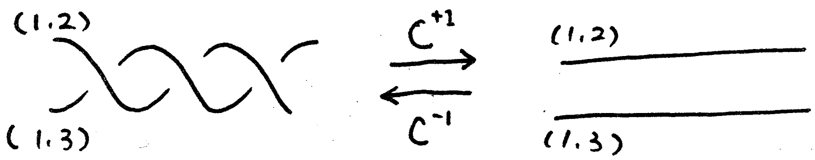
数理解析研究所講究録
第620巻 1987年 103-112

球面の Branched Covering

大阪市大 作間 誠 (Makoto Sakuma)

全ての closed orientable n-manifold は n 次元球面 S^n の branched covering になるが、特に $n=1, 2, 3$ の場合、sheet の数はそれぞれ 1, 2, 3 とできる事が知られている ([7, 12])。 $n=1, 2$ の時、各 n-manifold の S^n の n-fold branched covering としての表示は一意であるが、$n=3$ に対しては、一意性は成立しない。実際、次の操作 ($C^{\pm 1}$-move と呼ぶ) で irregular 3-fold cover は不変である ([6, 11])。



では、逆に、同じ3次元多様体を与える S^3 の irregular 3-fold coverings は上の操作で移り合えるかという素朴な疑問が出てくる。この問題は、最近、問題提出者の Montesinos 自身により、否定的に解かれた ([14])。

ここでは、その証明、及び周辺の話題を紹介する。

§1. S^3 の simple 3-fold covering

L を S^3 内の link, $\phi : \pi_1(S^3 - L) \to \mathfrak{S}_3$ を 3次の対称群 $\mathfrak{S}_3$ への link group の transitive representation とする。 ϕ(meridian) = 互換 となる時、ϕ を simple representation と呼び、$\mathrm{st}_\phi(1)$ に対応する (S^3, L) の branched covering を simple 3-fold cover (of (S^3, L)) と呼ぶ。 [一般に、d-fold branched cover $p : M \to N$ に対して、$\# p^{-1}(x) = d$ or $d-1$ $(\forall x \in N)$ が成立する時、p を simple branched covering と呼ぶが、$\dim M = 2, 3$ の時、simple branched covering は branched covering 全体の中で "generic" である事が示されている [1]。] Montesinos [14] は次を示した。

Theorem 1.1 Simple 3-fold coverings $p_1, p_2 : \#^4 S^2 \times S^1 \to S^3$ で、(その branch sets が) $C^{\pm 1}$-move の有限回の操作で移り合わないものが存在する。

(証明) 4次元 torus $S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$ 及びその Handle 分解 $H_0 \cup 4H^1 \cup 6H^2 \cup 4H^3 \cup H^4$ を考える。

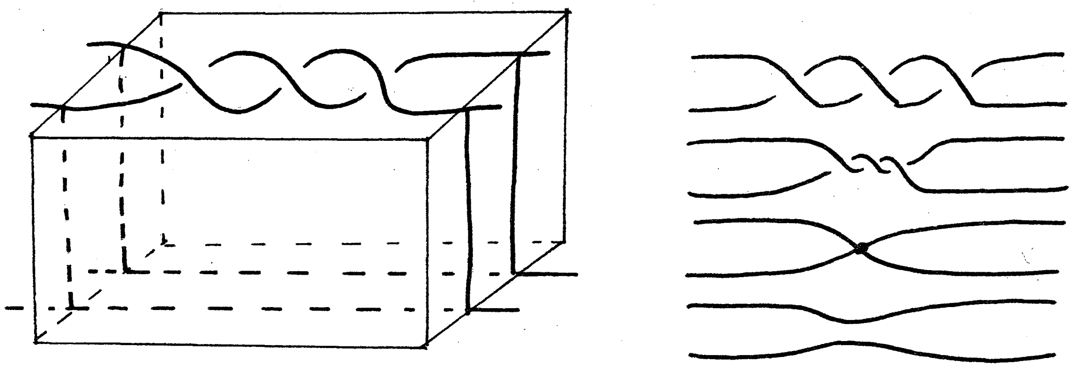
$U = H^0 \cup 4H^1 \cup 6H^2$, $V = 4H^3 \cup H^4 \cong \overset{4}{\natural} S^1 \times B^3$

とすると Montesinos [13] により、simple 3-fold coverings $P_1 : U \to B^4$, $P_2 : V \to B^4$ が存在する。

$p_1 = P_1|\partial U \cong \overset{4}{\#} S^2 \times S^1$, $p_2 = P_2|\partial V \cong \overset{4}{\#} S^2 \times S^1$ は simple branched coverings $\overset{4}{\#} S^2 \times S^1 \to S^3$ を与える。

<u>Lemma 1.2</u>　もし、p_1 と p_2 が C^{II}-move の有限回の操作で移り合えば、p_1 と p_2 は "regular homotopic" である。すなわち、(level preserving) branched covering $p : (\overset{4}{\#} S^2 \times S^1) \times I \to S^3 \times I$ で $p|\partial = p_1 \cup p_2$ となるものが存在する。

<u>Proof</u>　p_1, p_2 の branch line L_1, L_2 が 1 回の C^{II}-move で移った場合に示せば十分である。この時、次の図で示される様に、$S^3 \times I$ 内の proper surface F で、(a) $S^3 \times 0 \cap F = L_1$, $S^3 \times 1 \cap F = L_2$; (b) F は trefoil knot と link とする non-locally flat point を一点持ち、他では locally flat ; となるものが存在する。trefoil knot の simple 3-fold covering が S^3 である事に注意すると $F \subset S^3 \times I$ の simple 3-fold covering が $(\overset{4}{\#} S^2 \times S^1) \times I$ である事がわかる。



従って、もし p_1 と p_2 が $C^{\pm 1}$-moves で移り合えるなら、3-fold branched covering $p_1 \cup p \cup p_2$:
$U \cup (\# S^2 \times S^1) \times I \cup V \;(\cong S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1) \longrightarrow B^4 \cup S^3 \times I \cup B^4 \;(\cong S^4)$
を得る。しかし、これは次のセクションで紹介する Berstein-Edmonds [2] の定理の系として得られる次の事実に反する。

<u>Fact</u> $S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$ は S^4 の 3-fold covering にななり。

特に、p_1 と p_2 が regular homotopic にもない事が示された。[$\deg p_1 = \deg p_2$ 故、p_1 と p_2 は homotopic ではある。] 尚、branched coverings の bordism に関しては、Hirsh [8, 9] により次が示されている。

(1) $p_1, p_2 : M^3 \to N^3$ regular homotopic, $\deg p_1 = \deg p_2 = 2$ とする。p_1 と p_2 は equivalent。

(2) $p_1, p_2 : S^3 \to S^3$, $\deg p_1 = \deg p_2$ とする。p_1 と p_2 は regular homotopic。

(3) $p_1 : M^3 \to S^3$, $p_2 : M'^3 \to S^3$, $\deg p_1 = \deg p_2$ とする。p_1 と p_2 は bordant。i.e. $\exists W$: cobordism between M^3 and $M^{3\prime}$, $\exists p : W \to S^3 \times I$. branched covering, st. $p|_{\partial W} = p_1 \cup p_2$。

§2 Branched covering の degree

Closed orientable n-manifold M^n に対して、cup length $\operatorname{cup} M^n$ を次で定義する。

$$\operatorname{cup} M^n = \max\left\{ r \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists u_1, \dots, u_r \in \tilde{H}^*(M^n; \mathbb{C}) \\ \text{st} \quad (1)\ u_i : \text{homogenus} \\ \qquad (2)\ u_1 \cup \cdots \cup u_r \neq 0 \end{array} \right\}$$

<u>Example</u> $\operatorname{cup}(\underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n}) = n$, $\operatorname{cup} S^n = 1$

Berstein-Edmond [2] は次を示した。

<u>Theorem 2.1</u> $p : M^n \to N^n$ branched covering とすると、$\deg p \geqq \operatorname{cup} M^n / \operatorname{cup} N^n$

<u>Corollary 2.2</u>　$p : M^n \longrightarrow S^n$ branched cover とすると、$\deg p \geq \mathrm{cup}\, M^n$

セクション1 の Fact は この Cor. の特別な場合である。又、Introduction で述べた様に、closed orientable manifold M^n を S^n の branched cover として表わす時、$n = 1, 2, 3$ なら、degree $= n$ と出来る事が知られているが、この degree と $\dim M$ の一致は、上の Cor. により納得できる。[$\mathrm{cup}\, M^n \leq n$ に注意されたい。]
以下、定理の証明のアイデアを Edmonds [5] に従って、簡単なケースをモデルとして解説する。
$p : (M^n, \tilde{B}) \longrightarrow (N^n, B)$ を d-fold branched covering, $\Phi : \pi_1(N^n - B) \longrightarrow \mathfrak{S}_d$ を対応する transitive representation とする。$G = \mathrm{Im}\,\Phi < \mathfrak{S}_d$, $H = G \cap \mathfrak{S}_{d-1}$ と置く。但し、$\mathfrak{S}_d$ は集合 $\{1, 2, \cdots, d\}$ の置換群と同一視し、$\mathfrak{S}_{d-1}$ はその内、文字 1 を固定する元全体が作る $\mathfrak{S}_d$ の subgroup と同一視している。X を $\mathrm{Ker}\,\Phi$ に対応する (N^n, B) の branched cover とすると、次の diagram を得る。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \arrow[dr, "\tilde{p}"] & \\ X/H \cong M^n \arrow[r, "p"] & N^n \cong X/G \end{tikzcd}$$

次の事実が、定理の証明の鍵となる。

<u>Lemma 2.3</u> (see [4]) $\tilde{p}^*: H^*(X/G) \xrightarrow{\cong} H^*(X)^G$

但し、cohomology は $\mathbb{C}$-係数で、$H^*(X)^G$ は G-不変な $H^*(X)$ の元全体が作る submodule を表わす。

M^n に対して height M^n を次で定義する。

$$\text{height } M^n = \max\left\{ r \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists u \in \tilde{H}^*(M^n) \text{ homogenus} \\ \text{st } \langle u^r, [M^n] \rangle \neq 0 \end{array} \right\}$$

次の定理は Theorem 2.1 の系であるが、その証明は、Th. 2.1 の精神を良く表わしている。

<u>Theorem 2.4</u> $N^n = S^n$ の時、$d = \deg p \geqq \text{height } M^n$

<u>Proof</u> 今 height $M^n = r > d$ と仮定する。すると $H^*(M^n)$ の homogenus element u で、$\langle u^r, [M^n] \rangle \neq 0$ となるものが存在する。[この時 $\deg u = n/r$]

以下で、この u を用いて、$H^i(X)^G \neq 0$ for some i $(0 < i < n)$ を示す。すると、これは $H^i(X)^G \cong H^i(X/G) \cong H^i(S^n) = 0$ と矛盾し、証明は完了する。

$p_r^*: H^*(M^n) \xrightarrow{\cong} H^*(X)^H \hookrightarrow H^*(X)$ による u の像を u_1 と置く。 $G < \mathfrak{S}_d$ は transitive subgroup 故、各 i $(1 \leq i \leq d)$ に対し、G の元 g_i で $g_i(1) = i$ となるものが存在する。 この時 $G = \dot{\bigcup}_{1 \leq i \leq d} g_i H$ に注意されたい。 $u_i = g_i(u_1) = (g_i H)(u_1)$ とおると、 $u_i^r = g_i(u_1^r) = u_1^r \in H^n(X)^H \cong H^n(M^n)$ を得る。

[Remark. X は多様体ではないが、$H^n(X) \cong \mathbb{C}$ で、G はその上に trivial に作用している。]

$u^r \neq 0$ in $H^n(M^n)$ であったので、 $u_1^r + \cdots + u_d^r = d \cdot u_1^r \neq 0$ in $H^n(X)$ である。 ところが、$u_1^r + \cdots + u_d^r$ は $u_1, \ldots, u_d$ に関して対称なので、基本対称式 $s_k = \sum_{(i_1, \ldots, i_k)} u_{i_1} \cdots u_{i_k}$ $(1 \leq k \leq d)$ の多項式として表わせる。 従ってある s_k は $H^*(X)$ の元として non-zero である。 又、明らかに s_k は G-invariant。 従って $i = \deg s_k = k \cdot \deg u = k(n/r) < n$ に対して $H^i(X)^G \neq 0$ を得る。 $\square$

§3. Branch set

3 次元以下では、branch set は *locally flat* submanifold に取る事ができた。 しかし、一般の次元では、これは不可能である。 実際次の事実が知られている。

$p : (M^n, \tilde{B}^{n-2}) \to (S^n, B^{n-2})$ branched covering とする。

(1) (Berstein - Edmonds [2]) B^{n-2}: locally flat submanifold, M^n: spin の時.

$w(M^n)|_{\tilde{B}} = 1$, $w(M^n)|_{M^n - \tilde{B}} = 1$ 。

但し $w(M^n)$ は M^n の Stiefel-Whitney class。

特に quaternion projective space $\mathbb{H}P^{2n}$ $(n \geq 1)$ は S^{8n} の locally flat submanifold で分岐する branched cover にはなれない。

(2) (Brand [3]) $M^n = \mathbb{C}P^4$

$\Rightarrow$ B は locally flat submanifold にはなれない

(3) (Brand [3]) $M^n = \mathbb{R}P^n$, B: locally flat

$\Rightarrow$ $n = 2^t \pm 1$

(4) (Little [10]) $M^n = \mathbb{R}P^n$, B: locally flat かつ orientable $\Rightarrow$ $n = 1, 3$ or 7

References

[1] L. Bernstein and A. Edmonds: On the construction of branched of low-dimensional manifolds. Trans. A.M.S. 247 (1979), 87-124.

[2] ______________________________: The degree and branch set of a branched cobering. Inv. Math. 45 (1978), 213-220.

[3] N. Brand: Necessary condition for the existence of branched coverings. Inv. Math. 54 (1979), 1-10.

[4] G. Bredon: Introduction to compact transformation groups. Pure and Applied Math. 46, Academic Press. 1972.

[5] A. Edmonds: The degree of a branched covering of a sphere. Geometric topology, Academic Press (1979), 337-343.

[6] R.H. Fox: A note on branched cyclic coverings of spheres. Revista Math. Hisp.-Amer. 32 (1972), 158-166.

[7] H.M. Hilden: Three fold branched coverings of S^3. Amer. J. Math. 98 (1976), 989-997.

[8] U. Hirsh: On regular homotopy of branched coverings of the sphere. Manuscripta Math. 21 (1977), 293-306.

[9] ________: Bordismus verzweigter Uberlagerungen von niderig-dimensionalen Sparen. Manuscripta Math. 29 (1979), 1-10.

[10] R.D. Little: Projective n-space as a branched covering with orientable branch set.

[11] J.M. Montesinos: Sobre la Conjectura de Poincare y los recubridores ramificados sobre un nudo, Thesis, Madrid 1971.

[12] _______________: Three manifolds as 3-fold branched covers of S^3. Quart. J. Math. 27 (1976), 85-94.

[13] _______________: 4-manifolds, 3-fold covering spaces and ribbons. Trans. A.M.S. 245 (1979), 219-237.

[14] _______________: A note on moves and on irregular coverings of S^4. Contemporaly Math. 44 (1985), 345-349.