数理解析研究所講究録
第 621 巻 1987 年 102-107

正則列で生成されたイデアルの整閉包について

広島大・理　伊藤 史朗 (Shiroh Itoh)

この小文では、あとで述べる定理Aの証明の概略と、講演では述べなかったその応用について記述したい。なお、詳細は[1]をみて下さい。

§1. Main Theorem.

ネータ環 A のイデアル I について $\overline{I}$ はその整閉包を表わす。即ち、$\overline{I}=\{x\in A \mid x$ は $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$, $a_i\in I^i$, なる関係式をみたす$\}$ である。

定理A. ネータ環 A と、正則列で生成される A のイデアル Q について、$\overline{Q^{n+1}}\cap Q^n=\overline{Q}Q^n$ が任意の自然数 n について成立する。

A が次元2の正規局所環で解析的不分岐、

Qをその parameter イデアルとし，$G=\bigoplus_{n\geq 0}\overline{Q^n}/\overline{Q^{n+1}}$ とおくと $H^1_{G_+}(G)_n=0$ $(n<0)$ となることがわかっている（[2]）。$H^1_{G_+}(G)$を次の complex $0\to G\to G_{\bar{x}}\times G_{\bar{y}}\to G_{\bar{x}\bar{y}}\to 0$（ここで，$x, y$は$Q$の生成系で，$\bar{x}, \bar{y}$は$x, y$の initial form）で計算してみると、$H^1_{G_+}(G)_{-1}=0$ から容易に $\overline{Q^{n+1}}\cap Q^n=\bar{Q}Q^n$ であることが導かれる。従って定理Aはこの事実の一般化である。又証明の拠所となるべき事実がどのようなものであるかも暗示している。実際のところ，我々は次の定理Bを用いて定理Aの証明を行う。（本当はもっと簡単な証明が望ましいと思うのだが….）

定理B．ネータ環Aとその正則列 $x_1,\cdots,x_d$ $(d\geq 2)$を考える。$Q=(x_1,\cdots,x_d)$，$R=\sum_{n\in\mathbb{Z}}Q^n t^n$，$R'=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\overline{Q^n}\,t^n$（$t$は変数）とおく。$2\leq r\leq d$ なる自然数を固定し，$J=(t^{-1}, x_1t,\cdots, x_rt)R$ とおくと $H^2_J(R')_m=0$，$m\leq 0$。さらに各 x_jt $(j=1,\cdots,d)$ は $R'/t^{-1}R'$ の正則元である。

定理Bの証明は省略するが、この証明には Rees による次の結果を使用するということを注意しておく。

補題　uをネータ環Aの正則元，BをAのA_uにおける整閉包とする。このときuBは準素イデアル分解$uB = Q_1 \cap \cdots \cap Q_r$ができて，$P_i = \sqrt{Q_i}$　$(i=1,\cdots,r)$とおいたとき各$(B_{P_i})_{red}$はDVR.

以下、定理Aの証明の概略を述べる。まず定理Bから次の主張が導かれる。

命題C.　$\overline{Q^{n+1}} \cap (x_1, x_2)^n = \overline{Q} \cdot (x_1, x_2)^n$.

証明(の概略). $R = \sum Q^n t^n$, $R' = \sum \overline{Q^n} t^n$, $J = (t^{-1}, x_1 t, x_2 t)R$ とおく。$H^1_J(R')$を Čech complex
$0 \to R'_{x_1 t} \times R'_{x_2 t} \times R'_{t^{-1}} \to R'_{x_1 t\, x_2 t} \times R'_{x_1 t\, t^{-1}} \times R'_{x_2 t\, t^{-1}} \to R'_{x_1 t\, x_2 t\, t^{-1}} \to 0$ を用いて計算すると$H^1_J(R')_0 = 0$から命題Cの主張が導かれる。

定理Aの証明(の概略):

dについての帰納法で証明する。$d=1$のときは明らか。$d=2$のときは命題C. そこで$d>2$とする。このときAは局所環として一般性を失わない。$R' = \sum \overline{Q^n} t^n$とおき，$t^{-1}R'$の素因子を$P_1, \cdots, P_r$と

する。$V_i=(R'_{\mathfrak{p}_i})_{red}$ とおく。補題より各 V_i はDVRである。さらに、$a\in A$, $n\in\mathbb{N}$ に対して、$a\in\overline{Q^n}$ $\Leftrightarrow$ $a\in Q^nV_i$ $i=1,\cdots,r$ となる。そこで x_1 を選び直して $x_1V_i=QV_i$, $i=1,\cdots,r$ となるようにとっておく。$B=A[x_2/x_1]$, $I=(x_1,x_3,\cdots,x_d)B$ とおく。x_1 の選び方から $\overline{I^{n+1}}\cap A=\overline{Q^{n+1}}$. 又 $I^n\cap A=Q^n$ は明らかであろう。さて帰納法の仮定から $\overline{I^{n+1}}\cap I^n=I^n\overline{I}$。以上のことを用いて $\overline{Q^{n+1}}\cap Q^n\subseteq Q^n\overline{Q}$ となることが(途中の計算はめんどうであるが)証明できる。

§2. 応用

前節の結果の応用を証明抜きで述べる。これらも詳細は[1]をみて下さい。

命題D. A を Cohen-Macaulay 局所環，Q をその parameter イデアルとする。もし $\overline{Q^{n+2}}=Q^n\overline{Q^2}$, $\forall n\geq 0$, であれば $G=\bigoplus_{n\geq 0}\overline{Q^n}/\overline{Q^{n+1}}$ は Cohen-Macaulay 環である。

実のところ、命題Cの証明のために定理Aを考

えたのである。命題Dの証明においては $\overline{Q^2} \cap Q = \overline{Q}Q$ が成立することが分れば、あとは引用で済むのである。

命題E. A を d 次元 Cohen-Macaulay 局所環で解析的不分岐，Q をその parameter イデアルとする。各 $n \geqq 0$ に対し，

$$\ell_A(A/\overline{Q^{n+1}}) \leqq \ell_A(A/Q)\binom{n+d}{d} - \{\ell_A(\overline{Q}/Q) + \ell_A(\overline{Q^2}/Q\overline{Q})\}\binom{n+d-1}{d-1} + \ell_A(\overline{Q^2}/Q\overline{Q})\binom{n+d-2}{d-2}.$$

$n \geqq 1$ のとき，等号成立 $\Leftrightarrow$ $\overline{Q^{n+1}} = Q^{n-1}\overline{Q^2}$.

以下 (A, M) は2次元 Cohen-Macaulay 局所環，解析的不分岐，A/M は無限体とする。A の parameter イデアル Q に対し $g(Q) = \ell_A(H^1(X, \mathcal{O}_X))$ とおく。ここで $X = \mathrm{Proj}(\bigoplus_{n\geqq 0}\overline{Q^n})$ である。さらに $H(A) = \sup\{g(Q) \mid Q$ は A の parameter イデアル$\}$ とおく (cf. [2])。

命題F.

(1) $H(A) = 0$ $\Leftrightarrow$ 任意の parameter イデアル Q について $\overline{Q^{n+1}} \subseteq Q^n$, $\forall n \geqq 0$.

(2) $H(A) = 1 \Rightarrow$ 任意の parameter イデアル Q について $\overline{Q^{n+2}} \subseteq Q^n$, $\forall n \geq 0$.

参考文献

[1] S. Itoh, Integral closures of ideals generated by regular sequences. preprint

[2] J. Lipman, Desingularization of two-dimensional schemes, Ann. of Math., 107 (1978), 151-207.

[3] D. Rees, Nagoya Lectures.