数理解析研究所講究録
第620巻 1987年 83-88

Constructions of Fibered 2-knots

東大理 斎藤 昌彦(Masahico Saito)

Fibered 2-knots の構成法としてよく知られたものには, Zeeman の twist spinning とその拡張と, Asano-Yoshikawa の方法とがあるが, 前者は, fiber は豊富にできるが monodromy には finite order という制限がつき, 後者は, monodromy は豊富にできるが, fiber は punc$(\# S^2 \times S^1)$ だけである。この, fiber の豊富さと monodromy の豊富さとの背反関係は, fiber の Thurston norm と深いかかわりがあり, fiber が irreducible で豊富な monodromy をもつ fibered 2-knot を構成することの困難さにつながっている。
([3]参照)

特に fiber が puncT^3 の場合は, [1] でくわしく調べられているが, ここでは, [3] で使われた方法を一般化した形で述べる。

構成法

KをS^4内のfibered ribbon 2-knot（fiberはpunc$(\# S^2\times S^1) = (\# S^2\times S^1)^0$であり，monodromyを$h$とすれば，
$S^4 \setminus K = (\# S^2\times S^1)^0 \times I/h$とかける）で，次の(i)，(ii)を満たすものとする。

(i) essential simple closed curve $\gamma \subset (\# S^2\times S^1)^0$で，

$h|_\gamma =$ identity,

γはhomologous to 0 in $H_1((\# S^2\times S^1)^0 ; \mathbb{Z})$

をみたすものが存在する。

(ii) $\Gamma = \gamma \times I/h \subset (\# S^2\times S^1)^0 \times I/h = S^4 \setminus K \subset S^4$

とするとき，$\Gamma \cong T^2$であるが，このΓがS^4内でunknottedである。（i.e. solid torus $S^1\times D^2$をboundする）

このとき，Γに沿って"equivariant $\frac{1}{p}$-Dehn surgery"（各fiber内のγに沿って"$\frac{1}{p}$-surgery"となるような，S^4内でのΓに沿ったsurgery）をすると，新らしいfibered 2-knot $\tilde{K} \subset S^4$ができる。（用語の定義と証明については[3]参照）

$\tilde{K}$のfiberは$(\# S^2\times S^1)^0$をγに沿って"$\frac{1}{p}$-surgery"したものであり，monodromyはhから誘導されるものである。

とくに，fiberの1次元homology群上は，もとのKと同じなので，Alexander polynomialは不変である。

例

$\#_4 S^2\times S^1$ 内に，fig. 1 のような simple closed curve γ をとる。

$\#_4 S^2\times S^1 = (\natural_4 S^1\times D^2)\cup_\partial(\natural_4 S^1\times D^2)$ であるが，$F=\partial(\natural_4 S^1\times D^2)$ とおく。（Fは fig. 1 において，ちょうど紙面に相当する。）

$\gamma\subset F$ であることに注意する。また，$\#_4 S^2\times S^1$ 内に，embedded tori T_i（$i=-2,-1,0,1,2$）を fig. 2〜6 の様にとる。

T_i は γ と disjoint であり，また，F に関して対称である。

T_i に沿った "right handed round Dehn twist"（right handed Dehn twist $\times S^1$，fig. 7 参照）を τ_i とし，

$$h=\tau_2\circ\tau_1\circ\tau_0\circ\tau_{-1}\circ\tau_{-2} : \#_4 S^2\times S^1 \circlearrowleft$$

とおく。h は F に関して対称であり，h が induce する automorphisms $h_\#:\pi_1(\#_4 S^2\times S^1)\circlearrowleft$，$h_*:H_1(\#_4 S^2\times S^1;\mathbb{Z})\circlearrowleft$ について，次のことが成り立つ。

（1） 群 $\langle x_1,x_2,x_3,x_4,t \mid t,\ tx_1t^{-1}h_\#(x_1)^{-1},\cdots tx_4t^{-1}h_\#(x_4)^{-1}\rangle$

は Andrews-Curtis moves で trivial presentation になる。

（$x_1,\cdots x_4$ は fig. 1 に図示された $\pi_1(\#_4 S^2\times S^1)$ の生成元）

（2） $\det(tI-h_*)=t^4-6t^3+9t^2-6t+1$

したがって Asano-Yoshikawa の方法により，h を monodromy とする fibered ribbon 2-knot $K\subset S^4$ ができ，γ は h で不変である。

また，$B=(\natural_4 S^1\times D^2)\times I/h$ は homotopy 4-ball，∂B は homotopy 3-sphere である。$\partial B\supset\Gamma=\gamma\times I/h$ であるから，

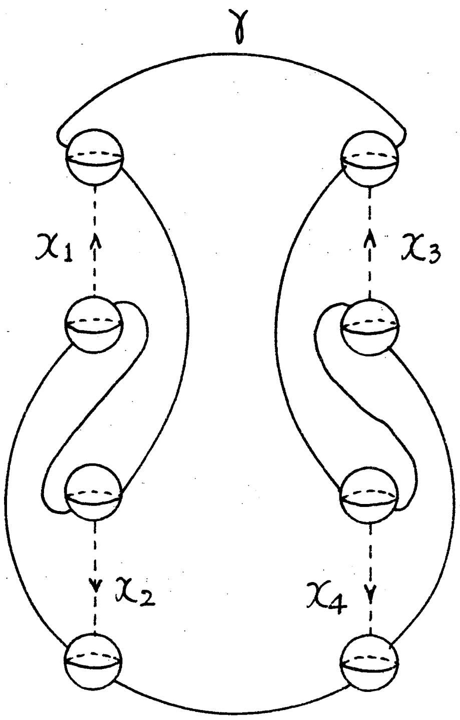

fig. 1

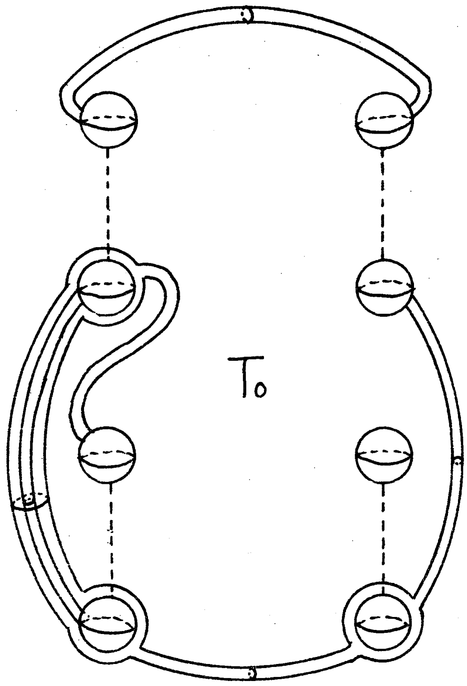

fig. 2

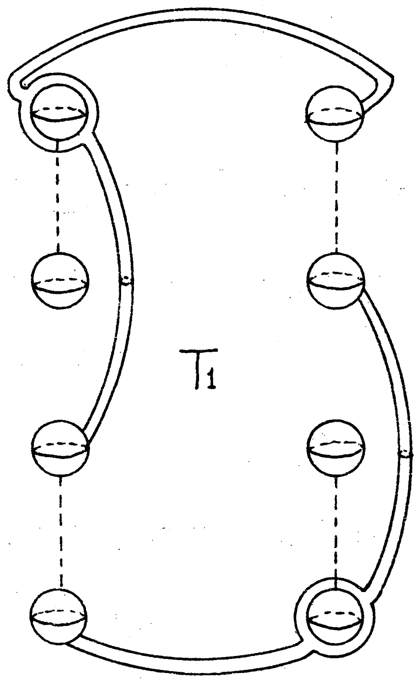

fig. 3

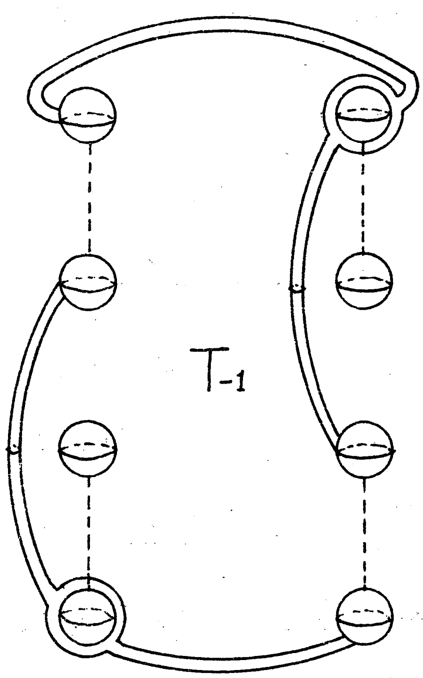

fig. 4

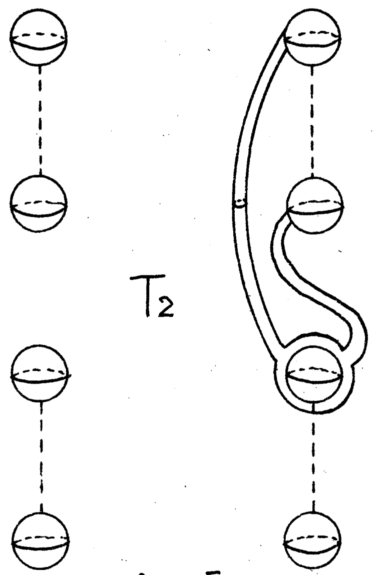

fig. 5

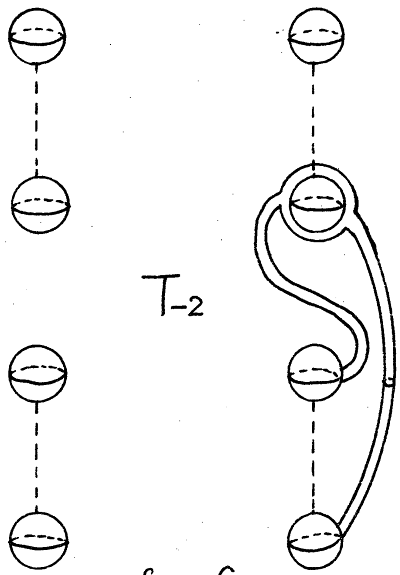

fig. 6

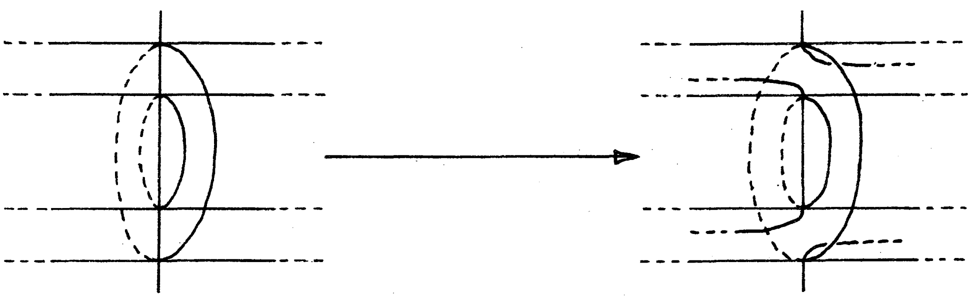

fig. 7

Γ は S^4 内で homotopically unknotted である。したがって構成法の(i)は満たし，(ii)は"unknotted"のかわりに"homotopically unknotted"であるような K，γ が得られた。これから homotopy S^4 内の fibered 2-knot $\tilde{K}$ で，fiber が irreducible であるものが構成できる。これが実際 S^4 と diffeomorphic であることを示すためには，[2]で用いられた様に，Montesinos の handle presentation で，Andrews-Curtis moves を handle sliding で実現しなければならない。

（この例自体は(2)の Alexander polynomial の対称性からしても[3]の例と一致してしまう可能性がある。）

References

[1] I.R. Aitchison, J.H. Rubinstein
Fibered knots and involutions on homotopy spheres
Contemporary Math. A.M.S. 35 (1984) 1-74

[2] I.R. Aitchison, D.S. Silver
On certain fibered ribbon disc pairs (preprint)

[3] M. Saito
Fibered 2-knots and Thurston norm
数理解析研究所講究録 575 (1985) 198-212