数理解析研究所講究録
第 621 巻 1987 年 96-101

Some Examples of Local Rings

京大理 西村純一 (Jun-ichi Nishimura)

Introduction.

C. Rotthaus, T. Ogoma (小駒哲司), R. C. Heitmann らによる singular formal fibre を持つ local ring の構成法は、種々の新しい例を与えるとともに、従来の M. Nagata (永田雅宜), D. Ferrand - M. Raynaud らによって得られていた比較的むつかしい local ring の例の一部をも、組織的機械的に実現することを可能にした。しかし、Nagata による、2-dim. non-mal local domain で、completion が non-trivial nilpotent elements をもつ例や、3-dim. local domain で、その derived normal ring が noetherian とはならない例などの構成には、そのままでは適用できない。

我々は、Rotthaus, Ogoma, Heitmann の手法を、もう少し一般化することにより、上述の Nagata の 2例、および、3-dim. local factorial domain で、universally catenary でな

い例を作ることを試みた。

なお、詳細は J. NISHIMURA : Some Examples of Local Rings (preprint) を参照のこと。

Notation.

以下、ring はすべて commutative で、単位元 1 をもつとする。また、$\mathbb{N}$ で、自然数全体、$\mathbb{N}_0$ で、負でない整数全体の集合を表す。

K_0 を(高々)可算な体、例えば、$\mathbb{Q}$(有理数体)、$\mathbb{F}_q$ (有限体)、$\overline{\mathbb{F}_p}$、等とし、K を、K_0 上可算次純超越拡大体とする。すなわち、$K = K_0(a_{ik}, b_{ik}, c_{jk})$、ここで、$a_{ik}, b_{ik}, c_{jk}$ は、K_0 上超越基 ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq r$, $k \in \mathbb{N}$)。

更に、変数 $u_1, \ldots, u_d$, $v_1, \ldots, v_n$, $w_1, \ldots, w_r$ をとり、$R_0 = K_0[u, v, w]_{(u,v,w)}$, $R = K[u, v, w]_{(u,v,w)}$, $\mathfrak{m} = (u, v, w)R$ とおく。このとき、$(R, \mathfrak{m})$ は、可算な regular local ring であり、height one prime ideals に番号付けできる。(我々の構成法においても、「番号付け」が一番essential なのだが、一番めんどうでもあるので、詳細は略。)

§1. Preliminaries.

まず、$F_1, \ldots, F_r$ として、$K_0[Z_1, \ldots, Z_n]$ の元で、constant termをもたないものをとる。また、変数 Q_{ik}, S_{im} ($1 \leq i \leq n$; $k, m \in \mathbb{N}_0$) に対し $X_{ik} = Q_{i0} + Q_{i1} + \cdots + Q_{ik}$, $Y_{im} = S_{i0} + S_{i1} + \cdots + S_{im}$, $Z_{ikm} = X_{ik} + Y_{im}$ とおき、この Z_{ikm} を F_j の Z_i に代入すると、

$$F_j(Z_{1km}, \ldots, Z_{nkm}) = \sum k_{ED} Q^E S^D \in K_0[Q_{ih}, S_{il}]$$

($0 \leq h \leq k$, $0 \leq l \leq m$) が得られる。ここで、$E = (e_{10}, e_{11}, \ldots, e_{1k}, e_{20}, \ldots, e_{nk}) \in \mathbb{N}_0^{n(k+1)}$, $D = (d_{10}, d_{11}, \ldots, d_{1m}, d_{20}, \ldots, d_{nm}) \in \mathbb{N}_0^{n(m+1)}$, $Q^E = Q_{10}^{e_{10}} \cdot Q_{11}^{e_{11}} \cdots Q_{nk}^{e_{nk}}$, $S^D = S_{10}^{d_{10}} \cdot S_{11}^{d_{11}} \cdots S_{nm}^{d_{nm}}$ を表す。

さて $o(E) = \max.\{0, \{j \mid e_{ij} > 0 \text{ for } \exists i (\leq n)\}\}$, $o(D) = \max.\{0, \{l \mid d_{il} > 0 \text{ for } \exists i (\leq n)\}\}$ と定め、

$$F_j^+(Z_{km}) = \sum_{o(E) > o(D)} k_{ED} Q^E S^D, \quad F_j^-(Z_{km}) = \sum_{o(E) \leq o(D)} k_{ED} Q^E S^D$$

を定義する。

次に、R_0 の元 $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ で、$u_1, \ldots, u_d, x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_r$; $u_1, \ldots, u_d, y_1, \ldots, y_n, w_1, \ldots, w_r$; $u_1, \ldots, u_d, z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_r$ がそれぞれ R の regular system of parameters になるものをとる(ただし、$z_i = x_i + y_i$)。

さて、$\pi_1 = u_1$ とおき、$p_1 \in R_0$ をとり、更に、$\pi_2, p_2, \pi_3, p_3, \ldots$ と次のように inductive に R の商体の元を定める。まず、$\pi_1, \ldots, \pi_k, p_1, \ldots, p_k$ まで定まったとして、

$$q_h = \prod_{i=1}^{h} p_i = p_1 \cdot p_2 \cdots p_h \quad (h \leq k), \quad \sigma_h = \prod_{i=1}^{h} \pi_i.$$

と書く。次に適当な自然数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ に対し

$$t_h = q_h^{\varepsilon_h} \sigma_h ; \quad x_{ik} = x_i + a_{i1} q_1^{\varepsilon_1} + \cdots + a_{ik} q_k^{\varepsilon_k} ;$$
$$\eta_{ik} = y_i + b_{i1} \sigma_1^{\varepsilon_1} + \cdots + b_{ik} \sigma_k^{\varepsilon_k} ; \quad \xi_{ikk} = x_{ik} + \eta_{ik} ;$$
$$w_{jk} = w_j + c_{j1} t_1^{\varepsilon_1} + \cdots + c_{jk} t_k^{\varepsilon_k} \quad (1 \leq i \leq n ; \ 1 \leq j \leq r)$$

とおく。ここで前述の $F_j^+(Z_{kk})$ の変数 Q_{ih}, $S_{i\ell}$ に、それぞれ $a_{ih} q_h^{\varepsilon_h}$, $b_{i\ell} \sigma_\ell^{\varepsilon_\ell}$ を代入したものを f_{jkk}^+ と書き、$\alpha_{jkk}^+ = \frac{1}{q_k^{\nu_k}} (w_{jk} + f_{jkk}^+)$ と定義する。(ここで ν_k は適当な自然数) このとき π_{k+1} を $R[\alpha_{kk}^+]$ の元で $\pi_{k+1} = r_{k+1} + \sum r_{j(k+1)} q_k^{\lambda_k} \alpha_{jkk}^+$ (r_{k+1}, $r_{j(k+1)} \in R$, λ_k はある自然数)、また $p_{k+1} \in R$ をとり以下同じ操作をくり返す。 .....

上の記号と同様に $f_{jkm}^+ = F_j^+(\zeta_{1km}, \ldots, \zeta_{nkm})$, $\phi_{jkm}^- = F_j^-(\zeta_{1km}, \ldots, \zeta_{nkm})$, $\alpha_{jkm}^+ = \frac{1}{q_k^{\nu_k}} (w_{jk} + f_{jkm}^+)$, $\alpha_{jkm}^- = \frac{1}{\sigma_m^{\nu_m}} (-w_{jm} + \phi_{jkm}^-)$ と定める。

すると多項式展開を利用することにより、α_{jkk}^+, α_{jkk}^- について次の関係を得る。

$$\alpha_{jkk}^+ = \frac{q_{k+1}^{\nu_{k+1}}}{q_k^{\nu_k}} \alpha_{j(k+1)(k+1)}^+ + \frac{q_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}}}{q_k^{\nu_k}} k_{jkk}^+$$
$$\alpha_{jkk}^- = \frac{\sigma_{k+1}^{\nu_{k+1}}}{\sigma_k^{\nu_k}} \alpha_{j(k+1)(k+1)}^- + \frac{\sigma_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}}}{\sigma_k^{\nu_k}} k_{jkk}^-$$

(ここで $k_{jkk}^+ \in R[\alpha_{(k+1)(k+1)}^+]$, $k_{jkk}^- \in R[\alpha_{kk}^+]$)

§2. Relations

$W_0 = K_0[u, Z_1, \ldots, Z_n]$, $T_1, \ldots, T_r$ を変数とし、W_0-hom. φ を次のように定める。

$$\varphi : W_0[T_1, \ldots, T_r] \longrightarrow W_0[\tfrac{1}{u}] \quad \left(T_j \mapsto \frac{F_j}{u}\right)$$

このとき、$\mathrm{Ker}\,\varphi = (uT_1 - F_1, \ldots, uT_r - F_r, G_1(Z,T), \ldots, G_s(Z,T))$ と書ける。(ただし、$F_j \in K_0[Z_1, \ldots, Z_n]$ (cf. §1)、$G_h(Z,T) \in K_0[Z][T]$ で、T について homogeneous。)

この $G_h(Z,T)$ の変数 Z_i, T_j に、それぞれ ζ_{ikm}, α^+_{jkm} (または、α^-_{jkm}) を代入し、$\beta^+_{hkk} = \frac{1}{\sigma_k^{\mu_k}} G_h(\zeta_{kk}, \alpha^+_{kk})$, $\beta^-_{hkk} = \frac{1}{q_k^{\mu_k}} G_h(\zeta_{kk}, \alpha^-_{kk})$, etc. を(適当な $\mu_k \in \mathbb{N}$ をとり)定義する。更に、§1と同様、多項展開を実行することにより、次の関係式を得る。(ただし、$g_h = \deg_T G_h$)

$$\beta^+_{hkk} = -\left(\frac{q_{k+1}^{\nu_{k+1}}}{q_k^{\nu_k}}\right)^{g_h} \left\{ \frac{\sigma_{k+1}^{\mu_{k+1}}}{\sigma_k^{\mu_k}} \beta^+_{h(k+1)(k+1)} + \frac{\sigma_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}}}{\sigma_k^{\mu_k}} \cdot \delta^+_{h(k+1)k} \right\} + \frac{q_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}}}{q_k^{\nu_k g_h}} \left(\frac{\sigma_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}}}{\sigma_k^{\mu_k}} \delta^+_{hkk} + \frac{\sigma_k^{\nu_k}}{\sigma_k^{\mu_k}} \sum \alpha^-_{jkk} \cdot \gamma^+_{hjkk} \right)$$

$$\beta^-_{hkk} = -\frac{q_{k+1}^{\mu_{k+1}}}{q_k^{\mu_k}} \left(\frac{\sigma_{k+1}^{\nu_{k+1}}}{\sigma_k^{\nu_k}}\right)^{g_h} \beta^-_{h(k+1)(k+1)} + \frac{\sigma_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}}}{\sigma_k^{\nu_k g_h}} \left(\frac{q_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}}}{q_k^{\mu_k}} \delta^-_{h(k+1)k} + \frac{q_{k+1}^{\nu_{k+1}}}{q_k^{\mu_k}} \sum \alpha^+_{j(k+1)(k+1)} \gamma^-_{hj(k+1)k} \right) + \frac{q_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}}}{q_k^{\mu_k}} \cdot \delta^-_{hkk}$$

ここで、$\delta^-_{hkk} \in R[\alpha^+_{kk}][\alpha^-_{kk}]$ で、homogeneous in α^-_{kk}'s.

$\delta^+_{h(k+1)k} \in R[\alpha^+_{kk}][\alpha^+_{(k+1)(k+1)}]$ で homogeneous in $\alpha^+_{(k+1)(k+1)}$'s.
$\delta^-_{h(k+1)k}$, $\gamma^-_{hj(k+1)k}$, δ^+_{hkk}, $\gamma^+_{hjkk} \in R[\alpha^+_{kk}]$。

§3 Construction.

$B = \bigcup_k R[\alpha^+_{jkk}, \alpha^-_{jkk}, \beta^+_{hkk}, \beta^-_{hkk}]$ $(1 \le j \le r,\ 1 \le h \le s)$,
$M = (u, v, w)B$. とする。このとき.

__Lemma.__ MはBの maximal ideal で $B/M \cong R/\mathfrak{m}\ (\cong K)$。

次に. $A = B_M$, $\mathfrak{m} = MA$ とする。このとき (ただし

$\pi_1, p_1, \pi_2, p_2, \dots, \pi_k, p_k, \dots;$
$$\begin{array}{ccccccc} \mu_1 & < & \mu_2 & < \cdots < & \mu_k & < \cdots \\ \wedge & & \wedge & & \wedge & \\ \nu_1 & < & \nu_2 & < \cdots < & \nu_k & < \cdots \\ \wedge & & \wedge & & \wedge & \\ \varepsilon_1 & < & \varepsilon_2 & < \cdots < & \varepsilon_k & < \cdots \end{array}$$
を十分大きくとると。)

__Proposition.__ $(A, \mathfrak{m})$ は noetherian factorial (local) domain で
$$\hat{A} \cong K[[u_1, \dots, u_d, Z_1, \dots, Z_n]]/(F_1(Z), \dots, F_r(Z)).$$