数理解析研究所講究録
第 621 巻 1987 年 35-49

無限小近傍へ切断を引き上げる時に生じる障害について

京大理 遊佐 毅(Takeshi Usa)

以下では、何回かの話のうちで上記の題目に関する部分のまとめを行います。それ以外の部分や詳しい内容については[U]を参照して下さい。

§1 問題提起

以下すべて、特にことわりがない限り、k は $ch(k) \geq 0$ の体，X は k 上の n 次元 $(n>0)$ の既約かつ被約な射影スキームとします。このとき次の問題を考えます。

問題(*) "適当な埋込みをとればみたされるような"条件(以下条件(*)と呼びます)を設定し、(少くとも非特異な X について)条件(*)をみたす埋込み $j: X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_k = \mathbb{P}$ において、与えられた切断 $\varphi \in H^0(X, \Omega^1_{\mathbb{P}}(m) \otimes \mathcal{O}_X)$ が $H^0(\mathbb{P}, \Omega^1_{\mathbb{P}}(m))$ の切断へ引き

上げ可能となる必要充分条件を求めよ。

この問題の持つ意義を理解するために次の例をみてみます。

<u>例1</u>　$j(X)$ を、m 次斉次既約多項式 F で定義される超曲面とします。次の完全列を考えます。

$$H^0(\mathbb{P},\Omega^1_{\mathbb{P}}(m)) \longrightarrow H^0(X,\Omega^1_{\mathbb{P}}(m)\otimes\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(\mathbb{P},\Omega^1_{\mathbb{P}}) \longrightarrow 0$$

よく知られていますように $\dim_{k} H^1(\mathbb{P},\Omega^1_{\mathbb{P}}) = 1$ です。つまり引き上げ可能な切断全体を法として1次元だけ引き上げ不可能な切断が存在するわけです。この具体的表示を求めてみると次のようになります。まず $\mathbb{P}^N_{k}$ の斉次座標 $(X_0, X_1, \cdots X_N)$ を1つ固定します。これに対して F は

$$F = X_N F_N(X_0,\cdots X_N) + X_{N-1}F_{N-1}(X_0,\cdots,X_{N-1}) + \cdots$$
$$\cdots + X_1 F_1(X_0,X_1) + F_0\cdot X_0^m$$

と一意的にかくことができます。これを使って、

$$\varepsilon(F) = \left\{ \left(\sum_{j\neq\lambda} F_j\left(\frac{X_0}{X_\lambda}\cdots\frac{X_j}{X_\lambda}\right) d\left(\frac{X_j}{X_\lambda}\right), U_\lambda \right) \middle| \lambda = 0,1,\cdots N \right\} \in H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}}(m)\otimes\mathcal{O}_X)$$

という切断が定義されます。これが丁度引き上げ不可能な切断の類を代表することがわかります。さらに m と異なる整数 m' に対しては $H^0(X,\Omega^1_{\mathbb{P}}(m')\otimes\mathcal{O}_X)$ の切断はすべて引き上げ可能となることも容易にわかります。

この例から引き上げ不可能な $H^0(X, \Omega^1_{\mathbb{P}}(m)\otimes\mathcal{O}_X)$ の切断と X の方程式とが何らかの対応をもつことが予想されます。解決のために、この種の問題の常として、問題(*)を次の2つの問題に分けて考えます。

<u>(問題(*)−F)</u> 埋込み j が条件(*)をみたすとき、φ を $H^0(\hat{\mathbb{P}}, \widehat{\Omega^1_{\mathbb{P}}(m)}) = \varprojlim_{\nu} H^0(\mathbb{P}, \Omega^1_{\mathbb{P}}(m)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}}/I_X^{\nu})$ の切断へ引き上げ可能となる必要充分条件を求めよ。

<u>(問題(*)−A)</u> 与えられた切断 $\hat{\psi}\in H^0(\hat{\mathbb{P}}, \widehat{\Omega^1_{\mathbb{P}}(m)})$ が $H^0(\mathbb{P}, \Omega^1_{\mathbb{P}}(m))$ からくることを示せ。

(問題(*)−F)の状況について考えます。$X_{(\nu)} = (|X|, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}/I_X^{\nu+1})$ という X の ν 次無限小近傍と呼ばれる $\mathbb{P}$ の閉部分スキームを定義しておきます。φ を $\hat{\psi}\in H^0(\hat{\mathbb{P}}, \widehat{\Omega^1_{\mathbb{P}}(m)})$ へ引き上げるというのは、$\{\psi_\nu \in H^0(X_{(\nu)}, \Omega^1_{\mathbb{P}}(m)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}}/I_X^{\nu+1}) \mid \psi_\nu|_{X_{(\nu-1)}} = \psi_{\nu-1},\ \psi_0 = \varphi\}_{\nu=0}^{\infty}$ という系を構成することに外なりません。そこで、まず $\psi_0, \cdots, \psi_{s-1}$ まで構成できたと仮定し、ψ_s がうまくつくれる条件を求めてみますと、

$$H^0(X_{(s)}, \Omega^1_{\mathbb{P}}(m)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}}/I_X^{s+1}) \longrightarrow H^0(X_{(s-1)}, \Omega^1_{\mathbb{P}}(m)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}}/I_X^{s}) \xrightarrow{\delta_s} H^1(X, \Omega^1_{\mathbb{P}}(m)\otimes I_X^{s}/I_X^{s+1})$$

という完全列において $\delta_s(\psi_{s-1})=0$ となることであるということがわかります。しかしながら、注意が必要なのは、$\delta_s(\psi_{s-1})\neq 0$ でも別の $\psi_0', \cdots, \psi_{s-1}'$ をとることによって $\delta_s(\psi_{s-1}')=0$ とできて、結果的には φ が $H^0(\hat{\mathbb{P}}, \widehat{\Omega^1_{\mathbb{P}}(m)})$ の切断に引き上げ可能ということさえ起り得るということです。このような現象を問題(*)の非線型性と呼びましょう。次の例は埋込みがかなり理想に近い状況でも、$s=2$ のところですでにこの非線型性が生じていることを示しています。また、$s\geq 3$ のような例もつくれます。

例2 $j: X=\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ (twisted cubic) を考えます。混乱をさけるために $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}=\mathbb{P}$ の普遍直線束を $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(H)$ とかいて、ここでは区別することにします。座標をとっての具体的な計算や、コホモロジー完全列の次元の計算で次のことがわかります。

① $H^0(X, \Omega^1_{\mathbb{P}}(3H)\otimes\mathcal{O}_X)$ の切断$\overbrace{\text{はすべて}}^{H^0(\mathbb{P},\,\Omega^1_{\mathbb{P}}(3H))\text{へ}}$引き上げ可能。

② $\dim_{\mathbb{C}} H^0(X_{(1)}, \Omega^1_{\mathbb{P}}(3H)\otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}/I_X^2)=24$

③ $\dim_{\mathbb{C}} H^1(I_X^2(2H))=1$

④ $\dim_{\mathbb{C}} H^1(I_X^3(2H))=\dim_{\mathbb{C}} H^1(I_X^4(2H))=\cdots=0$

⑤ $\dim_{\mathbb{C}} H^0(X_{(2)}, \Omega^1_{\mathbb{P}}(3H)\otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}/I_X^3)=20$

以上①, ②, ⑤ か$\overbrace{\text{ら、}}^{\text{わかりますように}}$元々引き上げ可能な切断 φ につ

いても，ψ_1 の選択がまずければ、$\delta_2(\psi_1)\neq 0$ となり、ψ_2 がうまく構成できなくなってしまいます。

このような例から考えると、(問題(*)−A)に対する答として可能性のありそうなのは $\delta_1(\varphi)=0$ という条件ですが、先に述べた条件(*)をうまく設定しないと、これもやはりだめであることが次の例によってわかります。

<u>例3</u>　$j: X=\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \hookrightarrow \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}} = P$　　$j^*\mathcal{O}_P(H)\cong\mathcal{O}(4)$

$$(t:s)\mapsto (x_0:x_1:x_2:x_3)=(t^4:t^3s:ts^3:s^4)$$

を考えます。このとき次のことが容易にわかります.

① $H^1(I_X/I_X^2\otimes\Omega^1_P(3H))=0$

② $H^0(X,\Omega^1_P(3H)\otimes\mathcal{O}_X)$ の切断で $H^0(\hat{P},\widehat{\Omega^1_P(3H)})$ へ引き上げ不可能なものが存在する。

ここで唯一、救いとなりそうなものは、例3において、$j(X)$ のアフィン錐（以下 $C_j(X)$ と記します）がその頂点において Cohen-Macaulay ではないという事実です。しかしながら、先の条件(*)として "$C_j(X)$ がその頂点において Cohen-Macaulay" を採用するわけにはいきません。例えば X として、アーベル曲面をとれば X は決してこのような条件

をみたす埋込みを持ち得ないからです。条件(*)として期待できる最良のものは次のものでしょう。

<u>命題</u>　X は体 k 上の既約な正規射影スキームとする。このとき、X の適当な埋込み j をとれば $C_j(X)$ は、その頂点において正規となる。この $C_j(X)$ に関する条件は $\dim X > 0$ の場合に $H^1(\mathbb{P}, I_X(*)) = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} H^1(\mathbb{P}, I_X(m)) = 0$ であることと同値である。(このような埋込みは射影的正規であるといわれる。)

そこで、条件(*)としては"射影的正規"、もしくは、それを弱くした条件を採用し、問題(*)を考えることにします。ただし例2の埋込み j でも、この条件(*)をみたしますから、非線型性とは正面から向い合わざるを得なくなります。問題(*)を解く方法としては、($H^1(X, \Omega^1_{\mathbb{P}}(m)\otimes I^s/I^{s+1})$ が条件(*)だけでは一般には消滅いたしませんから、障害にひっかからないように)具体的に $\psi_1, \cdots, \psi_s, \cdots$ を構成していくという方法の他に、最近、ちょっと近道をして完全に代数的に、しかも $\hat{\psi}$ を経ないで $\tilde{\psi} \in H^0(\mathbb{P}, \Omega^1_{\mathbb{P}}(m))$ を得る方法が見つかりましたので、それに沿ってお話することにいたします。ただし、そこでも(問題(*)−F)で見たのと同様のことが起きます。

<u>§2 第1障害による判定条件</u>　d_{EX} を $\Omega^{\cdot}_{\mathbb{P}}$ の外微分作用素として　$d_I : I_X \xrightarrow[\text{incl.}]{} \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \xrightarrow[d_{EX}]{} \Omega^1_{\mathbb{P}} \xrightarrow[\text{proj}]{} \Omega^1_{\mathbb{P}} \otimes \mathcal{O}_X$ という層の準同型を定義します．実は、d_I は k－線型のみならず $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$－線型性をも満足します。そこで $J = \mathrm{Ker}(d_I : I_X \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}} \otimes \mathcal{O}_X)$ とおきますと、$I_X \supseteq J \supseteq I_X^2$ で，J は I_X の $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$－部分加群となりますから、J は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ のイデアル層になります。従って J は $\mathbb{P}$ の閉部分スキームとして、$X_{(\frac{1}{2})} = (|X|, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}/J)$ を定めます。もちろん、X が非特異のときは、$X_{(\frac{1}{2})}$ は、先の $X_{(1)}$ と一致します。次も定義しておきます．

<u>定義</u>　埋込み $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_k = \mathbb{P}$ は $H^1(\mathbb{P}, I_X(*)) = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} H^1(\mathbb{P}, I_X(m)) = 0$ をみたすとき、<u>射影的S_2条件</u>をみたすという．

<u>注意 1</u>　この条件は、$C_j(X)$ がその頂点において、S_2条件をみたすことと同値です．一方、$j(X)$ として、R_1条件をみたさない超曲面をとりますと、その埋込みは射影的S_2条件をみたしますが、射影的正規にも、正規にもなりません．ただし、この条件を仮定しますと X 上では必然的にS_2条件がみたされることになります。

以上の準備のもとに問題(*)に対する解答を与えることにいたします。ただし、$ch(k)>0$ の場合に関しましては、部分的解答にとどまっております。

<u>定理</u>　m は任意の整数で、体 k $\overbrace{\text{は}}^{\text{について}}$ $ch(k)=0$ もしくは $ch(k) \nmid m(m-1)$ がみたされているとせよ。X が k 上の n 次元 $(n>0)$ 既約かつ被約な射影スキームで、埋込み $j: X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_k = \mathbb{P}$ は射影的 S_2 条件をみたすか、より一般的に $H^1(I_X(m-1)) = H^1(I_X(m-2)) = 0$ をみたすとする。$\varphi \in H^0(X, \Omega^1_{\mathbb{P}}(m)\otimes \mathcal{O}_X)$ に関して、次の3条件は同値である。

(i) $\bar{\Psi} \in H^0(X_{(\frac{1}{2})}, \Omega^1_{\mathbb{P}}(m)\otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}/J)$ でしかも $\bar{\Psi}|_X = \varphi$ となるものが存在する。

(ii) $\Psi \in H^0(X_{(1)}, \Omega^1_{\mathbb{P}}(m)\otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}/I_X^2)$ でしかも $\Psi|_X = \varphi$ となるものが存在する。

(iii) $\tilde{\Psi} \in H^0(\mathbb{P}, \Omega^1_{\mathbb{P}}(m))$ でしかも $\tilde{\Psi}|_X = \varphi$ となるものが存在する。

<u>注意2</u>　例2からもわかりますように、(i)の $\bar{\Psi}$ や(ii)の Ψ が直接 $H^0(\mathbb{P}, \Omega^1_{\mathbb{P}}(m))$ の切断へ引き上げ可能なわけではありません。

<u>証明</u>　(iii)から(ii)，(ii)から(i)、が導びかれるのは明らかですから、(i)から(iii)が導びけることを示します。まず、ℓ を任意の整数として次の完全列を考えます。

$$\begin{tikzcd}
H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}}(\ell)\otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}/\mathcal{J}) \arrow[r, "\bar\beta_{ext}"'] & H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}}(\ell)\otimes \mathcal{O}_X) \arrow[r, "\bar\delta_{ext}"'] & H^1(\Omega^1_{\mathbb{P}}(\ell)\otimes \mathcal{I}_X/\mathcal{J}) \\
H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}}(\ell)) \arrow[u] \arrow[r, "\beta_{ext}"] & H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}}(\ell)\otimes \mathcal{O}_X) \arrow[u, equal] \arrow[r, "\delta_{ext}"] & H^1(\Omega^1_{\mathbb{P}}(\ell)\otimes \mathcal{I}_X) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

それぞれ、(i)，(iii) の条件は $\bar\delta_{ext}(\varphi)=0$，$\delta_{ext}(\varphi)=0$ という条件と同値ですから、結局、$\bar\delta_{ext}(\varphi)=0$ から $\delta_{ext}(\varphi)=0$ を導びけばよいことになります。また、次の完全列も考えます。

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus^{N+1} H^0(\mathcal{I}_X/\mathcal{J}(\ell-1)) \arrow[r, "\bar\beta_{EN}=(X_0,\cdots,X_N)"'] & H^0(\mathcal{I}_X/\mathcal{J}(\ell)) \arrow[r, "\bar\delta_{EN}"'] & H^1(\Omega^1_{\mathbb{P}}(\ell)\otimes \mathcal{I}_X/\mathcal{J}) & \\
\bigoplus^{N+1} H^0(\mathcal{I}_X(\ell-1)) \arrow[u] \arrow[r, "\beta_{EN}=(X_0,\cdots,X_N)"] & H^0(\mathcal{I}_X(\ell)) \arrow[u] \arrow[r, "\delta_{EN}"] & H^1(\Omega^1_{\mathbb{P}}(\ell)\otimes \mathcal{I}_X) \arrow[u] \arrow[r] & \bigoplus^{N+1} H^1(\mathcal{I}_X(\ell-1))
\end{tikzcd}$$

ここに出てきた δ_{EN} 等に関して次のことが成立します．

<u>補題1</u>　右の図で、

$$\delta_{ext}\cdot d_I = -\ell\,\delta_{EN}$$

が成立する．

$$\begin{tikzcd}
H^0(\mathcal{I}_X(\ell)) \arrow[rr, "d_I"] \arrow[dr, "\delta_{EN}"'] & & H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}}(\ell)\otimes \mathcal{O}_X) \arrow[dl, "\delta_{ext}"] \\
& H^1(\Omega^1_{\mathbb{P}}(\ell)\otimes \mathcal{I}_X) &
\end{tikzcd}$$

(証明はチェック コサイクル表示を使ってなされます)

<u>注意3</u>　$\bar d_I : H^0(\mathcal{I}_X/\mathcal{J}(\ell)) \longrightarrow H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}}(\ell)\otimes \mathcal{O}_X)$ を自然に d_I から

誘導されたものとします。このとき $\bar{\delta}_{ext}\cdot\bar{d}_I = -\ell\,\bar{\delta}_{EN}$ は一般に成立しません。実は問題(*)の非線型性がこの中にかくれているのです。

さて、この補題からただちに次のことが示せます。

<u>補題2</u>　ℓ は任意の整数で、体 k については、$ch(k) = 0$ もしくは $ch(k) \nmid \ell$ がみたされているとせよ。X が k 上の既約かつ被約な射影スキームで、埋込み $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_k = \mathbb{P}$ において $H^1(I_X(\ell-1)) = 0$ と仮定する。このとき、勝手に与えられた $\varphi \in H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}}(m) \otimes \mathcal{O}_X)$ に対して、$F \in H^0(I_X(\ell))$, $\sigma \in H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}}(\ell))$ が存在し、

$$\varphi = d_I(F) + \sigma|_X$$

とかける。ただし、この様な表示は一意的とは限らない。

この補題が問題(*)の非線型性がもたらす困難を突破する糸口を我々に与えてくれます。次の図式で考えます。中央の ×(バツ) 印以外は可換ですので、注意深く可換の部分を使って議論を進めることにします。ここで $d_I = \bar{d}_I \cdot r_m$ ですので補題1から $\delta_{ext}\cdot(-\frac{1}{m}\bar{d}_I)\cdot r_m = \delta_{EN}$ が成立しています（$m>0$ としてよいことと $ch(k) \nmid m$ より）。
また β_{**} と δ_{**} は完全列をなしています。

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & \overset{N+1}{\oplus} H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}}(m-1)) \arrow[dll] \arrow[dd, "{(x_0,\cdots,x_N)}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
\overset{N+1}{\oplus} H^0(I_X(m-1)) \arrow[r, "r_{m-1}"] \arrow[dd, "{\beta_{EN}=(x_0,\cdots,x_N)}"'] \arrow[ddr, phantom, "\circlearrowright"] & \overset{N+1}{\oplus} H^0(I_X/J\,(m-1)) \arrow[r, "-\frac{1}{m}\bar{d}_I"] \arrow[dd, "{\bar{\beta}_{EN}=(x_0\cdots x_N)}"'] \arrow[ddr, phantom, "\circlearrowright"] & \overset{N+1}{\oplus} H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}}(m-1)\otimes\mathcal{O}_X) \arrow[dd, "{(x_0,\cdots,x_N)}"] & & \\
 & & & H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}}(m)\otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}/J) \arrow[dl, "\bar{\beta}_{ext}"] & H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}}(m)) \arrow[l] \arrow[d, "\beta_{ext}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
H^0(I_X(m)) \arrow[r, "r_m"] \arrow[ddrr, bend right, "\delta_{EN}"'] & H^0(I_X/J\,(m)) \arrow[r, "-\frac{1}{m}\bar{d}_I"] \arrow[dr, "\bar{\delta}_{EN}"'] & H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}}(m)\otimes\mathcal{O}_X) \arrow[rr, equal] \arrow[d, "\bar{\delta}_{ext}"] & & H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}}(m)\otimes\mathcal{O}_X) \arrow[ddll, "\delta_{ext}"] \\
 & & H^1(I_X/J\,(m)\otimes\Omega^1_{\mathbb{P}}) & & \\
 & & H^1(I_X(m)\otimes\Omega^1_{\mathbb{P}}) \arrow[u, "r'_m"] & &
\end{tikzcd}
$$

定理の条件(i)を仮定しますから、$\bar{\delta}_{ext}(\varphi)=0'$ です。定理の仮定から、補題2の仮定が $\ell=m$ の時成立しますから、$F\in H^0(I_X(m))$，　$\sigma\in H^0(\Omega^1_P(m))$ が存在して、

$$\varphi = d_I(F)+\sigma|_X$$

とかけます．このことと、$\bar{\delta}_{ext}(\varphi)=0$ から

$$\bar{\delta}_{ext}\cdot d_I(F) = \bar{\delta}_{ext}(\varphi)-\bar{\delta}_{ext}(\sigma|_X)=0$$

従って、$$\bar{\delta}_{EN}\cdot r_m(F) = r_m'\,\delta_{EN}(F) = -\frac{1}{m}r_m'\,\delta_{ext}\,d_I(F)$$

$$= -\frac{1}{m}\bar{\delta}_{ext}\,d_I(F)=0$$

$\bar{\delta}_{EN}$ と $\bar{\beta}_{EN}$ の完全性から $\varphi_0,\cdots,\varphi_N\in H^0(I_X/J(m-1))$ が存在し、　$r_m(F)=\bar{\beta}_{EN}((\varphi_0,\cdots,\varphi_N))=\sum_{\lambda=0}^{N}\varphi_\lambda\otimes X_\lambda$ となります。今 $\bar{d}_I$ の $\mathcal{O}_P$ 線型性に注意すれば、

$$d_I(F) = \bar{d}_I\cdot r_m(F) = \sum_{\lambda=0}^{N}\bar{d}_I(\varphi_\lambda)\otimes X_\lambda$$

となります．再び、定理の仮定から補題2の仮定が $\ell=m-1$ の時成立しますから、今度は各々の $\bar{d}_I(\varphi_\lambda)\in H^0(\Omega^1_P(m-1)\otimes\mathcal{O}_X)$ に補題2を適用することによって $G_\lambda\in H^0(I_X(m-1))$, 及び $\sigma_\lambda\in H^0(\Omega^1_P(m-1))$　$(\lambda=0,1,\cdots,N)$ が存在して

$$\bar{d}_I(\varphi_\lambda) = d_I(G_\lambda)+\sigma_\lambda|_X \qquad (\lambda=0,1,\cdots,N)$$

とかけることがわかります．従って今度は d_I の $\mathcal{O}_P$ 線型性を使って

$$d_I(F) = \sum_{\lambda=0}^{N}\bar{d}_I(\varphi_\lambda)\otimes X_\lambda = \sum_{\lambda=0}^{N}d_I(G_\lambda)\otimes X_\lambda + \left(\sum_{\lambda=0}^{N}\sigma_\lambda\otimes X_\lambda\right)\Big|_X$$

$$= d_I\left(\sum_{\lambda=0}^{N}G_\lambda\otimes X_\lambda\right)+\left(\sum_{\lambda=0}^{N}\sigma_\lambda\otimes X_\lambda\right)\Big|_X$$

結局、 $\delta_{ext}(\varphi) = \delta_{ext}\, d_I(F) + \delta_{ext}(\sigma|_X) = \delta_{ext}\, d_I(F)$

$$= \delta_{ext}\cdot d_I\left(\sum_{\lambda=0}^{N} G_\lambda \otimes X_\lambda\right) + \delta_{ext}\left(\left(\sum_{\lambda=0}^{N} \sigma_\lambda \otimes X_\lambda\right)\Big|_X\right)$$

$$= -m\ \delta_{EN}\left(\sum_{\lambda=0}^{N} G_\lambda \otimes X_\lambda\right) = -m\cdot\delta_{EN}\cdot\beta_{EN}(G_0,\cdots,G_N)$$

$$= 0$$

<u>定理の証明終了</u>

<u>注意4</u>　例3はこの定理の結論が成立しない例ですが、それは $\dim_k H^1(I_X(1)) = 1$ で、仮定の $H^1(I_X(m-2)) = 0$ が成立しないことによっています。

ここでさらに補題2と定理を組み合せることによって次の系を得ることができます。

<u>系1</u>　m は任意の整数で、体 k については $ch(k)=0$ もしくは $ch(k)\nmid m(m-1)$ がみたされているとせよ。 X が k 上の n 次元$(n>0)$既約かつ被約な射影スキームで、埋込み $j: X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_k = P$ は射影的 S_2 条件をみたすか、より一般的に $H^1(I_X(m-1)) = H^1(I_X(m-2)) = 0$ をみたすとする。このとき以下の同型が存在する。

$$H^0(I_X(m)) \Big/ \sum_{\lambda=0}^{N} X_\lambda\cdot H^0(I_X(m-1)) \xrightarrow{\sim} H^0(\Omega^1_P(m)\otimes \mathcal{O}_X) \Big/ \mathrm{Ker}\, \bar{\delta}_{ext}$$

§3 新たな問題提起

定理及び系1の内容を解釈してみましょう。定義多項式系がわかれば、X は $\mathbb{P}^N_k$ の閉部分スキームとして回復できるという点から考えますと、ある意味で、この定理及び系1は埋込みが射影的 S_2 条件をみたすという仮定の下で、埋込みの情報がすべて1次の無限小近傍 $X_{(1)}$ や $X_{(\frac{1}{2})}$ の中にとりこまれていると申すことができましょう。従って射影的 S_2 条件をみたす埋込みに対して、"法束 $N_{X/\mathbb{P}}$ などの情報から、その埋込みの情報が回復されないか" といった類の一連の問題群が設定されます。これからの研究の一つの指針を与えてくれるのではないでしょうか。その方向へむけた結果の1例として次の系をあげておきます。

<u>系2</u>　体 k は代数閉体で $ch(k)=0$ とせよ。X は k 上 n 次元 $(n>0)$ の既約かつ被約な射影スキーム。埋込み $j: X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_k = \mathbb{P}$ は余次元 r の射影的 S_2 条件をみたすものと仮定する。このとき、以下の2条件は同値である。

(i) $j(X)$ は $(m_1, \cdots, m_r)$ 型完全交叉

(ii) I/I^2 もしくは I/J が $\mathcal{O}(-m_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(-m_r)$ なる $\mathbb{P}$ に<u>拡張可能</u>な直線束の直和に分解

<u>注意5</u>　r に比べて N が大きい場合には条件(ii)の

拡張可能なという条件は不要となります。

証明の方針　(ii)から(i)を導びく時に、射影的S_2条件だけでは $H^1(I_X^2(*)) = 0$ などがいえず（例2③参照）、そのため I/I_X^2 もしくは I/J を分裂させる切断が $I(*)$ の切断へ引き上げ可能という保障のないところが要点です。I_X/J の方を例にとります。(ii)から $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \dim_{k} \mathrm{Im}\,(\bar{\delta}_{ext} : H^0(I_X/J(m)) \longrightarrow H^1(I_X/J \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}}(m))) \leqq r$ が簡単に示せます。これに系1を適用し、X が r 個以下の方程式で定義されることがわかり、(i)が示せます。

参考

[U] T. Usa : On Obstructions of Infinitesimal Lifting (in preparation)

追記　最終回の講演に出た話のうち Kähler形式の定義で 2π を抜かしていたのは Wells の方でした。Griffiths-Harris の方は、これに関する限り正しく書いております。いいかげんなことを申して大変申し分けありません。