目 k_1 と k_2 の triple $(G_1, \varphi_1, \varphi_1^*)$ と $(G_2, \varphi_2, \varphi_2^*)$ が同型（written $(G_1, \varphi_1, \varphi_1^*) \cong (G_2, \varphi_2, \varphi_2^*)$）とは、$G_1$ から G_2 への群同型写像 f で、$f \circ \varphi_1 = \varphi_2$, $f \circ \varphi_1^* = \varphi_2^*$ となるものが存在することである。

準定理 .2 （[9], Chapter VII, §3） k を S^3 中の結び目、(G, φ, φ^*) を k の triple とする。

1) k が invertible ならば、$(G, \varphi, \varphi^*) \cong (G, \varphi \circ \iota, \varphi^* \circ \iota)$、

2) k が positive-amphicheiral ならば、$(G, \varphi, \varphi^*) \cong (G, \varphi \circ \iota, \varphi^*)$

3) k が negative-amphicheiral ならば、$(G, \varphi, \varphi^*) \cong (G, \varphi, \varphi^* \circ \iota)$。

準定理 5.3　torus knot, 2-bridge knot, 任意の整数 p, q, r に対する $(2p, q, r)$, (p, q, q), $(p, q, \pm 1)$ 型の pretzel knot の pair は、trivial knot の pair $(\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ に、S - 同値である。

準定理 5.2 より、問題に対する反例には、invertible knot や positive - amphicheiral knot が使えないことになる。よって、準定理 5.3 に list されている結び目は使えない。そこで、最も簡単なこうほとして、$(2p+1, 3, -3)$ 型の pretzel knot について考えることにする。定理 5.1 の注意から、$p \geqq 0$ としてよい。

定理 5.4　pretzel knot $k(p)$, $p \geqq 0$, の pair は、

(i) distinct、

(ii) C において（よって K_1 において）既約、

(iii) $(G_p, \varphi_p) \not\cong (G_p, \varphi_p \circ \iota) \iff p \neq 0, 1$

を満たす。

証明。結び目群 G_p は、次の表示をもつ：

$$(5.4)\ \mathcal{P} = \left\langle x, y, z\ ;\ \begin{array}{l} (xz^{-1})^{-2}x(xz^{-1})^{2} = (zy^{-1})^{2}y(zy^{-1})^{-2}, \\ (yx^{-1})^{p}y(yx^{-1})^{-p} = (xz^{-1})^{-1}z(xz^{-1}) \end{array} \right\rangle$$

このとき、$k(p)$ の triple $(G_p, \varphi_p, \varphi_p^*)$ は、$\varphi(1) = x$、$\varphi^*(1) = (xz^{-1})^2(zy^{-1})^2(yx^{-1})^{-p}(xz^{-1})^{-1}(zy^{-1})^{-1}(yx^{-1})^{p+1}$ で例えば与えられる。次に、全ての整数 i に対し、$a_i = x^i y x^{-i-1}$, $b_i = x^i z x^{-i-1}$ とおくと、

$$(5.5)\ \mathcal{P} = \left\langle x, a_i, b_i\ ;\ \begin{array}{l} x a_i x^{-1} = a_{i+1},\ x b_i x^{-1} = b_{i+1}, \\ b_i^2 b_{i+1}^2 = (b_i a_i^{-1})^2 a_i (b_{i+1} a_{i+1}^{-1})^{-2}, \\ a_i^{p+1} a_{i+1}^{-p} = b_i^2 b_{i+1}^{-1}\ ,\quad i \in \mathbb{Z} \end{array} \right\rangle$$

となり、さらに、

$$(5.6)\ \mathcal{P} = \left\langle x, a_i, b_i\ ;\ \begin{array}{l} x a_i x^{-1} = a_{i+1},\ x b_i x^{-1} = b_{i+1}, \\ a_i = (a_i b_i^{-1} a_i b_i)(b_{i+1}^{-1} a_{i+1}^{-1} b_{i+1} a_{i+1}^{-1}), \\ b_i = (b_i^{-1} a_i^{p}) a_i (a_{i+1}^{-p} b_{i+1})\ ,\ i \in \mathbb{Z} \end{array} \right\rangle$$

$$(5.7)\quad = \left\langle x, a_i, b_i\ ;\ \begin{array}{l} x a_i x^{-1} = a_{i+1},\ x b_i x^{-1} = b_{i+1}, \\ b_i^{-1} a_i b_i = a_{i+1} b_{i+1}^{-1} a_{i+1} b_{i+1}, \\ b_i^{-2} a_i^{p+1} = b_{i+1}^{-1} a_{i+1}^{p}\ ,\quad i \in \mathbb{Z} \end{array} \right\rangle$$

このとき、$\varphi_p(1)=x$、$\varphi_p^*(1)=b_0^2(b_0a_0^{-1})^2a_0^{-p}b_0^{-1}(b_0a_0^{-1})^{-1}a_0^{p+1}$ となる。(5.7)より、G_pの交換子群$[G_p,G_p]$は、次のように表わせる。

$$(5.8)\quad \cdots * H_{-2} \underset{\substack{A_{-2}=C_{-1}\\B_{-2}=D_{-1}}}{*} H_{-1} \underset{\substack{A_{-1}=C_0\\B_{-1}=D_0}}{*} H_0 \underset{\substack{A_0=C_1\\B_0=D_1}}{*} H_1 \underset{\substack{A_1=C_2\\B_1=D_2}}{*} H_2 * \cdots$$

ここに、H_iは自由群$\langle a_i,b_i;\ \rangle$、$A_i=b_ia_ib_i^{-1}$、$B_i=b_i^2a_i^{p+1}$、$C_i=a_ib_i^{-1}a_ib_i$、$D_i=b_i^{-1}a_i^p$ である。よって、A_iとB_iで生成される群は、H_i($\cong H_{i+1}$)の階数2の自由な真部分群である。さらに、H_iは、A_iとC_iとD_iで生成される($a_i=C_iA_i^{-1}$, $b_i=(C_iA_i^{-1})^pD_i^{-1}$)。また、$H_i$のabel化群は、階数2の自由可換群で、$A_i$と$B_i$で生成される部分群$\langle A_i,B_i\rangle$の、そこでの像は、指数2の部分群である。$\langle A_i,B_i\rangle=\langle C_{i+1},D_{i+1}\rangle$の$H_{i+1}$のabel化群の中での像に関しても同様である。よって、pretzel knot $k(p)$は、fibred knotではない。

(i) $k(p)$のAlexander多項式を調べることにより、G_pが各pに対し、同型でないことが解かる。

(ii) (G_p, φ_p) が、各 p に対し、$\mathcal{C}$ で既約であることを、証明しよう。

群 G に対し、その交換子群 $[G, G]$ を、G' で表わす。また、G の部分群 H に対し、H の G での *normal closure* を、H^G で表わす。さらに、$a, b \in G$ に対し、$a^b = bab^{-1}$, $H^b = bHb^{-1}$ とする。

(G_p, φ_p) が、$\mathcal{C}$ で既約でないと仮定する。すると、$\mathcal{C}$ の元 (X, φ_X) と (Y, φ_Y) で、$(G_p, \varphi_p) = (X, \varphi_X) * (Y, \varphi_Y)$ かつ、$X \ncong \mathbb{Z}$, $Y \ncong \mathbb{Z}$ となるものが存在する。定理 2.3 より、$G_p' = X' * Y'$（自由積）で, $X' \neq 1$, $Y' \neq 1$ となる。G_p' の任意の元 w に対し、$L(w)$ を、自由積 $X' * Y'$ の意味での w の *syllable length* とする。

I. $L(a_i) = 1$ の場合： $a_i \in X'$ と仮定してよい。すると、$(G_p / a_i^{G_p})' \cong (X / a_i^X)' * Y' \cong \langle b_i \, ; \, b_{i+1} = b_i^2 \rangle \cong Q_2$, *the group of the rational numbers with denominator a nonnegative power of 2 under addition*。Q_2 は、自由積の意味で既約であり、$Y' \neq 1$ であるから、定理　　より、$Y' \cong Q_2$。これは矛盾である。

II. $L(b_i)=1$ の場合： $b_i \in X'$ と仮定してよい。すると、$Y' \cong \langle a_i\ ;\ a_i = a_{i+1}^2,\ a_i^{p+1} = a_{i+1}^p \rangle = \langle a_i\ ;\ a_i = a_{i+1}^2,\ a_{i+1}^{p+2} = 1 \rangle$。よって、$p \neq 2$ であるから、$Y' \cong \langle a\ ;\ a^l = 1 \rangle$。ここに、$l$ は、$p+2$ の最大の奇数の約数である。すると、$Y' = 1$ 又は、Y' が、自明でない有限巡回群となり、

III. $L(a_i), L(b_i) \geqq 2$ の場合： $E_i = D_i C_i$、C_0 と E_0 の $X' * Y'$ での normal form を、それぞれ $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \cdots \cdot \alpha_u$、$\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \cdots \cdot \beta_v$ とする。すると、C_i, E_i の normal form は、それぞれ、$\alpha_1^{x^i} \cdot \alpha_2^{x^i} \cdot \cdots \cdot \alpha_u^{x^i}$、$\beta_1^{x^i} \cdot \beta_2^{x^i} \cdot \cdots \cdot \beta_v^{x^i}$ となる。というのは、$C_i = C_0^{x^i} = \alpha_1^{x^i} \cdot \alpha_2^{x^i} \cdot \cdots \cdot \alpha_u^{x^i}$ であり、x の X', Y' 上への作用が閉じているからである。(5.6)より、$a_0\ (= C_0 C_1^{-1})$, $b_0\ (= E_0 E_1^{-1})$ の normal form は、それぞれ、或る正の整数 $u' \leqq u$ と $v' \leqq v$ に対し、

$$\alpha_1 \cdot \cdots \cdot \alpha_{u'-1} \cdot \alpha_{u'} (\alpha_{u'}^{x})^{-1} \cdot (\alpha_{u'-1}^{x})^{-1} \cdot \cdots \cdot (\alpha_1^{x})^{-1},$$

$$\beta_1 \cdot \cdots \cdot \beta_{v'-1} \cdot \beta_{v'} (\beta_{v'}^{x})^{-1} \cdot (\beta_{v'-1}^{x})^{-1} \cdot \cdots \cdot (\beta_1^{x})^{-1}$$

となる。$L(a_i), L(b_i) \geqq 2$ であるから、このことより、$L(a_i), L(b_i) \geqq 3$、(奇数)。

$\beta_1 = \beta_1^x$ ならば、$(\beta_1 X' \beta_1^{-1})^x = \beta_1 X' \beta_1^{-1}$、$(\beta_1 Y' \beta_1^{-1})^x =$

$\beta_1 Y' \beta_1^{-1}$。また、$G_p' = \beta_1 X' \beta_1^{-1} * \beta_1 Y' \beta_1^{-1}$ である。よって、a_i, b_i, X', Y' を、それぞれ、β_1 による共役 $a_i^{\beta_1}, b_i^{\beta_1}$, $X'^{\beta_1}, Y'^{\beta_1}$ でおきかえることにより、$\beta_1 \neq \beta_1^x$ と仮定してもよいであろう。

$a_0 = C_0 C_1^{-1}$ であるから、$a_1 = (b_0^{-1} a_0 b_0)(b_1^{-1} a_1^{-1} b_1)$ となる。従って、

$$(5.9) \qquad \alpha_1^x \cdot \alpha_2^x \cdot \cdots \cdot (\alpha_2^{x^2})^{-1} \cdot (\alpha_1^{x^2})^{-1}$$
$$= (\beta_1^x \cdot \beta_2^x \cdot \cdots \cdot \beta_2^{-1} \cdot \beta_1^{-1})(\alpha_1 \alpha_2 \cdot \cdots \cdot (\alpha_2^x)^{-1} \cdot (\alpha_1^x)^{-1})$$
$$\cdot (\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \cdots \cdot (\beta_2^x)^{-1} \cdot (\beta_1^x)^{-1}) \cdot (\beta_1^{x^2} \cdot \beta_2^{x^2} \cdot \cdots \cdot (\beta_2^x)^{-1} \cdot (\beta_1^x)^{-1})$$
$$\cdot (\alpha_1^{x^2} \cdot \alpha_2^{x^2} \cdot \cdots \cdot (\alpha_2^x)^{-1} \cdot (\alpha_1^x)^{-1}) \cdot (\beta_1^x \cdot \beta_2^x \cdot \cdots \cdot (\beta_2^{x^2})^{-1} \cdot (\beta_1^{x^2})^{-1})。$$

Ⅲ-1. $\alpha_1 \neq \beta_1$ の場合： (5.9)の左辺を見ると、a_1 の syllable の最初は、α_1^x である。一方、$L(a_1) \geqq 3$ かつ $\beta_1 \neq \beta_1^x$ より、(5.9)の右辺から、a_1 の最初の syllable が β_1^x となる。よって、$\alpha_1^x = \beta_1^x$。故に、$\alpha_1 = \beta_1$ となり矛盾。

Ⅲ-2. $\alpha_1 = \beta_1$ の場合： このとき、$\alpha_1^x = \beta_1$ ならば、$\beta_1^x = \beta_1$ となるので、$\alpha_1^x \neq \beta_1$ である。(5.9) より、$L(a_1)$

$\geqq 2(L(b_0)+L(a_0)+L(b_0)-1)-2L(b_0)-1 = 2L(a_1)-3$。

よって、$L(a_0) = L(a_1) \leqq 3$。$L(a_i) \geqq 3$ であったから、$L(a_i) = 3$ となる。そこで、$\alpha_1 \cdot \alpha \cdot (\alpha_1^x)^{-1}$ を a_0 の normal form とする。(5.5) の関係式 $a_0^{p+1} a_1^{-p} = b_0^2 b_1^{-1}$ より、

$$(5.10) \qquad (\alpha_1 \cdot \alpha \cdot (\alpha_1^x)^{-1})^{p+1} \cdot (\alpha_1^{x^2} \cdot (\alpha^x)^{-1} \cdot (\alpha_1^x)^{-1})^p$$

$$= (\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \cdots (\beta_2^x)^{-1} \cdot (\beta_1^x)^{-1}) \cdot (\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \cdots \cdot (\beta_2^x)^{-1} \cdot (\beta_1^x)^{-1})$$

$$\cdot (\beta_1^{x^2} \cdot \beta_2^{x^2} \cdot \cdots \cdot (\beta_2^x)^{-1} \cdot (\beta_1^x)^{-1})。$$

(5.10) の左辺の normal form は、

$$(5.11) \qquad \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \cdots \cdot (\beta_2^x)^{-1} \cdot (\beta_1^x)^{-1} \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \cdots \cdot (\beta_2^x)^{-1} \cdot (\beta_1^x)^{-1} \beta_1^{x^2} \cdot \beta_2^{x^2} \cdot \cdots$$

$$\cdot (\beta_2^x)^{-1} \cdot (\beta_1^x)^{-1},$$

で与えられる。

1) $p=0$ の場合：(5.10) の左辺は $\alpha_1 \alpha (\alpha_1^x)^{-1}$。よって $L(\alpha_1 \alpha (\alpha_1^x)^{-1}) = 3$。一方、(5.10) の右辺の syllable length は、$3L(b_0)-2 \geqq 7$ となり、矛盾。

2) $p=1$ の場合：(5.10) の左辺、右辺を比較することにより、$b_0 = \beta_1 \beta_2 (\beta_2^x)^{-1} (\beta_1^x)^{-1} = \alpha_1 \alpha (\alpha_1^x)^{-1} = a_0$

となり、$H_0=\langle a_0, b_0\rangle$ が、階数2の自由群であることに矛盾する。

3) $p\geqq 2$ の場合：　(5.10) の左辺の normal form は、

(5.12)　$\alpha_1\cdot\alpha\cdot(\alpha_1^x)^{-1}\alpha_1\cdot\alpha\cdot\cdots\cdot(\alpha_1^x)^{-1}\alpha_1\cdot\alpha\cdot(\alpha_1^x)^{-1}\alpha_1^{x^2}\cdot(\alpha^x)^{-1}\cdot(\alpha_1^x)^{-1}\alpha_1^{x^2}$

$\cdot\cdots\cdot(\alpha_1^x)^{-1}\alpha_1^{x^2}\cdot(\alpha^{x-1})\cdot(\alpha_1^x)^{-1}$。

(5.11) の syllable length は、$3L(b_0)-2$ であり、(5.12) の syllable length は、$3(2p+1)-2p = 4p+3$ となる。よって、$L(b_0)=\frac{1}{3}(4p+5)$。(5.11) と (5.12) を比べることにより、$\beta_2=\alpha=(\beta_2^x)^{-1}=(\alpha^x)^{-1}$ 且つ、$\beta_3=(\alpha_1^x)^{-1}\alpha_1^{x^2}$ を得る。故に、$\alpha^{x^2}=\alpha$ 且つ、$\alpha_1^{x^2}=\alpha_1$。さらに、$b_0=\beta_1\beta_2\cdots(\beta_2^x)^{-1}(\beta_1^x)^{-1}=\alpha_1[\alpha\cdot(\alpha_1^x)^{-1}\alpha_1]^{\frac{2}{3}(p-1)}\alpha(\alpha_1^x)^{-1}$。よって、$a_0^{x^2}=a_0$ 且つ、$b_0^{x^2}=b_0$。従って、$H_{2i}=H_0$、$H_{2i+1}=H_1$ が、全ての $i\in\mathbb{Z}$ に対し成り立つ。よって、G_p' は、有限生成となり、(5.8) に矛盾する。

(1)、2)、3) の部分の証明は、p を負の整数に取って、次の様に簡単に出来る。この場合、(5.10) の左辺の normal form の最初の syllable は、α_1^x である。なぜなら $\alpha_1\neq\alpha_1^x$。すると、$\alpha_1^x=\beta_1$ となり矛盾である。)

(iii)の証明。　準定理5.3より、$p=0,1$ の場合に、$(G_p,\varphi_p)\cong(G_p,\varphi_p\circ\iota)$ となることは明らかである。故に、ある $p\geqq 0$ が、$(G_p,\varphi_p)\cong(G_p,\varphi_p\circ\iota)$ を満たすならば、$p=0$ 又は、1 であることを示す。

$(G_p,\varphi_p)\cong(G_p,\varphi_p\circ\iota)$ を与える G_p の自己同型写像を f とする。

補題5.13　$f\circ\varphi_p^*=\varphi_p^*$ 又は、$\varphi_p^*\circ\iota$ 。

証明。まず、$k(p)$ が、cable knot でないことを示そう。もし、$k(p)$ が cable knot であるならば、$k(p)$ の companion λ が存在する。その order μ は $\geqq 2$ である。結び目 k の bridge number を、$b(k)$ で表わす。すると、[　] により、$\mu\cdot b(\lambda)\leqq b(k(p))$ 。よって、$b(k(p))\geqq 4$ 。ところが、$b(k(p))\leqq 3$ であるから、矛盾。

さて、(ii) より、$k(p)$ は prime knot である。故に、J. Simon [　] により、$\varphi_p^*(\mathbb{Z})=C_{G_p}(\varphi_p(1))\cap G_p'$ となる。ここに、群 G の元 g に対し、$C_G(g)$ は、g の G における中心化群である。すると、$f\circ\varphi_p^*(\mathbb{Z})=C_{G_p}(f\circ\varphi_p(1))\cap G_p'=C_{G_p}(\varphi_p\circ\iota(1))\cap G_p'=C_{G_p}(\varphi(-1))\cap G_p'=$

$C_{G_p}(\varphi(1)) \cap G_p' = \varphi_p^*(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ となる。故に、$f \circ \varphi_p^* = \varphi_p^*$ 又は、$\varphi_p^* \circ \iota$ となる。 //

今、$\hat{G}_p = G_p / \varphi_p^*(1)^{G_p}$、$\varsigma_p$ を G_p から $\hat{G}_p$ への、自然な全射準同型写像とする。すると、補題5.13 により、$\hat{f} = \varsigma_p \circ f$ が、$(\hat{G}_p, \varsigma_p \circ \varphi_p) \cong (\hat{G}_p, \varsigma_p \circ \varphi_p \circ \iota)$ を与える。 $\varphi_p^*(1) = A_0^{-1} B_0^{-1} A_0 B_0$ であったから、$\hat{G}_p$ は、次の表示をもつ。

$$(5.14) \quad \left\langle \begin{matrix} x, a_i, b_i \ ; & a_i^x = a_{i+1},\ b_i^x = b_{i+1},\ A_i = C_{i+1}, \\ & B_i = D_{i+1},\ A_0^{-1} B_0^{-1} A_0 B_0 \ , i \in \mathbb{Z} \end{matrix} \right\rangle .$$

G_p に於ては、全ての $i \in \mathbb{Z}$ に対し、$\varphi_p^*(1) = A_i^{-1} B_i^{-1} A_i B_i$ である。また、$\hat{H} = \langle a, b \ ; A^{-1} B^{-1} A B \rangle$, $A = b^{-1} a b$, $B = b^2 a^{p+1}$、なる群においては、$\langle A, B \rangle$、さらに、$\langle C, D \rangle$, $C = a b^{-1} a b$, $D = b^{-1} a^p$, は、階数2の自由可換群になっている。よって、$\hat{G}_p'$ は、

$$(5.15) \quad \cdots * \hat{H}_{-2} \underset{\substack{A_{-2} = C_{-1} \\ B_{-2} = D_{-1}}}{*} \hat{H}_{-1} \underset{\substack{A_{-1} = C_0 \\ B_{-1} = D_0}}{*} \hat{H}_0 \underset{\substack{A_0 = C_1 \\ B_0 = D_1}}{*} \hat{H}_1 \underset{\substack{A_1 = C_2 \\ B_1 = D_2}}{*} \hat{H}_2 * \cdots$$

となっている。ここに、$\hat{H}_i = \langle a_i, b_i \ ; A_i B_i = B_i A_i \rangle$。

補題 5.16 或る $m \in \mathbb{Z}$ と $d \in \hat{G}_p'$ に対し、$\hat{f}(\hat{H}_0) = \hat{H}_m^d$。

証明。$\langle A_i, B_i \rangle$ の自明でない元と可換な $\hat{G}_p'$ の元を計算することによって証明する。この目的の為、まず、$\langle A_i, B_i \rangle$ 又は、$\langle C_i, D_i \rangle$ の自明でない元各々の $\hat{H}_i$ に於ける centralizer を調べることにする。

準補題 5.17 任意の整数 i に対し、

1) $C_{\hat{H}_i}(A_i^q B_i^r) = \begin{cases} \langle A_i, B_i \rangle & \text{if } q \neq r(p+1) \\ \hat{H}_i & \text{otherwise} \end{cases}$、

2) $C_{\hat{H}_i}(C_i^q D_i^r) = \begin{cases} \langle C_i, D_i \rangle & \text{if } 2q \neq r \\ \hat{H}_i & \text{otherwise} \end{cases}$、

3) $Z(\hat{H}_i) = \langle A_i, B_i \rangle \cap \langle C_i, D_i \rangle = \langle A_i^{p+1} B_i \rangle$、

4) $Z(\hat{H}_i) \cap Z(\hat{H}_{i+1}) = 1$、

5) $\hat{H}_i \cap \hat{H}_{i+3} = 1$.

証明。$i = 0$ の場合について、証明すれば十分であろう。$x_j = b_0^j a_0 b_0^{-j}$, $j \in \mathbb{Z}$, とする。すると、$a_0^{\hat{H}_0}$ は次のような表示をもつ。

(5.18) $\langle x_j \,;\, x_{j-1}^{-1}\, x_j^{-p-1}\, x_{j+1}\, x_j^{p+1},\ j \in \mathbb{Z} \rangle$

これは、次の表示に等しい。

(5.19) $\langle x_0, x_1 \,;\ \rangle$.

故に、$\hat{H}_0$ は次の表示をもつ。

(5.20) $\langle b_0, x_0, x_1 \,;\, x_0^{b_0} = x_1,\ x_1^{b_0} = x_1^{p+1} x_0 (x_1^{p+1})^{-1} \rangle$.

よって、次の等式が成り立つ。

(5.21) $$b_0^{2j} x_\epsilon b_0^{-2j} = (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^j x_\epsilon (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^{-j},$$

$$j \in \mathbb{Z},\ \epsilon = 0, 1.$$

1) の証明。 $A = A_0^{b_0}$、$B = (B_0^{-1})^{b_0}$ とする。すると、$A = x_0$, $B = x_1^{-p-1} b_0^2$ 。等式 (5.21) により、$A^q B^{-r} = x_0^{q-r(p+1)} (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^r b_0^{-2r}$ 。W を、$C_{\hat{H}_0}(A^q B^{-r})$ の元とする。

1. $W = W' b_0^{2m}$, $W' (\neq 1) \in a_0^{\hat{H}_0}$ の場合： $W^* = W B^{-m}$ とおく。W と B は、$C_{\hat{H}_0}(A^q B^{-r})$ の元であるから、$W^* \in a_0^{\hat{H}_0}$ であり、$(A^q B^{-r}) W^* = W^* (A^q B^{-r})$ となる。よって、

$$(5.22)\quad W^* = (A^q B^{-r})^{-1} W^* (A^q B^{-r})$$
$$= b_0^{2r}(x_1^{p+1}x_0^{p+1})^r x_0^{-q+r(p+1)} W^* x_0^{q-r(p+1)} (x_1^{p+1}x_0^{p+1})^r b_0^{-2r}$$
$$= x_0^{-q+r(p+1)} W^* x_0^{q-r(p+1)} .$$

$a_0^{\hat{H}_0}$ は自由群であり、$W^* \in a_0^{\hat{H}_0}$ であるから、$q \neq r(p+1)$ ならば、$C_{\hat{H}_0}(A^q B^{-r}) \leq \langle A, B \rangle$。よって、$C_{\hat{H}_0}(A_0^q B_0^r) \leq \langle A_0, B_0 \rangle$。一方、$\langle A_0, B_0 \rangle$ は、可換群であるから、$C_{\hat{H}_0}(A_0^q B_0^r) = \langle A_0, B_0 \rangle$。また、$q = r(p+1)$ ならば、(5.22) より、$a_0^{\hat{H}_0}$ の任意な元が、$A^q B^{-r}$ と可換となるから、$C_{\hat{H}_0}(A_0^q B_0^r) = \langle a_0, B \rangle = \hat{H}_0$。

2. $W = W' b_0^{2m+1}$, $W' \overset{(\neq 1)}{\in} a_0^{\hat{H}_0}$ の場合： $W^* = W B^{-m} b_0^{-1}$ とおく。すると、$W^* \in a_0^{\hat{H}_0}$、かつ、$(A^q B^{-r}) W^* b_0 = (A^q B^{-r}) W^* b_0$。故に、

$$(5.23)\quad W^* = b_0^{2r}(x_1^{p+1}x_0^{p+1})^q x_0^{-q+r(p+1)} W^* b_0 x_0^{q-r(p+1)} (x_1^{p+1}x_0^{p+1})^{-q} b_0^{-2r-1}$$
$$= x_0^{-q+r(p+1)} W^* x_1^{q-r(p+1)} .$$

$a_0^{\hat{H}_0}$ は自由群であり、$W^* \in a_0^{\hat{H}_0}$ であるから、$q \neq r(p+1)$ ならば、$W^* = 1$ となり、$W = b_0 B^m = B_0^m b_0$ となってしまう。よって、$q = r(p+1)$ で、$C_{\hat{H}_0}(A_0^q B_0^{\pm r}) = C_{\hat{H}_0}(A^q B^{-r}) = \hat{H}_0$。

2) の証明。 $C = C_0^{b_0}$、$D = (D_0^{-1})^{b_0}$ とする。すると、$C = x_1 x_0$ かつ $D = x_1^{-p} b_0$。$C_{\hat{H}_0}(C^q D^{-r})$ のえ $W = W' b_0^m$ とする。ここに、$W' \in a_0^{\hat{H}_0}$ である。更に、$W^* = W D^{-m}$ とする。すると、$(C^q D^{-r}) W^* = W^* (C^q D^{-r})$。

1'. $r = 2r'$ の場合： $C^q D^{-2r'} = (x_1 x_0)^{q-r'} (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^{r'} b_0^{-2r'}$。故に、

$$
\begin{aligned}
W^* &= (C^q D^{-2r'})^{-1} W^* (C^q D^{-2r'}) \\
&= b_0^{2r'} (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^{-r'} (x_1 x_0)^{r'-q} W^* (x_1 x_0)^{q-r'} (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^{r'} \cdot b_0^{-2r'} \\
&= (x_1 x_0)^{r'-q} W^* (x_1 x_0)^{q-r'}.
\end{aligned}
$$

よって、$W^* = (x_1 x_0)^s =$ る整数 s に対し、$W^* = (x_1 x_0)^s (= C^s)$ である。1) の場合同様、$2q \neq r$ ならば、$C_{\hat{H}_0}(C_0^q D_0^r) = \langle C_0, D_0 \rangle$、$2q = r$ ならば、$C_{\hat{H}_0}(C_0^q D_0^r) = \hat{H}_0$ である。

2'. $r = 2r'+1$ の場合： $C^q D^{-2r'-1} = (x_1 x_0)^{q-r'-1} x_1^{-p} (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^{r'+1} b_0^{-r'-1}$。 $W^*(x_0, x_1)$ を、$W^* (\in a_0^{\hat{H}_0} = \langle x_0, x_1 ; \ \rangle)$ を表わす x_0, x_1 の語とする。 すると、

$$b_0 W^*(x_0,x_1)\, b_0^{-1}$$
$$= b_0^{2r'+2}(x_1^{p+1}x_0^{p+1})^{-r'-1} x_1^{p}(x_1x_0)^{1+r'-q} W^*(x_0,x_1)\,(x_1x_0)^{q-r'-1} x_1^{-p}(x_1^{p+1}x_0^{p+1})^{r'+1} b_0^{-2r'-2}$$
$$= x_1^{p}(x_1x_0)^{1+r'-q}\, W^*(x_0,x_1)\,(x_1x_0)^{q-r'-1} x_1^{-p}.$$

$b_0 W^*(x_0,x_1)\, b_0^{-1} = x_1^{p+1} W^*(x_1,x_0)\, x_1^{-p-1}$ であるから、

$$W^*(x_0,x_1) = (x_1x_0)^{q-r'-1} x_1 W^*(x_1,x_0)\, x_1^{-1} (x_1x_0)^{1+r'-q}.$$

故に、或る整数 s に対し、$W^*(x_0,x_1) = (x_1x_0)^s\ (= C^s)$ である。よって、$C_{\widehat{H}_0}(C_0^q D_0^r) = \langle C_0, D_0\rangle$ である。

3) の証明。 1), 2) より、$\langle C_0, D_0\rangle$ が可換、$\widehat{H}_0 = \langle A_0, B_0, C_0, D_0\rangle$ より、

$Z(\widehat{H}_0) = \langle A_0^{p+1} B_0\ (= C_0 D_0^2)\rangle = \langle A_0, B_0\rangle \cap \langle C_0, D_0\rangle$。

4) の証明。 $Z(H_0)\cap Z(H_1) = \langle A_0^{p+1} B_0\rangle \cap \langle C_1 D_1^2\rangle = \langle A_0^{p+1} B_0\rangle \cap \langle A_0 B_0^2\rangle = \{1\}$。

5) の証明。 $\widehat{H}_0 \cap \widehat{H}_3 = \Big(\widehat{H}_0 \cap (\widehat{H}_1 \underset{\substack{A_1 = C_2\\ B_1 = D_2}}{*} \widehat{H}_2 * \cdots)\Big) \cap \Big((\cdots * \widehat{H}_1 \underset{\substack{A_1 = C_2\\ B_1 = D_2}}{*} \widehat{H}_2) \cap \widehat{H}_3\Big) = (\widehat{H}_0 \cap \widehat{H}_1) \cap (\widehat{H}_2 \cap \widehat{H}_3) = \Big((\widehat{H}_0 \cap \widehat{H}_1) \cap (\widehat{H}_1 \cap \widehat{H}_2)\Big) \cap \Big((\widehat{H}_1 \cap \widehat{H}_2) \cap (\widehat{H}_2 \cap \widehat{H}_3)\Big) = \Big(\langle C_1, D_1\rangle \cap$

$\langle A_1, B_1\rangle) \cap (\langle C_2, D_2\rangle \cap \langle A_2, B_2\rangle) = Z(\hat{H}_1) \cap Z(\hat{H}_2) = \{1\}$。

（準補助定理証明終）

次に、G_p' のどのような元が、$\langle A_i, B_i\rangle$ の自明でない元と可換になるかを調べてみよう。

準補題 5.24　各 $i \in \mathbb{Z}$ に対し、$V \in \hat{G}_p'$ が、$\langle A_i, B_i\rangle$ の自明でない元と可換ならば、$V \in \hat{H}_i$ 又は、$V \in \hat{H}_{i+1}$ である。

証明。$i = 0$ の場合について証明すれば十分である。$\hat{G}_p'$ を融合部分群 $\langle A_2, B_2\rangle (= \langle C_3, D_3\rangle)$ をもつ、$(\cdots * \underset{\substack{A_1 = C_2 \\ B_1 = D_2}}{\hat{H}_1 * \hat{H}_2})$ と $(\underset{\substack{A_3 = C_4 \\ B_3 = D_4}}{\hat{H}_3 * \hat{H}_4} * \cdots)$ の融合積と考える。準補題 5.17.5) と、Theorem 4.5（[ ]）より、$V \in \hat{G}_p'$ が、$\langle A_0, B_0\rangle$ の自明でない元と可換ならば、$V \in (\cdots * \underset{\substack{A_1 = C_2 \\ B_1 = D_2}}{\hat{H}_1 * \hat{H}_2})$。

同様に、$V \in (\hat{H}_{-1} * \hat{H}_0 * \cdots)$ が言える。よって、$V \in J = \underset{\substack{A_{-1} = C_0 \\ B_{-1} = D_0}}{\hat{H}_{-1} * \hat{H}_0} \underset{\substack{A_0 = C_1 \\ B_0 = D_1}}{*} \underset{\substack{A_1 = C_2 \\ B_1 = D_2}}{\hat{H}_1 * \hat{H}_2}$。次に、$J$ を、融合部分群 $\langle A_{-1}, B_{-1}\rangle (= \langle C_0, D_0\rangle)$ をもつ、$\hat{H}_{-1}$ と $P = \underset{\substack{A_0 = C_1 \\ B_0 = D_1}}{\hat{H}_0 * \hat{H}_1} \underset{\substack{A_1 = C_2 \\ B_1 = D_2}}{*} \hat{H}_2$

の融合積と考える。もし，$V \in J$ が、$\langle A_0, B_0\rangle - \hat{H}_{-1}$
$= \langle A_0, B_0\rangle - (\langle A_0, B_0\rangle \cap \hat{H}_{-1}) = \langle A_0, B_0\rangle - \langle A_0, B_0\rangle \cap \langle C_0, D_0\rangle$
$= \langle A_0, B_0\rangle - \langle A_0^{p+1} B_0\rangle$ の自明でない元と可換ならば、
[ ] の Theorem 4.5 により、$V \in P$ である。準補題 5.17.1) より、$\langle A_0^{p+1} B_0\rangle\ (= \langle C_0 D_0^2\rangle = \langle A_{-1} B_{-1}^2\rangle)$ の自明でない元と可換な $\hat{H}_{-1}$ の元は、$\langle A_{-1}, B_{-1}\rangle\ (\subseteq \hat{H}_0)$ に属する。故に、再び [ ] の Theorem 4.5 より、$V \in J$ が $\langle A_0^{p+1} B_0\rangle$ の自明でない元と可換ならば、$V \in P$ である。
同様に、$V \in \underset{\substack{A_{-1}=C_0 \quad A_0=C_1 \\ B_{-1}=D_0 \quad B_0=D_1}}{\hat{H}_{-1} * \hat{H}_0 * \hat{H}_1}$ となり、$V \in \underset{\substack{A_0=C_1 \\ B_0=D_1}}{\hat{H}_0 * \hat{H}_1}$。よって、最後に、準定理 5.17.1),2),3) と、[ ] の Theorem 4.5 より、次を得る；

i) V が $\langle A_0, B_0\rangle - (Z(\hat{H}_0) \cup Z(\hat{H}_1))$ の自明でない元と可換ならば、$V \in \langle A_0, B_0\rangle$、

ii) V が $Z(\hat{H}_0) = \langle A_0^{p+1} B_0\rangle$ の自明でない元と可換ならば、$V \in \hat{H}_0$、

iii) V が $Z(\hat{H}_1) = \langle A_0 B_0^2\rangle$ の自明でない元と可換ならば、$V \in \hat{H}_1$。

（準補題 5.24 証明終）

；次に、$\hat{f}(\langle A_0, B_0\rangle)$ を考えてみよう。$\langle A_0, B_0\rangle$ は、

有限生成であるから、どの $g \in \hat{G}_p'$ に対しても、$\hat{f}(\langle A_0, B_0\rangle)^g \le \hat{H}_\alpha \underset{\substack{A_\alpha = C_{\alpha+1}\\ B_\alpha = D_{\alpha+1}}}{*} \cdots\cdots \underset{\substack{A_{\alpha+\beta-1} = C_{\alpha+\beta}\\ B_{\alpha+\beta-1} = D_{\alpha+\beta}}}{*} \hat{H}_{\alpha+\beta}$ となる整数 α と、負でない整数 β が存在する。このような β の最小を β_0 とし、それを与える g, α の対の1つを、g_0, α_0 とする。そこで、もし $\beta_0 = 0$ ならば、$d = g_0^{-1}$ $m = \alpha_0$ に対し、補題5.16が、成立する。よって、$\beta_0 \ge 1$ としよう。$U = \hat{H}_{\alpha_0} \underset{\substack{A_{\alpha_0} = C_{\alpha_0+1}\\ B_{\alpha_0} = D_{\alpha_0+1}}}{*} \cdots\cdots\cdots \underset{\substack{A_{\alpha_0+\beta_0-2} = C_{\alpha_0+\beta_0-1}\\ B_{\alpha_0+\beta_0-2} = D_{\alpha_0+\beta_0-1}}}{*} \hat{H}_{\alpha_0+\beta_0-1}$、$T = \hat{f}(\langle A_0, B_0\rangle)$ とすると、$T^{g_0} \le U \underset{\substack{A_{\alpha_0+\beta_0-1} = C_{\alpha_0+\beta_0}\\ B_{\alpha_0+\beta_0-1} = D_{\alpha_0+\beta_0}}}{*} \hat{H}_{\alpha_0+\beta_0}$。融合積に関する部分群定理（定理1.　）をこれに適用することにより、Tは、tree積又は、tree積のHNN拡大になっている。Tが、HNN拡大の場合、$\langle A_0, B_0\rangle$ が階数2の自由可換群であるから、T^{g_0} もそうである。よって、T^{g_0} の base group は、無限巡回群 $S = \langle A_{\alpha_0+\beta_0-1}, B_{\alpha_0+\beta_0-1}\rangle^{d'} \cap T^{g_0} = \langle C_{\alpha_0+\beta_0}, D_{\alpha_0+\beta_0}\rangle^{d'} \cap T^{g_0}$ （d' は、$\hat{G}_p'$ の或る元）となり、free part t は、S に自明に作用している。準定理5.24により、$t \in \hat{H}^{d'}_{\alpha_0+\beta_0-1}$ 又は、$t \in \hat{H}^{d'}_{\alpha_0+\beta_0}$ となる。これは、T^{g_0} が、free part をもつことに反する。よって、Tが、tree積の場合しか起らない。任意の可換群は、

融合積に関して完全既約である。故に、或る $\hat{G}_p'$ の元 d'' に対し、$T^{g_0} = U^{d''} \cap T^{g_0}$ 又は、$T^{g_0} = \hat{H}_{\alpha_0+\beta_0}^{d''} \cap T^{g_0}$ となる。よって、$T^{g_0 d''} \leq U^{d''}$ 又は、$T^{g_0} \leq \hat{H}_{\alpha_0+\beta_0}^{d''}$ となり、β_0 の最小性に反する。故に，$\beta_0 = 1$ となり、補題5.16は証明された。//

補題5.25　$\hat{H}_0$ の $\hat{G}_p'$ での正規化群 $N_{\hat{G}_p'}(\hat{H}_0) = \hat{H}_0$ 。

証明。$\hat{G}_p'$ は、$(\cdots * \underset{\substack{A_{-1}=C_0 \\ B_{-1}=D_0}}{\hat{H}_{-1} * \hat{H}_0})$ と $(\underset{\substack{A_1=C_2 \\ B_1=D_2}}{\hat{H}_1 * \hat{H}_2} * \cdots)$ の融合積であり、その融合部分群 $\langle A_0, B_0 \rangle$ は、$\hat{H}_0$ の真部分群であるから、$N_{\hat{G}_p'}(\hat{H}_0) \leq (\cdots * \underset{\substack{A_{-1}=C_0 \\ B_{-1}=D_0}}{\hat{H}_{-1} * \hat{H}_0})$。同様に、$N_{\hat{G}_p'}(\hat{N}_0) \leq (\underset{\substack{A_0=C_1 \\ B_0=D_1}}{\hat{H}_0 * \hat{H}_1} * \cdots)$。故に、$N_{\hat{G}_p'}(\hat{H}_0) \leq$

$(\cdots * \underset{\substack{A_{-1}=C_0 \\ B_{-1}=D_0}}{\hat{H}_{-1} * \hat{H}_0}) \cap (\underset{\substack{A_0=C_1 \\ B_0=D_1}}{\hat{H}_0 * \hat{H}_1} * \cdots) = H_0$ となり、補題が証明される。//

m, d を、準定理^{16}で与えられるものとする。$\hat{G}_p$ の自己同型写像 F を、$F(g) = x^{-m}\hat{f}(g)x^{m}$，$g \in \hat{G}_p$，で定義

する。すると、$F(x)=x^{-1}$、$F(\hat{H}_0)=\hat{H}_0^{\bar{d}}$、ここに $\bar{d}=d^{x^{-m}}$ である。$F(\underset{\substack{A_0=C_1\\ B_0=D_1}}{\hat{H}_0 * \hat{H}_1}) = \underset{\substack{F(A_0)=F(C_1)\\ F(B_0)=F(D_1)}}{F(\hat{H}_0) * F(\hat{H}_1)} = F(\hat{H}_0) * F(\hat{H}_0^{x})$ $= \hat{H}_0^{\bar{d}} * (\hat{H}_0^{\bar{d}})^{x^{-1}} = \hat{H}_0^{\bar{d}} * \hat{H}_{-1}^{\bar{d}^{x^{-1}}}$ となる。ここで、部分群定理1. を、$F(\hat{H}_0 * \hat{H}_1) \le \hat{G}_p' = (\cdots * \hat{H}_{-2} * \underset{\substack{A_{-1}=C_0\\ B_{-1}=D_0}}{\hat{H}_{-1}}) * (\underset{\substack{A_0=C_1\\ B_0=D_1}}{\hat{H}_0} * \hat{H}_1 * \cdots)$ に適用すると、$\bar{d}^{x^{-1}} \in \hat{G}_p'$ であるから、或る $\tilde{d} \in \hat{G}_p'$ に対し、$F(\langle A_0, B_0\rangle) = \langle C_0, D_0\rangle^{\tilde{d}} \cap F(A_0, B_0)$ となることが解る。ところが、これをもとに、更に強く、$\langle C_0, D_0\rangle^{\tilde{d}}$, $\hat{H}_{-1}^{\tilde{d}}$, $\hat{H}_0^{\tilde{d}}$ の3つの自明でない部分群だけが、$\langle C_0, D_0\rangle^{\tilde{d}}$ $(=\langle A_{-1}, B_{-1}\rangle^{\tilde{d}})$ の自明でない元の中心化群になり得る（準定理5.17. 1),2),4)，準定理5.24）ことから、$F(\langle A_0, B_0\rangle) = \langle C_0, D_0\rangle^{\tilde{d}}$，また、$F(\hat{H}_0)=\hat{H}_0^{\tilde{d}}$、$F(\hat{H}_1)=\hat{H}_{-1}^{\tilde{d}}$ が言える。$F(x)=x^{-1}$ であるから、$F(\langle C_0, D_0\rangle)$ $= F(\langle A_0^{x^{-1}}, B_0^{x^{-1}}\rangle) = F(\langle A_0, B_0\rangle)^{F(x^{-1})} = (\langle C_0, D_0\rangle^{\tilde{d}})^{x} =$ $\langle C_1, D_1\rangle^{\tilde{d}x}$。故に、$\hat{H}_0^{\bar{d}} = \hat{H}_0^{\tilde{d}x}$。補題5.25より、$d_0$ $= \bar{d}^{x}\tilde{d}^{x}$ は、$\hat{H}_0$ に属する。よって、$\hat{G}_p$ の自己同型写像Fは、次の6つを満たすことになる：

① $F(\hat{H}_0) = \hat{H}_0^{\tilde{d}}$ ，$\tilde{d} \in \hat{G}_p'$ ．

② $F(\langle A_0, B_0\rangle) = \langle C_0, D_0\rangle^{\tilde{d}}$ $(\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ ．

③ $F(\langle C_0, D_0\rangle) = \langle A_0, B_0\rangle^{\sigma d_0}$ ($\cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$)，$d_0 \in \widehat{H_0}$、

④ $F(A_0) = (C_0^u D_0^v)^{\sigma}$, $u, v \in \mathbb{Z}$，ならば、$F(C_0) =$
$\left(F(A_{-1}) = F(A_0^{x^{-1}}) = ((C_0^u D_0^v)^{\sigma})^x = (C_1^u D_1^v)^{\sigma x} = \right)$ $(A_0^u B_0^v)^{\sigma d_0}$、

⑤ $F(B_0) = (C_0^{u'} D_0^{v'})^{\sigma}$, $u', v' \in \mathbb{Z}$，ならば、$F(D_0) =$
$(A_0^{u'} B_0^{v'})^{\sigma d_0}$、

⑥（準補題 5.17.3）より） $F(A_0^{p+1} B_0) = ((A_0^{p+1} B_0)^{\sigma})^{\pm 1}$。

これにより、Fより、a_0, b_0 を基底とする階数2の自由可換群（$\mathbb{Z}$-free module）$\overline{H_0} = \widehat{H_0}/\widehat{H_0}'$ 上の自己同型写像 $\overline{F}$ が定義される。A_0, B_0, C_0, D_0 は、この $\overline{H_0}$ では，行ベクトル $(1, 0), (p+1, -2), (2, 0), (p, -1)$ とそれぞれ表わされる。そこで、$\overline{F}$ に対応する正方行列を M とすると、$\overline{F}$ の性質①〜⑥により、

①* $\det M = \pm 1$、

②* $uv' - vu' = \pm 1$、

③* $(1, 0)M = u(2, 0) + v(p, -1)$、

④* $(2, 0)M = u(1, 0) + v(p+1, -2)$、

⑤* $(p+1, -2)M = u'(2, 0) + v'(p, -1)$、

⑥* $(2p+2, -2)M = \pm(2p+2, -2)$。

となる整数 u, v, u', v' が存在することになる。簡単な

この計算から、この様なMは，$p=-2,-1,0,1$ の場合だけ存在し，$p\geq 0$ より，定理5.4.iii) が証明された。

定理5.1の証明は，省略。 //

References

[1]

[2] Waldhausen, F., On irreducible 3-manifolds with which are sufficiently large. Ann. Math. 87 (1968), 56-88.

[3] Maeda, T., A Unique Decomposition for Knot-Like Groups, Math. Seminar Notes 6 (1978), 567-602

[4] Baumslag, G.,

[5] Karrass, A. & Solitar. D.; The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup, Trans. Amer. Math. Soc. 150 (1970), 227-255

[6]

[7] Hashizume, Y.; Unique factorization of links

[8] Shaler, T. P.; Separating, incompressible surfaces in 3-manifolds, Inv. Math. 52 (1972), 105-126

[9] Neuwirth; Knot Groups