数理解析研究所講究録
第620巻 1987年 136-145

ある種の高次元結び目の構成及びその性質

佐賀大学教育学部　丸本嘉彦 (Yoshihiko Marumoto)

このノートでは [1], [2] の拡張について，その概略を述べることにする。詳細は [3] を見られたい。

すべての議論は PL カテゴリーで行なう。

1次元結び目については，その豊富な具体例が結び目理論の研究のための手助けとなっている。しかし高次元の場合，結び目の構成法はあまり多くは知られていない，例えば ribbon knots, spun knots, twist spun knots あるいは fibered knots 等である。

ここでは次で定義される結び目について考える。

定義 1. $1 \leq p \leq n$ とし，$S^{n+2} = \partial D^{n+3}$ としておく．$K^n \subset S^{n+2}$ が次をみたすとき，n-knot of type p であると呼ぶ：

D^{n+3} 上の trivial $(n-p+2)$-handles $\{h_i^{n-p+2}\}$ で次をみたすものが存在する，

(1) $K^n \cap h_i^{n-p+2} = \phi$ for $\forall i$,

(2) K^n は $\partial(D^{n+3} \cup \bigcup_i h_i^{n-p+2})$ 内で $(n+1)$-disk を張る。

上で定義された結び目はそれほど特殊なものではなく，次は容易に分かる：

<u>命題 2.</u> ribbon n-knot は type 1 であり，type n でもある。

この命題に関してはもっと一般化したものを後で示す。

2-knot に関しては，松本 [4] の結果を使うことにより次が示される：

<u>定理 3.</u> すべての 2-knot は type 2 である。

命題 2，定理 3 及び ribbon でない 2-knot の存在より，

<u>系 3.1.</u> $\{$2-knots of type 1$\} \subsetneqq \{$2-knots of type 2$\}$

次は knots of type p と [1]，[2] との関連を示す：

<u>定理 4.</u> $K^n \subset S^{n+2}$ が type p であるための必要十分条件は次

が成り立つことである：

D^{n+3} の trivial handle decomposition $D_0^{n+3} \cup \bigcup_i h_i^p \cup \bigcup_i h_i^{p+1}$ 及び $(n+1)$-disk $\Delta \subset \partial D_0^{n+3}$ が存在して次をみたす

(1) $\Delta \cap h_i^p = \phi$, $\partial\Delta \cap h_i^{p+1} = \phi$ for $\forall i$,

(2) $(S^{n+2}, K^n) = (\partial D^{n+3}, \partial\Delta)$.

定理4と［1］より，次が得られる：

<u>系 4.1.</u> K^n が ribbon n-knot であるための必要十分条件は K^n が type 1 であることである。

さらに定理4を利用すると，異なる type の間の関係が得られる，

<u>定理 5.</u> $2 \leqq 2p \leqq n$ としたとき，

$$\{n\text{-knots of type } p\} \subset \{n\text{-knot of type } (n-p+1)\}$$

この定理5の逆の関係については，系3.1より一般には成り立たない。

定理4において，交わり $\Delta \cap \alpha(h_i^{p+1})$ は一般の位置の理論より $(p-1)$ 次元多様体であることしか分からない（$\alpha(h_i^{p+1})$ は

$(p+1)$-handle h_i^{p+1} の attaching sphere を表す)。本質的には Hacon [5] の議論及び [2] より次が分かる:

<u>定理6.</u> 定理4において，$p=1,2$ あるいは $3\leqq p\leqq n-1$ とするとき，次の条件(3)を付け加えることができる，

(3) Δ^{n+1} と $\alpha(h_i^{p+1})$ は一般の位置で交わり，$\Delta\cap\alpha(h_i^{p+1})$ は有限個の $(p-1)$-spheres からなる。

次に type p knot と bounding manifold, immersed disk との関係について述べる．

<u>定義7.</u>

(1) $f_i : S^p\times D^q \longrightarrow M$ を disjoint embeddings で $\mathrm{Im} f_i \subset \mathrm{int}\, M$ あるいは $f^{-1}(\partial M) = S^p\times\partial D^q$ をみたしているとする。このとき $\{f_i\}$ (あるいは $\{f_i(S^p\times D^q)\}$) が M で <u>trivial</u> であるとは次をみたすときである:

$\exists\, \bar{f}_i : B^{p+1}\times D^q \to M$: disjoint embeddings

such that

$\bar{f}_i | \partial B\times D = f_i$

$\mathrm{Im}\,\bar{f}_i \subset \mathrm{int}\, M \quad$ if $\quad \mathrm{Im} f_i \subset \mathrm{int}\, M$

$\bar{f}_i^{-1}(\partial M) = B^{p+1}\times\partial D^q \quad$ if $\quad f_i^{-1}(\partial M) = S^{p+1}\times\partial D^q$

(2) $W \subset S^{n+2}$ を orientable $(n+1)$-manifold で，$\partial W \approx S^n$ となるものが次をみたすとき，W を semi-unknotted of type p と呼ぶ：

$$^{\exists}\bar{\nu}_i : S^{n-p+1} \times D^p \longrightarrow \mathrm{int}\, W \quad : \text{disjoint embeddings}$$

such that

$\chi(W; \{\nu_i\})$ は $(n+1)$-disk

$\{j \circ \nu_i\}$ は trivial in S^{n+2}

ただし $\chi(W; \{\nu_i\})$ は W を $\{\nu_i\}$ を使って surgery して得られるものを示し，$j : W \longrightarrow S^{n+2}$ は inclusion map である。

定義 8.

(1) $\rho : D^{n+1} \to S^{n+2}$ が次をみたすとき pseudo-ribbon map for K^n と言う；

(i) $\rho | \partial D^{n+1}$ は embedding，$\rho(\partial D^{n+1}) = K^n$

(ii) 任意の $x \in D^{n+1}$ に対して

$$^{\exists}V : \text{nbd of } x \quad \text{such that} \quad \rho | V : \text{embedding}$$

しかも $\# \rho^{-1}\rho(x) \leq 2$.

(iii) $\# \rho^{-1}\rho(x) = 2$ のとき，$\rho(x) = \rho(x')$ $(x \neq x')$ とすると

$$^{\exists}V, V' : \text{nbd of } x, x' \quad \text{s.t.} \quad \rho|V, \rho|V' : \text{embedding}$$

でしかも，$\rho(V)$ と $\rho(V')$ は general position で交わるようにできる。

(2) pseudo-ribbon map $\rho : D^{n+1} \longrightarrow S^{n+2}$ が次をみたすとき，**separable** と言う；

$$\exists \Delta_i : \text{disjoint } (n+1)\text{-disks in } \mathrm{int}\, D^{n+1}$$

such that

$$\rho | \bigcup_i \Delta_i, \quad \rho | D^{n+1} - \bigcup_i \Delta_i \quad \text{は共に embeddings}$$

(3) pseudo-ribbon map $\rho : D^{n+1} \longrightarrow S^{n+2}$ が次をみたすとき，type p であると言う；

$\{ x \in D^{n+1} \mid \# \rho^{-1}\rho(x) = 2 \}$ の各 component は $S^{p-1} \times D^{n-p+1}$ と同相で，それぞれ $T_1^+, T_1^-, T_2^+, T_2^- \cdots$ としたとき次を満たす；

$$\begin{cases} (1) & \rho(T_i^+) = \rho(T_i^-) \\ (2) & T_i^+ : \text{proper in } D^{n+1}, \quad T_i^- \subset \mathrm{int}\, D^{n+1} \\ (3) & \bigcup_i T_i^+ : \text{trivial in } D^{n+1} - \bigcup_j T_j^- \end{cases}$$

[6] で ribbon knot を ribbon map を使って特徴づけがされているが，もっと弱い形で次が得られる；

定理 9. K^n が ribbon n-knot であるための必要十分条件は K^n に対する separable pseudo-ribbon map が存在することである。

定理 10. $1 \leq p \leq n$ とし，K^n を n-knot とするとき，次は同値

(1) K^nに対する pseudo-ribbon map of type pが存在する

(2) K^nを張る semi-unknotted of type p の $(n+1)$-manifold が存在する。

type p knot と bounding manifold に関しては次が示される：

<u>定理 11.1</u> $1 \leq p \leq n$ として，Wを K^nを張る semi-unknotted of type p $(n+1)$-manifold とすると K^nは type p である。

この逆に関しては，定理6を使うことにより，

<u>定理 11.2</u> $p=1, 2$ あるいは $3 \leq p \leq n-1$ とし，K^nを type p とすると，K^nを張る semi-unknotted manifold of type p が存在する。

つまり，定理10, 11.1, 11.2 をまとめると，

<u>系 12.1</u> $p=1, 2$ あるいは $3 \leq p \leq n-1$ のとき次は同値である

(1) K^nは n-knot of type p である，

(2) K^nに対する pseudo-ribbon map of type p が存在する，

(3) K^nを張る semi-unknotted mfd. of type p が存在する，

さらに $1 \leq p \leq n$ のときには

$$(1) \Longleftrightarrow (2) \Longleftarrow (3)$$

となる。

定理3, 11.2 を合わせると,

系 12.2. すべての 2-knot に対して pseudo-ribbon map が存在する。

次に type p knot の代数的性質について述べる;
定理4を用い，注意深く計算することにより次が得られる;

定理 13. K^n を n-knot of type p とし, $q = n-p+2$ とおく. $\tilde{X}$ を $S^{n+2}-K^n$ の infinite cyclic cover とすると,

$$H_i(\tilde{X}) = 0 \quad \text{if} \quad 1 \leq i \leq n, \text{ただし } i \neq p, q-1,$$

定義 14. K^n を n-knot of type p とし, $2 \leq p < n-p+1$ としておく。定理4で得られた必要十分条件において, $V = D_0^{n+3} \cup \bigcup_i h_i^p$ とし, Δ' は Δ の interior を V の interior に push してえられたものとする，すると Δ' : proper in V でしかも $\partial\Delta' = \partial\Delta$ となっている。このとき $V_0 = V - \Delta'$ とおくと, $\pi_1(V_0) \cong \mathbb{Z}$ であり

この生成元を t とし，$\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ と書くことにすると，$\pi_p(V_0)$ は Λ-module として考えることができ，この時各 p-handle h_i^p から自然に生成元 ξ_i が得られる。この時

$$[\alpha(h_i^{p+1})] = \sum \lambda_{ij}(t)\xi_j$$

とおくことができ　$(\lambda_{ij}(t) \in \Lambda)$，

$$M_K(t) = (\lambda_{ij}(t))$$

と定義する。

<u>定義 15.</u>　単位元を持つ $\underbrace{\text{環}}^{\text{可換}}$ A 上の正方行列全体の集合を $\mathcal{M}(A)$ と書くことにし，$M_1, M_2 \in \mathcal{M}(A)$ に対して，これらが S-equivalent の時 $M_1 \underset{S}{\sim} M_2$ と書くことにする，

つまり，行（あるいは列）に関する基本変形及び $M \longleftrightarrow \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を有限回施して一方から他方に変わる時，$M_1 \underset{S}{\sim} M_2$ と書く。

<u>定義 16.</u>　$\varphi : \mathcal{M}(\Lambda) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{Z})$ として $\varphi(M(t)) = M(1)$ とし，これから自然に $\bar{\varphi} : \mathcal{M}(\Lambda)/\underset{S}{\sim} \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{Z})/\underset{S}{\sim}$ が得られる。このとき $\mathfrak{M}_0 = \bar{\varphi}^{-1}([E])$ とおく．ただし E は単位行列．

以上の定義のもとで次が成り立つ：

<u>定理 17.</u>　$\mathfrak{M}_0$ は無限個の元を含み，$2 \leq p < n-p+1$ のとき，

n-knots of type p 全単の集合から $\mathcal{M}_0$ への全単射が存在する。

さらに次も得られる；

<u>定理18.</u> $4 \leqq 2p \leqq n$, $4 \leqq 2q \leqq n$, $p \neq q$ とし, K^n は type p であり, また type q でもあるとする. この時 K^n は unknot である.

References

[1] Asano, K., Marumoto, Y., Yanagawa, T.: Ribbon knots and ribbon disks, Osaka J. Math., 18 (1981), 161-174.

[2] Marumoto, Y.: A class of higher dimensional knots, J. Fac. Educ. Saga Univ., 31 (1984) 177-185

[3] Marumoto, Y.: Some higher dimensional knots, (in preparation)

[4] Matumoto, T.: On a weakly unknotted 2-sphere in a simply connected 4-manifold, Osaka J. Math., 21 (1984), 489-492.

[5] Hacon, D.: Knotted spheres in tori, Quart. J. Math. 20 (1969) 431-445.

[6] Yanagawa, T.: On ribbon 2-knots. I., Osaka J. Math., 6 (1969), 447-464.