

非可換トーラス上の Yang-Mills

横浜市立大 中神祥臣 (Yoshiomi Nakagami)

1985年夏にIowa大学で開かれた“作用素環と数理物理学の会議”において、M. Rieffel は幾何学者が話題にしている Yang-Mills の理論を非可換微分幾何の枠組に取り入れ、無理数回転 C^* 環 A_θ 上の特定の加群に対して、Yang-Mills方程式を解き、解の成すゲージ同値類全体が具体的な位相空間と同相に成ることを示した。その後、この内容は A. Connesと共著で次のプレプリント

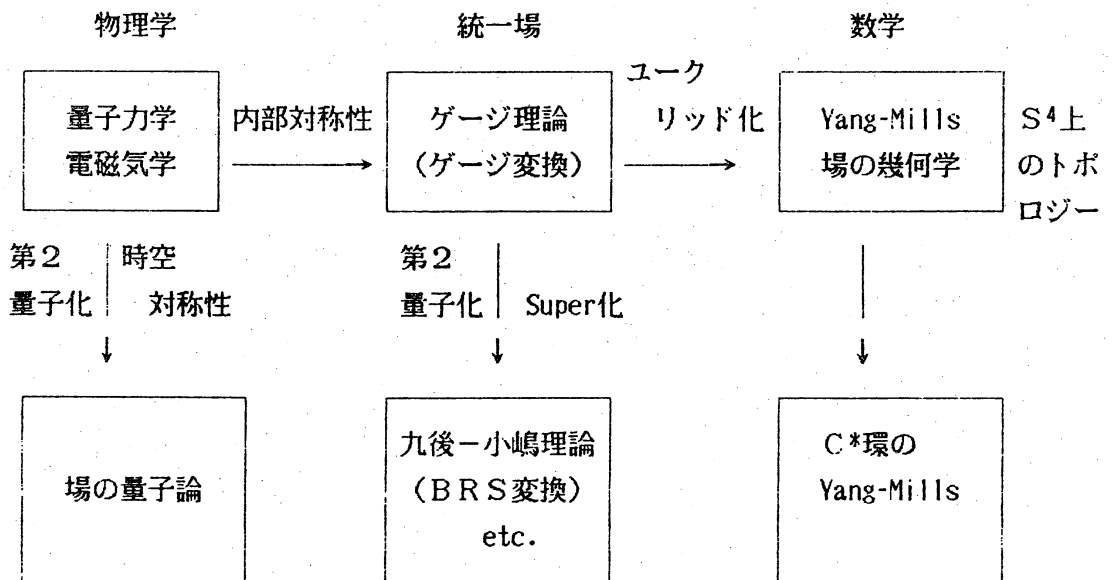
[1] Yang-Mills for non-commutative two-tori, Operator Algebras and Mathematical Physics (Ed. Jorgensen and Muhly) Contemporary Math., 60 AMS, 1986, to appear.

にまとめられ、その前書きで、この研究の目的の1つは、非可換多様体に対応する C^* 環から、その“多様体の影”を捉えることにあると述べている。ここでは、これと、この結果を利用した G. Elliott の

[2] The diffeomorphism group of the irrational rotation C^* -algebra, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 8, #5 (1986), 329-334.

の内容を紹介する。

元来 Yang-Mills理論というのは、物理学者が統一的場の理論を試みようとするゲージ理論の別名であったが、最近ではその中から生み出された数学的側面が広く知られるように成って来ている。



Connes達の非可換微分幾何 単位的C*環Aにおける微分構造は、それに作用する連結Lie群Gから導かれる。いま(A, G, α)をそのようなC*力学系とし、 A^∞ を作用 α に関する C^∞ ベクトルの全体とする。有限生成の射影的右 A^∞ 加群 Ξ に対し、線形写像

$\nabla: \Xi \rightarrow \Xi \otimes \mathcal{O}^*$ が各 $X \in \mathcal{O}$ に対し

$$\nabla_X(\xi a) = (\nabla_X \xi)a + \xi \delta_X(a), \quad \xi \in \Xi, \quad a \in A^\infty$$

をみたすとき、 ∇ を Ξ の接続という。 Ξ 上にはAに値をもつ正定値内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ で $\langle \xi, \eta \rangle_{A^*} = \langle \eta, \xi \rangle_A$ と $\langle \xi, \eta a \rangle_A = \langle \xi, \eta \rangle_A a$ をみたすものが在る。接続 ∇ の中でも整合性の条件

$$\delta_X \langle \xi, \eta \rangle_A = \langle \nabla_X \xi, \eta \rangle_A + \langle \xi, \nabla_X \eta \rangle_A$$

をみたす接続の全体を $CC(\Xi)$ とする。接続 ∇ に対し

$$\theta_\nabla(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]} \in \text{End}_A(\Xi)$$

を ∇ の曲率(またはゲージ場)という。これは $\text{End}_A(\Xi)$ に値をもつ交代2形式である。これを用いて Ξ のYang-Mills汎関数YMを

$$YM(\nabla) = -\tau_E(\{\theta_\nabla, \theta_\nabla\}), \quad \nabla \in CC(\Xi)$$

により定義する。ただし、2形式 Φ, Ψ の \mathcal{O} 値内積 $\{\Phi, \Psi\}$ の値は \mathcal{O} の規格直交基底 $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ を用いて $\sum_{i < j} \Phi(Z_i, Z_j) \Psi(Z_i, Z_j)$ で与え、 $E = \text{End}_A(\Xi)$ 上のトレイス τ の値をA上のG不変な忠実トレイス τ を用いて $\tau_E(\langle \xi, \eta \rangle_E) = \tau(\langle \eta, \xi \rangle_A)$ で与える。ここで、 $\langle \xi, \eta \rangle_E$ は $\langle \xi, \eta \rangle_E \zeta = \xi \langle \eta, \zeta \rangle_A$ で与えられる。この場合のゲージ群は $E = \text{End}_A(\Xi)$ のユニタリ元の全体 $U(E)$ であって、 $YM(u \nabla u^*) = YM(\nabla)$, $u \in U(E)$ が成り立つ。 $CC(\Xi)$ の元のうちYMが極小値を取るものの全体 $MC(\Xi)$ の商空間

$MC(\Xi)/U(E)$ を Ξ のモジュラス空間といい、これを求めるのが本講の目的である。

定理([1]) Ξ を A_0^∞ の有限生成射影加群とし、 $d \in \mathbb{N}$ とする。 Ξ が他の有限生成射影加群との積でなければ、 Ξ^d のモジュラス空間は $(T^2)^d / \Sigma_d$ と同相である。ただし、 Σ_d はd個の座標の置換群である。

この計算で用いられた方法を使うと

定理([2]) $\theta \in \mathcal{O}$ がDiophantine条件をみたせば、

$$\text{Aut}(A_0^\infty) \cong \text{PU}_0(A_0^\infty) \rtimes \{T^2 \rtimes \text{SL}(2, \mathbb{Z})\}.$$

ただし、 $\text{PU}_0(A_0^\infty)$ は $U(A_0^\infty)$ の主連結成分を中心で割った商群である。

§1 Yang-Mills 汎関数

この節では、次のような一般的 C^* 力学系 (A, G, α) に対して、Yang-Mills 汎関数、ゲージ群、モジュラス空間 \mathcal{T}_r を定義する。

$\left\{ \begin{array}{l} G \text{ は連結 Lie 群で, Lie 環 } \mathfrak{g} \text{ は正定値内積 } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ をもつ。} \\ A \text{ は } G \text{ 不変忠実トレースをもつ単位的 } C^* \text{ 環とする。} \end{array} \right.$

さて、 C^* 環の微分構造は、その上に微分子を与えることにより定まる。ここでは、 A に対する Lie 群の作用 α の (無限小) 生成元により A の微分構造が与えられるものとする。作用 α に関する C^∞ ベクトル空間全体 A^∞ は A の稠密部分多元環である。 α の生成元は Lie 環 \mathfrak{g} が A^∞ 上の微分子への表現

$$\delta_x(a) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ (\exp tX)a - a \}, \quad x \in \mathfrak{g}, a \in A^\infty$$

を与える。

有限生成 \mathfrak{g} (以後、有限生成 \mathfrak{g} を \mathfrak{g} だけと考える \mathfrak{g} で、この言葉は省く) 射影的右 A 加群 Σ は通常、ベクトル空間

$${}^t(A \oplus \cdots \oplus A) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_j \in A \right\}$$

上の冪等元 $e \in M_n(A)$ を用いて、 $\Sigma = e({}^t(A \oplus \cdots \oplus A))$ と表せる。 e が単位元 1 のときには、射影的と言わず自由である。 e は ${}^t(A \oplus \cdots \oplus A)$ 上の可逆元により、射影元と相似にできる \mathfrak{g} で、予め e は C^* 環 $M_n(A)$ の射影元に選ぶことができる。 A の代りに A^∞ を用いても、射影的右 A^∞ 加群 Σ^∞ を上のように考えることができる。射影元 e を同

型の範囲内で $M_n(A)$ の元を選んで置くことにより, 任意の Ξ は適当な Ξ^∞ により, $\Xi \cong \Xi^\infty \otimes_{A^\infty} A$ と表すことができる. 以後, A, Ξ の代りに, 主に A^∞, Ξ^∞ を扱う.

右 A^∞ 加群 Ξ^∞ 上には, A^∞ に値をもつエルミート計量 $\langle, \rangle_{A^\infty}$ が存在する: $\xi, \eta \in \Xi^\infty$ に対し, $\langle \xi + \eta, \zeta \rangle_{A^\infty} = \langle \xi, \zeta \rangle_{A^\infty} + \langle \eta, \zeta \rangle_{A^\infty}$ かつ

$$\langle \xi, \eta \rangle_{A^\infty}^* = \langle \eta, \xi \rangle_{A^\infty}, \quad \langle \xi, \eta a \rangle_{A^\infty} = \langle \xi, \eta \rangle_{A^\infty} a, \quad a \in A^\infty.$$

(例えば, $\Xi^\infty = e^*(A \oplus \dots \oplus A)$ の場合には, $\langle \xi, \eta \rangle_{A^\infty} = \xi^* \eta$ と可なり). ここで,

$E = \text{End}_{A^\infty}(\Xi^\infty)$ とする. 任意の $\xi, \eta, \zeta \in \Xi^\infty$ に対し

$$\langle \xi, \eta \rangle_E \zeta = \xi \langle \eta, \zeta \rangle_{A^\infty}$$

とすれば, $\langle \xi, \eta \rangle_E$ は E の元であり, E の元はこの形 $\langle \xi, \eta \rangle_E, \xi, \eta \in \Xi^\infty$ の有限1次結合で表される. したがって, Ξ^∞ は E - A^∞ 加群であり,

\langle, \rangle_E は E に値をもつエルミート計量である: $\langle \xi + \eta, \zeta \rangle_E = \langle \xi, \zeta \rangle_E + \langle \eta, \zeta \rangle_E$

かつ $\langle \xi, \eta \rangle_E^* = \langle \eta, \xi \rangle_E, \langle \zeta \xi, \eta \rangle_E = \zeta \langle \xi, \eta \rangle_E, \zeta \in E$.

(上の例のように, $\langle \xi, \eta \rangle_{A^\infty} = \xi^* \eta$ の場合には, $\langle \xi, \eta \rangle_E = \xi \eta^*$ である). A 上に

G 不変なトレース τ が存在することを知覚しているので, E 上には

$$\tau_E(\langle \xi, \eta \rangle_E) = \tau(\langle \eta, \xi \rangle_{A^\infty})$$

をみたす忠実トレース τ_E が存在する. ($\Xi^\infty = e^*(A \oplus \dots \oplus A)$ の場合には,

$\text{End}_A(\Xi), E = \text{End}_{A^\infty}(\Xi^\infty)$ はそれぞれ C^* 環 $eM_n(A)e$ とその稠密部分多元

環 $eM_n(A^\infty)e$ に一視でき, τ_E は $M_n(A) = A \otimes M_n(\mathbb{C})$ 上の忠実トレ

ース $\tau \otimes \text{Tr}$ を $eM_n(A)e$ に制限したものと一致している)

E - A^∞ 加群 Ξ^∞ の双対加群 $\tilde{\Xi}^\infty$ は集合 $\{\xi: \xi \in \Xi^\infty\}$ に A^∞ 加群の演

算 $a\tilde{\zeta} + \tilde{\eta} = (b^* \zeta a^* + \eta)^{\sim}$, $a \in A^{\circ}$, $b \in E$ が定義されたものであり,
 エルミート計量は通常 $\langle \zeta, \tilde{\eta} \rangle_{A^{\circ}} = \langle \zeta, \eta \rangle_{A^{\circ}}$, $\langle \tilde{\eta}, \tilde{\zeta} \rangle_E = \langle \eta, \zeta \rangle_E$ によ
 る。また $\tilde{\Sigma}^{\circ}$ は A° - E 加群である。($\Sigma^{\circ} = e^{\dagger}(A^{\circ} \oplus \dots \oplus A^{\circ})$ の場合には,
 $\tilde{\Sigma}^{\circ} = (A^{\circ} \oplus \dots \oplus A^{\circ})e$) これを用いて,

$$\zeta \otimes \eta \in \tilde{\Sigma}^{\circ} \otimes_E \tilde{\Sigma}^{\circ} \mapsto \langle \zeta, \eta \rangle_{A^{\circ}} \in A^{\circ} \quad (\tilde{\Sigma}^{\circ} \text{ full なとき})$$

$$\zeta \otimes \tilde{\eta} \in \tilde{\Sigma}^{\circ} \otimes_{A^{\circ}} \tilde{\Sigma}^{\circ} \mapsto \langle \zeta, \eta \rangle_E \in E$$

はそれぞれ、両側 A° 加群、両側 E 加群としての同型写像である。($\Sigma^{\circ} = e^{\dagger}(A^{\circ} \oplus \dots \oplus A^{\circ})$ の場合は、 $\zeta \otimes \eta = \zeta^* \eta$, $\zeta \otimes \tilde{\eta} = \zeta \eta^*$) したがって、最初の同型写像は中への同型写像である。これ以上の同型写像 α をとくとき、 $\tilde{\Sigma}^{\circ}$ は full であるという。

$\tilde{\Sigma}^{\circ}$ の接続 ∇ : $\tilde{\Sigma}^{\circ}$ を射影的右 A° 加群とする。線形写像 ∇ :
 $\tilde{\Sigma}^{\circ} \rightarrow \tilde{\Sigma}^{\circ} \otimes \mathfrak{g}^*$ が、各 $x \in \mathfrak{g}$ に対し

$$\nabla_x(\zeta a) = (\nabla_x \zeta) a + \zeta \delta_x(a), \quad \zeta \in \tilde{\Sigma}^{\circ}, a \in A^{\circ}$$

をみたすとき、 ∇ を $\tilde{\Sigma}^{\circ}$ の接続という。 $\tilde{\Sigma}^{\circ}$ の 2 つの接続 ∇^1, ∇^2 の差 $\nabla^1 - \nabla^2$ は、 $E = \text{End}_{A^{\circ}}(\tilde{\Sigma}^{\circ})$ の元である。したがって、 $\tilde{\Sigma}^{\circ}$ の接続全体は E をベクトル空間とするアフィン空間である。つまり、ある定まった接続に E に値を取る \mathfrak{g} 上の 1 形式を加えると、任意の接続が得られる。

つまり、 $\langle, \rangle_{A^{\circ}} \in \tilde{\Sigma}^{\circ}$ 上のエルミート計量とする。接続 ∇ がい

$$\delta_x(\langle \zeta, \eta \rangle_{A^{\circ}}) = \langle \nabla_x \zeta, \eta \rangle_{A^{\circ}} + \langle \zeta, \nabla_x \eta \rangle_{A^{\circ}}, \quad x \in \mathfrak{g}$$

をみたすとき、 ∇ は $\langle, \rangle_{A^{\circ}}$ と両立するという。このように、両立する接続の全体を $CC(\tilde{\Sigma}^{\circ})$ で表す。($\tilde{\Sigma}^{\circ} = e^{\dagger}(A^{\circ} \oplus \dots \oplus A^{\circ})$) に対しては、 $\nabla_x \zeta = e \tilde{\delta}_x(\zeta)$

と置くことで得られる接続をグラスマン接続という。ただし,

$$\tilde{\delta}_x(e^{\psi(a_1, \dots, a_n)}) = e^{\psi(\delta_x(a_1), \dots, \delta_x(a_n))}.$$

容易に検証できるように, グラスマン接続は $\langle \xi, \eta \rangle_{A^\infty} = \xi^* \eta$ (ここで ξ, η はエルミート計量と両立している)

$CC(\Sigma^\infty)$ の 2 元 ∇^1, ∇^2 はともに $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A^\infty}$ と両立しているから, $\nabla_x^1 - \nabla_x^2$ は $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A^\infty}$ に関して全随伴である. E の全随伴な元全体 E_S とすれば, $CC(\Sigma^\infty)$ は A^∞ の空間として E_S を含むアフィン空間である.

また, Σ^∞ 上の接続 ∇ に対し, $\tilde{\nabla}_x \xi = (\nabla_x \xi)^\sim$ とすれば, $\tilde{\nabla}$ は双対加群 $\tilde{\Sigma}^\infty$ 上の接続である.

Σ^∞ の曲率: Σ^∞ の接続 ∇ に対し

$$\Theta_\nabla(x, Y) = \nabla_x \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_x - \nabla_{[X, Y]}, \quad x, Y \in \mathfrak{g}$$

を ∇ の曲率という. これは E に値をもつ \mathfrak{g} 上の交代 2 形式である. ∇ が $CC(\Sigma^\infty)$ の元るときは, Θ_∇ は E_S に値をもつ \mathfrak{g} 上の交代 2 形式である. \mathfrak{g} 上には正定値内積があるものと仮定している. そこで $\{\omega_j : j=1, 2, \dots\}$ を \mathfrak{g}^* の規格直交基底とすれば

$$\Theta_\nabla = \sum_{i < j} (\Theta_\nabla)_{ij} \omega^i \wedge \omega^j, \quad (\Theta_\nabla)_{ij} \in E_S$$

と表す. このとき, 交代 2 形式 $\Phi = \sum_{i < j} \Phi_{ij} \omega^i \wedge \omega^j$, $\Psi = \sum_{i < j} \Psi_{ij} \omega^i \wedge \omega^j$ が E 値内積 $\langle \Phi, \Psi \rangle = \sum_{i < j} \Phi_{ij} \Psi_{ij}$ と置く.

定義 1.1 $CC(\Sigma^\infty, \langle \cdot, \cdot \rangle_{A^\infty})$ 上の汎関数

$$YM(\nabla) = -\tau_E(\{\Theta_\nabla, \Theta_\nabla\}), \quad \nabla \in CC(\Sigma^\infty)$$

を Yang-Mills 汎関数という.

この汎関数の変分問題の解全体, これはこの汎関数の極小値を取るような接続の全体 $MC(\Sigma^0)$ の性質を調べることに, Yang-Mills の問題があるが, 以下では $MC(\Sigma^0)$ のゲージ同値類の空間を調べることにする. (以上の議論はエルミート計量 \langle, \rangle_{A_0} の選り方に依ることに注意しておく. u を, \langle, \rangle_{A_0} を持つ一つのエルミート計量とすれば, $\langle \xi, \eta \rangle_{A_0} = \langle u\xi, u\eta \rangle_{A_0}$ をみたす, E の正逆元 u が存在する. したがって, $\nabla \in CC(\Sigma^0, \langle, \rangle_{A_0}) \mapsto u^{1/2} \nabla u^{-1/2} \in CC(\Sigma^0, \langle, \rangle_{A_0})$ なる全単射がある. $\oplus_{u^{1/2} \nabla u^{-1/2}} = u^{1/2} \oplus_{\nabla} u^{-1/2}$ であるから, $YM(u^{1/2} \nabla u^{-1/2}) = YM(\nabla)$.)

$E = \text{End}_{A_0}(\Sigma^0)$ のユニタリ元の全体を $U(E)$ とし, これをゲージ群という. この群は $MC(\Sigma^0)$ 上へ

$$\nabla \in CC(\Sigma^0) \mapsto u \nabla u^* \in CC(\Sigma^0)$$

の作用をする. したがって, $(u \nabla u^*)_x \xi = u (\nabla_x (u^* \xi))$, $x \in \mathcal{O}$ である. したがって, $\oplus_{u \nabla u^*} (x, Y) = u \oplus (x, Y) u^*$ となるので, $YM(u \nabla u^*) = YM(\nabla)$ となる. したがって, $U(E)$ の元は $MC(\Sigma^0)$ を不変に作用する. このとき,

$$MC(\Sigma^0) / U(E)$$

を Σ^0 のモジュラス空間と見なす. これを無理数同値 C^* 環 A_0 の場合に具体的に求めるのがこの節の目的である.

§2 定曲率の接続

この § 2 では G は可換 Lie 群とする. したがって, 曲率は $\oplus_{\nabla} (x, Y) = \nabla_x \nabla_y - \nabla_y \nabla_x$ となる. とくに, \oplus_{∇} がスカラー値のとき, ∇ は定曲

率の接続とあるとしよう ($\nabla \in CC(\Sigma^0)$).

定理 2.1 \mathcal{M} は可換と可了.

(i) $(\Sigma^0, \langle, \rangle_{A^0})$ が定曲率の接続とあれば, $MC(\Sigma^0)$ は可了可了定曲率の接続全体と一致可了.

(ii) (i) の接続の曲率の値は可了一致可了.

この定理は YM 汎関数の変分問題の解が, 交換関係と可了物理的に可了意味の可了接続と与える可了主張可了あり, 非可換論に可了可了接続の可了意味と考える可了上可了参考可了なる.

証明 ∇^0 を定曲率の接続とし, $\mathcal{H}^0 = \mathcal{H}_{D^0}$ と可了可了, $\mathcal{H}^0 = \kappa 1$, $\kappa \in \Lambda^2 \mathcal{M}^*$.

$\nabla \in CC(\Sigma^0)$ ならば, $\nabla_x - \nabla_x^0 = \mu_x \in E_s$, $x \in \mathcal{M}$. 可了可了.

$$\mathcal{H}_\nabla(x, y) - \mathcal{H}^0(x, y) = [\nabla_x^0, \mu_y] - [\nabla_y^0, \mu_x] + [\mu_x, \mu_y] \in E_s$$

可了可了, $\hat{\delta}_x(\zeta) = [\nabla_x, \zeta]$, $\zeta \in E$ と可了可了, $\hat{\delta}_x$ は E 上の微分可了.

可了可了, $\hat{\delta}_x(\langle \xi, \eta \rangle_E) = \langle \nabla_x \xi, \eta \rangle_E + \langle \xi, \nabla_x \eta \rangle_E$ と可了可了, $\tau_E(\hat{\delta}_x \langle \xi, \eta \rangle_E) = \tau(\langle \eta, \nabla_x \xi \rangle_{A^0} + \langle \nabla_x \eta, \xi \rangle_{A^0}) = \tau(\delta_x \langle \eta, \xi \rangle_{A^0}) = 0$. 可了可了, $\tau_E \circ \hat{\delta}_x = 0$.

可了可了, $\Psi = \mathcal{H}_\nabla - \mathcal{H}^0$ と可了可了, $\{\Psi, \Psi\}$ は非正定値可了あり, 可了可了

$$\{\mathcal{H}_\nabla, \mathcal{H}_\nabla\} = \{\mathcal{H}^0, \mathcal{H}^0\} + \{\mathcal{H}^0, \Psi\} + \{\Psi, \mathcal{H}^0\} + \{\Psi, \Psi\}.$$

$\tau_E(\Psi(x, y)) = 0$ と可了可了, $\tau_E(\{\mathcal{H}^0, \Psi\}) = 0$. 可了可了

$$YM(\nabla) = YM(\nabla^0) - \tau_E(\{\Psi, \Psi\}).$$

可了可了, YM は ∇^0 で最小値を取可了.

YM が ∇ で最小値を取可了, $\tau_E(\{\Psi, \Psi\}) = 0$. τ_E は忠実可了可了

可了, $\{\Psi, \Psi\} = 0$. 可了可了 $\Psi = 0$ と可了可了, $\mathcal{H}_\nabla = \mathcal{H}^0$.

§3 ハイゼンベルグ加群

この§以降, $A = A_0$, $G = \mathbb{T}^2 (= \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$ の場合だけを考える. $e^{it} = e^{2\pi i t}$ とする. 交換関係 $U_2 U_1 = e(\theta) U_1 U_2$ をみたす 2つの 2-タリ作用素 U_1, U_2 の生成する C^* 環 $\mathcal{A} = A_0$ である. A 上への G の作用 α は

$$\alpha_{(r,s)}(U_1^m U_2^n) = e(rm + sn) U_1^m U_2^n$$

で与えられる. \mathcal{A} の標準規格直交基底 $\{X_j\}$ とし, $\delta_j = \delta_{X_j}$ とすれば

$$\delta_k(U_k) = 2\pi i U_k, \quad \delta_k(U_j) = 0 \quad (j \neq k)$$

となる. このとき, A_0 の元であることと, \mathbb{Z}^2 上の複素数値急減少関数 f を用いて $\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} f(m,n) U_1^m U_2^n$ と表せることは同値である.

以後, エルミート計量をもつ射影的右 A_0 加群 \mathcal{A} のうち, ハイゼンベルグ加群の表現空間に成るもの \mathcal{H} を考察する.

互に素 \mathbb{Z} 整数の対 $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ または $(p, q) = (0, 1)$ に対して, 射影的右 A_0 加群 \mathcal{A} を作ることにする. 2つの 2-タリ作用素 $w_1, w_2 \in \mathcal{L}(K)$ ($\dim K < \infty$) として

$$w_2 w_1 = \overline{e(p/q)} w_1 w_2, \quad w_1^q = 1 = w_2^p$$

をみたすものを考える (有限群 \mathbb{Z}_q の交換関係). 例として

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & & & 0 \\ & 1 & & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & e^{2\pi i p/q} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{2\pi i p(q-1)/q} \end{pmatrix}.$$

$\varepsilon = (p/q) - \theta$ とする. \mathbb{R} 上の複素数値急減少関数全体 $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset$

$L^2(\mathbb{R})$ の上の 2 つの 2-変数作用素 V_1, V_2 を

$$(V_1 \xi)(s) = \xi(s - \varepsilon), \quad (V_2 \xi)(s) = e(s) \xi(s)$$

とすれば, $V_2 V_1 = e(\varepsilon) V_1 V_2$. したがって, $W_j = V_j \otimes w_j$ とすれば, $W_2 W_1$

$= \overline{e(\theta)} W_1 W_2$ となる. したがって, $\Xi^\infty = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes K = \mathcal{S}(\mathbb{R}, K)$ とおき,

その元 $\xi \in \Xi^\infty$ に対し, $U_j \xi = \{U_j \xi = W_j \xi\}$ により定義すれば, $U_2 U_1$

$= e(\theta) U_1 U_2$ となる. したがって, Ξ^∞ は右 A^∞ 加群となる. $\xi, \eta \in \Xi^\infty$ に対し,

$$\langle \xi, \eta \rangle_{A^\infty} = \sum_{m, n} \langle \xi U_1^m U_2^n, \eta \rangle_{L^2(\mathbb{R}, K)} U_1^m U_2^n$$

とすれば, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A^\infty}$ はエルミート計量である. また, Ξ^∞ が射影的である

ことも, 後に示す, Ξ^∞ が $\text{End}_{A^\infty}(\Xi^\infty) - A^\infty$ 加群であるという事実から導かれる.

今後このようにして得られた加群をハイゼンベルグ加群と呼ぶ,

必要があれば p, q の添字を付けて $\Xi_{p, q}^\infty$ と書くこともある.

さて, ハイゼンベルグ群

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ t & s & 1 \end{pmatrix} : r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

の表現 $\{\pi, L^2(\mathbb{R}, K)\}$ を

$$\left(\pi \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ t & s & 1 \end{pmatrix} \right) \xi \right)(u) = e \left(\frac{ru - t}{\varepsilon} \right) \xi(u + s), \quad \xi \in L^2(\mathbb{R}, K)$$

で与える. H の実 L^2 環 \mathcal{A} の 2 つの元 Y_1

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする. \mathcal{O} の任意の元 $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ に対して, $\nabla_X = d\pi(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2)$ とすれば, ∇ は $\Sigma_{p,q}^\infty$ 上の接続を与えることがわかる. 例えは

$$(\nabla_{X_1} \xi)(s) = \frac{2\pi i s}{\varepsilon} \xi(s), \quad (\nabla_{X_2} \xi)(s) = \frac{d\xi}{ds}(s)$$

と成っている. しかも, $[\nabla_{X_1}, \nabla_{X_2}] = -\frac{2\pi i}{\varepsilon} 1$ かわかるように, \mathcal{H}_∇ は定曲率であり, $\nabla \in MC(\Sigma_{p,q}^\infty)$ となる.

モジュラス空間 $MC(\Sigma_{p,q}^\infty)/U(E)$ の決定: $E = \text{End}_{\mathcal{H}_\nabla}(\Sigma_{p,q}^\infty)$ とする.

$MC(\Sigma_{p,q}^\infty)$ の任意の元は $\nabla + \mu$ ($\mu_X \in E_s$) と表せる. μ_X は $L^2(\mathbb{R}, K)$ 上の作用素とみても有界であるから, $\nabla_X + \mu_X$ は ∇_X の有界摂動である. そこで, $\nabla + \mu$ を生成元にもつ \mathcal{H} の表現 $\{\rho, L^2(\mathbb{R}, K)\}$ が存在する. この場合の C^∞ ハット \mathcal{H} は, 表現 π の場合と同じように, $\mathcal{L}(\mathbb{R}, K)$ になることも確かめられる. π の既約表現の重複度は $\dim K$ であり $\Delta_{X_1} + i\Delta_{X_2}$ の指数と一致している. この値は有界摂動で変わらないから, π と ρ は \mathbb{C} -等価同値である. つまり

$$\rho(z) = Q \pi(z) Q^*, \quad z \in \mathcal{H}$$

となる $L^2(\mathbb{R}, K)$ 上の \mathbb{C} -等価作用素 Q が存在する. 以下

$$\pi^j(t) = \exp(i\nabla_{X_j}), \quad \rho^j(t) = \exp(t(\nabla_{X_j} + \mu_{X_j})) \quad j=1, 2$$

とすれば, $\pi^j(t) = C^j(t) \rho^j(t)$ とする C^∞ \mathbb{C} -等価 $\mathcal{H} \ni \pi \rightarrow \mathcal{H} \ni \rho$ C^j が存在する. C^j の C^∞ 性により, 関数 $t \mapsto \text{Ad}_{\pi^j(t)}(Q) = C^j(t) Q \in C^\infty$ である.

また, $\pi(z) Q \xi = \text{Ad}_{\pi(z)}(Q) \pi(x) \xi$, $\xi \in \Sigma_{p,q}^\infty$ であるから, $Q \xi \in \Sigma_{p,q}^\infty$ でもある.

上の \mathbb{C} -等価同値性から, $\nabla_X + \mu_X = Q \nabla_X Q^*$ とするから, \mathbb{C} -等価 $\nabla_X + \mu_X = (W_j \otimes W_j^*) \nabla_X (W_j \otimes W_j^*)^*$ となる. L^2 から, $Q^* W_j \otimes W_j^*$ は ∇_X ($x \in \mathcal{O}$)

と可換である。ゆえに $W_j Q W_j = Q(1 \otimes u_j)$ とする Q 作用素 $u_j \in \mathcal{L}(K)$

が存在する。 $Ad_{W_1 W_2}(Q) = Ad_{W_2 W_1}(Q)$ を用いると

$$(u_1 w_1)(u_2 w_2) = e(p/q)(u_2 w_2)(u_1 w_1)$$

が導かれる。 $u_j w_j$ を \mathbb{R} 乗した $\alpha^{-1} = \alpha$ となる \mathbb{R} 上の u 。 今 K

を d 次元部分空間 K_1, \dots, K_d の直和に分解し、各々の上で w_1, w_2 が交

換関係の既約表現を与えるようにする。 $u_1 w_1, u_2 w_2$ に対して同じように、

$K = K'_1 \oplus \dots \oplus K'_d$ と既約分解すれば、各 K'_k 上で $(\beta_{jk} u_j w_j)^d = 1$ とする

ような数 $\beta_{jk} = e(\varepsilon \sigma_j^k)$ が存在する。 再び、交換関係の一貫性を用い

ると、 $v K_k = K'_k$ ($k=1, \dots, d$) かつ各 K_k 上で $v^*(\beta_{jk} u_j w_j)v = w_j$

と τ 作用素 $v \in \mathcal{L}(K)$ が存在する。

$$\bar{Q} = Q(1 \otimes v) \text{ とすれば, } W_j Q W_j^* = Q(1 \otimes u_j w_j v w_j^*) = \bar{Q}(1 \otimes \beta_j) \text{ と}$$

なる。 $\tau = \tau^{-1}$ 、 β_j は分解 $K = K_1 \oplus \dots \oplus K_d$ に沿った対角行列で、対角成分は

$\beta_{j1}, \dots, \beta_{jd}$ を τ 作用素 $L^2(\mathbb{R})$ 上の作用素

$$(M_k \zeta)(s) = e(s \sigma_k^k) \zeta(s), \quad (T_k \zeta)(s) = \zeta(s - \varepsilon \sigma_k^k)$$

を用いて、 $L^2(\mathbb{R}, K_k)$ 上の作用素 $N_k = M_k T_k \otimes 1$, $L^2(\mathbb{R}, K)$ 上の作用素

$N = \sum_{k=1}^d \oplus N_k$ とすれば、 $W_j N W_j^* = (1 \otimes \beta_j)^* N$ とする。 今 U

$= \bar{Q} N$ とする。

$$Ad_{W_j}(U) = Ad_{W_j}(\bar{Q}) Ad_{W_j}(N) = \bar{Q}(1 \otimes \beta_j)(1 \otimes \beta_j)^* N = U$$

とされる。 $U \in U(E)$ 。 再び、 $N^* \nabla_{X_j} N = \nabla_{X_j} + \sigma_{X_j}$ とする。 $\tau = \tau^{-1}$ 、

$$\sigma_{X_j} = 2\pi i \begin{pmatrix} \sigma_j^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_j^d \end{pmatrix} \quad j=1, 2$$

したがって

$$U(\nabla_{x_j} + \sigma_j)U^* = (UN^*)\nabla_{x_j}(UN^*)^* = \bar{Q}\nabla_{x_j}\bar{Q}^* = \nabla_{x_j} + \mu_j$$

以上を要約すると

命題 3.1 $M(\Sigma_{p,q}^\infty)/U(E)$ の元 π_j は $\nabla + \sigma$ なる π_j を L^2 に接続を含む。

§ 4 ハイゼンベルグ群のモジュラス空間

命題 3.1 により, $\nabla + \sigma, \nabla + \mu$

$$\sigma_{x_j} = 2\pi i \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & -\sigma_j \end{pmatrix} \quad \mu_{x_j} = 2\pi i \begin{pmatrix} \mu_j & 0 \\ 0 & -\mu_j \end{pmatrix}$$

なる π_j をした 2つの接続が, 互いにゲージ変換で移り得るための条件を調べれば, $M(\Sigma_{p,q}^\infty)/U(E)$ の π_j がわかる. このためには $\Sigma_{p,q}^\infty = (\Sigma^\infty)^d$, $\Sigma^\infty = \mathcal{S}(\mathbb{R}, K)$ ($\dim K = g$) とおいて, Σ^∞ について詳細に検討する. この場合には, $B = \text{End}_{A^0}(\Sigma^\infty)$ とおけば, $E = \text{End}_{A^0}(\Sigma_{p,q}^\infty) = M_d(B)$.

Σ^∞ は $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_g)$ と表せるので, 加法群 $G = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_g$ とその 2つの部分群 $H = \{n(\varepsilon, [p]) : n \in \mathbb{Z}\}$, $K = \{n(\nu, [1]) : n \in \mathbb{Z}\}$ を用いて解析する. こゝに用いると, 2つの同相写像

$$(t, [a]) \in G/K \mapsto t - \frac{t}{g} \in \mathbb{T} (= \mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

$$(t, [a]) \in G/H \mapsto \frac{1}{g}(\frac{t}{g} - a) \in \mathbb{T}$$

が考えられる. $\mathbb{T} = \mathbb{T}^{-1}$, a は $ap - aq = 1$ を満たす整数 $a > 1$ を用いる. したがって, $C^*(H, G/K)$ は $\mathcal{S}(G) \subset L^2(G)$ の右側から

$$(\zeta U_1)(t, [u]) = \zeta(t-\varepsilon, [u-p]), \quad (\zeta U_2)(t, [u]) = e^{i(t-\frac{t}{\varepsilon})} \zeta(t, [u])$$

による作用 U , $C^*(K, G/H)$ への左側作用

$$(Z_1 \zeta)(t, [u]) = \zeta(t-\frac{1}{\varepsilon}, [u-1]), \quad (Z_2 \zeta)(t, [u]) = e^{i(\frac{1}{\varepsilon}(\frac{t}{\varepsilon}-u))} \zeta(t, [u])$$

による作用 U による. $U_2 U_1 = e(i\theta) U_1 U_2$, $Z_2 Z_1 = e(i\theta') Z_1 Z_2$ である. $\Gamma = \Gamma'$

で, $\theta' = (2\theta - \varepsilon) / (\varepsilon\theta - p)$. $\psi \cong \mathbb{Z}^2$, $C^*(H, G/K) \cong A_\theta$, $C^*(K, G/H) \cong A_{\theta'}$

である. \mathbb{T}^2 上の $C^*(K, G/H)$ への作用 $\alpha' \in \text{Ad}_{\pi(x)}$ を用いて

$$\alpha'_{(r,s)}(Z_1^m Z_2^n) = e^{i(\frac{r^m + s^n}{\varepsilon})} Z_1^m Z_2^n$$

とすれば, $B = \text{End}_{A_0}(\mathbb{C}^\infty)$ は π 字系 $(A_{\theta'}, \mathbb{T}^2, \alpha')$ の C^* 横断切断代数

と一致し, \mathbb{Z}^2 上の $(\alpha'_{m,n}) \in \mathcal{A}(\mathbb{Z}^2)$ による, $\sum \alpha'_{m,n} Z_1^m Z_2^n$ と表される.

α' の非退化性

$$[\nabla_{x_j}, Z_k] = \gamma \delta_{jk} Z_k, \quad \gamma = \frac{2\pi i}{\varepsilon}$$

となる.

また, \mathbb{C}^∞ 上の $\mathbb{Z}_{p,\varepsilon}^\infty = (\mathbb{C}^\infty)^d$, $E = M_d(B)$ の \mathbb{C}^∞ 横断切断 $\nabla + \sigma$, $\nabla + \mu$ を

考へる. \mathbb{T}^2 変換 $U \in U(E)$ による, $U(\nabla + \sigma)U^* = \nabla + \mu$ とする.

U の $d \times d$ 行列表示 (U_{kj}) を用いて, $\nabla U - U \nabla = U \sigma - \mu U$ を展開すると,

$U_{kj} \neq 0$ ならば, $\sigma_j^k - \mu_j^k \in \varepsilon \mathbb{Z}$ ($j=1, 2$) となることを示す. ε は

3.2. U は可逆であるから, $1, \dots, d$ の置換 ρ を適当に選べば,

$U_{1\rho(1)} \neq 0, \dots, U_{d\rho(d)} \neq 0$ と仮定するから, ρ の逆置換 $\sigma = \rho^{-1}$ は

$$\sigma_j^j - \mu_j^{\rho(j)} \in \varepsilon \mathbb{Z}, \quad \dots, \quad \sigma_j^j - \mu_j^{\rho(j)} \in \varepsilon \mathbb{Z} \quad (j=1, 2)$$

となる. \mathbb{C}^∞ 上の $\mathbb{R}/\varepsilon \mathbb{Z}$ と \mathbb{T}^2 の同相性から注意すれば, \mathbb{R} の

完備化 $\mathbb{R}/\varepsilon \mathbb{Z}$ である.

定理 4.1 $p, q (q > 0)$ は互いに素な整数, $\tau = (p, q) = (0, 1)$ の
 $p/q \neq 0$ とする. $\Sigma_{p,q}^\infty$ がハイゼンベルグ加群ならば,

$$MC(\Sigma_{p,q}^\infty) \cong (\mathbb{T}^2)^d / \Sigma_d$$

ただし, Σ_d は d 個の座標の置換群であり, d は $\Sigma_{p,q}^\infty$ を d 次元に射影的
 右 A_0 加群に直和分解したときの個数である.

§ 5 一般の射影的 A_0 加群のモジュラス空間

ここでは, 一般の射影的右 A_0 加群のモジュラス空間を前 § のハイゼンベルグ加群の結果へ帰着させることを試みる.

$A = A_0$, $\delta = d\alpha$ は前 $\alpha \neq 0$, Ω はエルミート計量 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A_0}$ を射影的右 A_0 加群, $\nabla \in MC(\Omega, \delta)$, $B = \text{End}_{A_0}(\Omega)$, $\hat{\delta}_x(b) = [\nabla_x, b]$
 $(x \in \mathcal{M}, b \in B)$ とする.

Σ が射影的右 B 加群ならば, $\Sigma \otimes_B \Omega$ は射影的 A_0 加群である.
 このとき

- (i) ∇' が (Σ, δ) 上の接続ならば, $\nabla'' = \nabla' \otimes 1_\Omega + 1_\Sigma \otimes \nabla$ は $(\Sigma \otimes_B \Omega, \delta)$ 上の接続である.
- (ii) $\nabla, \nabla', \nabla''$ の曲率をそれぞれ $\Theta, \Theta', \Theta''$ と可なり, $\Theta''(X, Y) = \Theta'(X, Y) \otimes 1_\Omega + 1_\Sigma \otimes \Theta(X, Y)$, $X, Y \in \mathcal{M}$.
- (iii) ∇' が定曲率 ε ならば, ∇'' は定曲率 ε である.
- (iv) ∇' が両直可なりならば, ∇'' も両直可なりである.

これらの成り立つ. $\tau = \tau'$ とし, (iv) については, Σ のエルミート計量 $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ に対し,

$\Xi \otimes_B \Omega$ のエルミート計量を $\langle \xi \otimes \omega, \xi' \otimes \omega' \rangle_{\Xi \otimes_B \Omega} = \langle \omega, \langle \xi' | \omega \rangle_B \omega' \rangle_{\Xi}$ と考へる.

とくに, Ω のエルミート計量の値域が線形閉包 A_0^* と一致しているとき, Ω は full であるという. この場合には, Ω が B - A_0^* の右準同型であることはなく, A_0^* と B は森田同値である. この上で

$$\tilde{\nabla}_x \xi = (\nabla_x \xi)^{\sim} \quad , \quad x \in \mathfrak{g}, \quad \xi \in \Omega$$

と可成は, $\tilde{\nabla}$ は $\tilde{\Omega}$ 上の接続である. 仮定より, $\nabla \in MC(\Omega, \mathfrak{g})$ であるから

$$(v) \quad \tilde{\nabla} \in MC(\tilde{\Omega}, \mathfrak{g})$$

が成り立つ. さらに, A^* は $\tilde{\Omega} \otimes_B \Omega$ と, B は $\Omega \otimes_{\mathfrak{g}} \tilde{\Omega}$ と同一視できるのから, $\nabla, \tilde{\nabla}$ がエルミート計量と両立可能な条件は

$$(vi) \quad A^* = \tilde{\Omega} \otimes_{A_0^*} \Omega \text{ 上で } \bar{\sigma}_x = \tilde{\nabla}_x \otimes 1_{\Omega} + 1_{\tilde{\Omega}} \otimes \nabla$$

$$B = \Omega \otimes_{A_0^*} \tilde{\Omega} \text{ 上で } \hat{\sigma}_x = \nabla_x \otimes 1_{\tilde{\Omega}} + 1_{\Omega} \otimes \tilde{\nabla}_x$$

と表せる.

命題 5.1 $A, \mathfrak{g}, \Omega, \nabla, B, \hat{\sigma}$ を上と同様にし, Ξ とエルミート計量 $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\Xi}$ を射影的右 B 加群と成す. Ω が full ならば

(i) 写像

$$\nabla' \in MC(\Xi, \mathfrak{g}) \mapsto \nabla' \otimes 1_{\Omega} + 1_{\Xi} \otimes \nabla \in MC(\Xi \otimes_B \Omega, \mathfrak{g})$$

$$T \in \text{End}_B(\Xi) \mapsto T \otimes 1_{\Omega} \in \text{End}_{\mathfrak{g}}(\Xi \otimes_B \Omega)$$

は Ξ に全単射がある.

(ii) この全単射により, Ξ と $\Xi \otimes_B \Omega$ の C^* - C^* 環を同一視できることを示す.

この証明は $\Xi \otimes_B \Omega \otimes_A \tilde{\Omega} = \Xi$, $(\Xi \otimes_B \Omega) \otimes_A \Omega \otimes_B \tilde{\Omega} = \Xi \otimes_B \Omega$ 及び
 の事実を用いて達成される。

命題 5.2 θ は任意の実数とする。 Λ が射影的右 A_θ 加群ならば、

$$\Lambda \cong (\Xi^\infty)^\theta \otimes_{A_\theta} \Omega$$

とあるような射影的右 A_θ 加群 Ω とハイゼンベルグ右 A_θ 加群 Ξ^∞
 が次の条件を満たすように存在する。

- (i) Ω は full である。
- (ii) $\text{End}_{A_\theta}(\Omega)$ を完備化して得られた C^* 環は A_θ である。
- (iii) 接続 $\nabla \in \text{MC}(\Omega)$ を適当に選べば、これが与えられる A_θ 上の
 微分 $\hat{\delta}_x(\psi) = [\nabla_x, \psi]$ と A_θ 上の \mathbb{T}^2 の自然な作用 α' の微分 $\delta' =$
 dd' とは定数倍しか違わない。

(iv) $\Xi^\infty \otimes_{A_\theta} \Omega$ は他の射影的右 A_θ 加群を直和因子として持つ。

証明 $K_0(A_\theta)$ の正基底を考へることにより、予め Λ は他の射影的右
 加群を直和因子として持つことも仮定できる(今までの議論
 の $\theta=1$ の場合)。そこで、次の3つの場合に分けて考へる。

a) $\theta \neq 0$ の Λ が自由な場合。この場合には、 Λ がハイゼンベルグ
 加群 Ξ^∞ と同型であることが知られている。したがって、
 $\Xi^\infty = \Lambda$, $A_\theta = A_\theta$, $\Omega = A_\theta$ とすればよい。

b) θ が任意で、 Λ が自由な場合。 $\Lambda = A_\theta$ である。この場合
 には適当な θ' とハイゼンベルグ右 $A_{\theta'}$ 加群 Ξ^∞ を見つけて

$$A_\theta = \text{End}_{A_{\theta'}}(\Xi^\infty)$$

と可算と加えられる。いま、 \mathbb{T}^2 の A_0 への作用 ε 及び δ' の微分 $\varepsilon \delta' = d\delta'$, Σ^∞ 上の接続 $\varepsilon \nabla$ とする ($\nabla_x(\xi) = (\nabla_x \xi) + \xi \delta'_x(\omega)$, $\xi \in A_0^\infty$). このとき, $\widehat{\delta}'_x(a) = [\nabla_x, a]$, $a \in A_0^\infty$ は A_0 上の元の微分子 δ'_x と定数倍しか違わないから, Σ^∞ 上の接続 $\widehat{\nabla}$ は $MC(\Sigma^\infty)$ の元である。したがって, $\Omega = \Sigma^\infty$ とすれば, $\widehat{\delta}'_x(\omega) = [\widehat{\nabla}_x, \omega]$, $\omega \in A_0^\infty$ と δ'_x とは定数倍しか違わない, $\Lambda = A_0^\infty = \Sigma^\infty \otimes_{A_0^\infty} \Omega$ とする。

c) $\theta \in \mathbb{Q}$ で Λ が自由でない場合。まず, 射影的右 \mathbb{C} 加群は自由であるか, \mathbb{T}^2 はハイゼンベルグのユニタリ群 $U(1)$ の $\mathbb{C} = \mathbb{C}(U)$.

$A_0 = \mathbb{C}$ のときは, $\theta \in \mathbb{Q}$ の場合と同様に示すことができる。

$A_0 \neq \mathbb{C}$ ならば, $A_0^\infty \cong \text{End}_{\mathbb{C}}(\Omega')$ となるような右 \mathbb{C} 加群 Ω' が存在する。したがって, $\Omega = (\Omega')^\sim$ とすれば, Ω は full である。ここで $\Sigma^\infty = \Lambda \otimes_{A_0^\infty} \Omega'$ とすれば,

$$\Lambda \cong (\Lambda \otimes_{A_0^\infty} \Omega') \otimes_{\mathbb{C}} \Omega = \Sigma^\infty \otimes_{\mathbb{C}} \Omega.$$

Σ^∞ は射影的右 \mathbb{C} 加群であるから, 自由でないければ, ハイゼンベルグ加群がある。もし Σ^∞ が自由ならば, Λ が他の射影的右 A_0^∞ 加群を直和因子として持つという性質から, $\Sigma^\infty = \mathbb{C}$, つまり $\Lambda \cong \Omega$ になる。したがって, (b) の場合と同様に, $\mathbb{C} \cong \text{End}_{A_0^\infty}(\Sigma)$ となるようなハイゼンベルグ右 A_0^∞ 加群 Σ が存在する。ゆえに

$$\Lambda \cong \Sigma \otimes_{A_0^\infty} (\Sigma \otimes_{\mathbb{C}} \Omega)$$

ここに改め, $\widehat{\Sigma} \otimes_{\mathbb{C}} \Omega$ を $\widehat{\Omega}$ とすればよい。

以上の命題を合わせると直ちに次の定理が得られる。

定理 5.3 Λ を射影的右 A_θ^* 加群とし, 他の射影的右 A_θ^* 加群と直和因子にもならないものとする. Λ^d にエルミート計量を与えれば,

$$MC(\Lambda^d) \cong (\mathbb{T}^2)^d / \Sigma_d.$$

(これは, 任意の射影的右 A_θ^* 加群のモジュラス空間が適当なものにより, $(\mathbb{T}^2)^d / \Sigma_d$ と同相になることからわかる.)

§6 $Aut(A_\theta^*)$ について

ここでは, §§4, 5 において明示したように, 射影的右 A_θ^* 加群 Λ の解空間 $MC(\Lambda)$ の構造を用いて, A_θ^* の自己同型群の構造を決定する.

$K_1(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2$ であるから, $Aut(A_\theta)$ から $GL(2, \mathbb{Z})$ への準同型写像がある. $(n_{jk}) \in SL(2, \mathbb{Z})$ に対し

$$\beta : U_j \mapsto e\left(\frac{n_{1j}n_{2j}}{2}\right) U_1^{n_{1j}} U_2^{n_{2j}} \quad (j=1, 2)$$

とすれば, β は A_θ の自己同型写像であることがなく, $SL(2, \mathbb{Z})$ の A_θ 上への作用に成り立っている. 従って, $Aut(A_\theta)$ から $GL(2, \mathbb{Z})$ への準同型写像の像は $SL(2, \mathbb{Z})$ を含むことがわかる [Brunken, 錦谷]. 実際この像が $SL(2, \mathbb{Z})$ と一致するのはいまのところ予想されるが未解決である. $K_1(A_\theta) = K_1(A_\theta^*)$ であるから, 同様な問題は A_θ^* に対しても考えられる. ここではその部分的解決を示す.

§3 及び §2: \mathbb{T}^2 の作用 α とこの β とを合わせたものは半直積 $\mathbb{T}^2 \rtimes SL(2, \mathbb{Z})$ の A_θ^* 上への作用を与えていることに注意する.

定義 6.1. 無理数 θ に対し, $|1 - e(n\theta)|^{-1}$ の n の関数としての多項式
 の早さの増大度をもととせ, θ は Diophantine 条件をみたすまたは
 generic であるとする.

定理 6.2 θ が generic ならば

$$\text{Aut}(A_\theta^\infty) \cong \text{PU}_0(A_\theta^\infty) \rtimes (\mathbb{T} \rtimes \text{SL}(2, \mathbb{Z}))$$

ただし, $\text{U}_0(A_\theta^\infty)$ は $\text{U}(A_\theta^\infty)$ の主連結成分で, $\text{PU}_0(A_\theta^\infty) = \text{U}_0(A_\theta^\infty) / \{e^{i\lambda} 1 : \lambda \in \mathbb{T}\}$ である.

補題 6.3 $h_j \in A_\theta^\infty$ は至随伴, $\tau(h_j) = 0 \iff \delta_j + \text{ad}_{h_j}$ と $\delta_2 + \text{ad}_{h_2}$ が可換であるならば, $h_j = u^* \delta_j(u)$ $j=1, 2$ をみたす $u \in \text{U}_0(A_\theta^\infty)$ が存在する. (定数倍を除く一意に定まる)

この補題の $h_j = u^* \delta_j(u)$ により, $\text{Ad}_{u^*}(\delta_j + \text{ad}_{h_j}) = \delta_j \circ \text{Ad}_u$ であることがわかる.

証明 自由右 A_θ^∞ 加群 $\Lambda = A_\theta^\infty \pm$ の接続と \mathbb{C} のラスマン接続 $\nabla_x = \partial_x$ を取す. ∇ の曲率は 0 である. $\nabla'_x = \nabla_x + h_j$ とすれば, ∇' も Λ 上の接続であるが, $\delta_1 + \text{ad}_{h_1}$ と $\delta_2 + \text{ad}_{h_2}$ の可換性を使うと, ∇' の曲率も 0 である. 中には, $\nabla, \nabla' \in \text{MC}(\Lambda)$. 命題 5.2 の証明の (6) を用いると, ∇, ∇' は適当なハイゼンベルグ加群の MC の元と見做すことができる. したがって, 命題 3.1 により, 適当なゲージ変換 $v_j \in \text{U}(E)$ を用いて

$$v_1 \nabla_x v_1^* = \nabla_x + \sigma_1, \quad v_2 \nabla'_x v_2 = \nabla'_x + \sigma_2$$

と表せる. したがって, $v = v_1^* v_2$ は $\nabla'_x - v^* \nabla_x v = \sigma_2 - \sigma_1$ と等しく, ハイゼンベルグ加群は直和因子を許す (すなわち $\mathbb{C} \perp$) に含まれるので, $\sigma_2 - \sigma_1 \in \mathbb{C} \perp$.

\mathcal{L} に於て, $U^* \nabla_x v = \nabla_x + v^* \delta_x(v)$ とするにせよ (2) と $h_j - v^* \delta_j(v)$
 $= \nabla_{x_j}' - (\nabla_{x_j} + v^* \delta_{x_j}(v)) \in \mathbb{C}1$ とする.

さて, \mathcal{L} に於て $v \in U(A_0^\infty)$ かつ $K_1(A_0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle \bar{u}(1) \rangle \oplus \langle \bar{u}(2) \rangle$ である ($-m_1, -m_2$) とするにせよ, $w = U_1^{m_1} U_2^{m_2}$ を用いて $u = wv$ である (0, 0) である.

\mathcal{L} に於て, $u \in U_0(A_0^\infty)$ とするにせよ $\tau(u^* \delta_j(u)) = 0$. $w^* \delta_j(w) \in \mathbb{C}1$ であるから, $u^* \delta_j(u) = w^* \delta_j(w) + v^* \delta_j(v)$. かつ $h_j - u^* \delta_j(u) = h_j - v^* \delta_j(v) - w^* \delta_j(w) \in \mathbb{C}1$. (2)に於て, $\tau(h_j) = 0$ であるから, $h_j = u^* \delta_j(u)$.

$h_j = (U')^* \delta_j(U')$ であるから u' の τ の値は $\tau(u' u'^*) = 0$, $(u u'^*)^* \delta_j(u u'^*) = 0$. かつ $\delta_j(u u'^*) = 0$. かつ $u u'^* \in (A_0^\infty)^\times = \mathbb{C}1$.

定理の証明 自然同型写像 $\text{Aut}(A_0^\infty) \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ の像が

$\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ に包含されることは [J. Cuntz, G.A. Elliott, F.M. Goodman, P.E.T. Jorgensen: On the classification of non commutative tori II, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 7 (1985), 189-194] に示されている.

\mathcal{L} に於て, \mathcal{L} の核が $\text{PU}_0(A_0^\infty) \rtimes \mathbb{T}^2$ と同型になることを示せばよい. \mathbb{T}^2 が A_0^∞ 上の作用の内部的部分は $\text{Ad}_{U_1^m U_2^n}$, $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ と書ける. \mathcal{L} に於て, $\{d_{(r,s)} : (r,s) \in \mathbb{T}^2\}$ と $\{Ad_u : u \in U_0(A_0^\infty)\}$ との共通部分は恒等写像しか持たない.

$K_1(A_0^\infty)$ は不変に可変 $\text{Aut}(A_0^\infty)$ の元 γ と可変. $\gamma^* \delta_j \circ \gamma$ ($j=1, 2$) は互いに可換な微分子である. θ の Diophantine 条件をみたす γ とする. $\gamma^* \delta_j \circ \gamma = \delta_j' + \text{ad}_{a_j}$ と書ける. $\tau = \tau^{-1}$, δ_j' は δ_1 と δ_2 の実1次結

合であり, u_j は連続性 A_θ^∞ の元である. 写像 $\delta \mapsto \tau(U_n^* \delta(U_n))$
 $k=1, 2$ は内部的微分子 \mathfrak{g} 上では 0. L は \mathfrak{g} 上 $U_j \in \delta(U_j)$ への作用
 の値は $\tau(u_j)$ である.

$$\begin{aligned} \tau(U_n^* \delta'_j(U_n)) &= \tau(\delta(U_n)^* \delta_j(\delta(U_n))) \\ &= \tau(U_n^* \delta_j(U_n)). \end{aligned}$$

もし, $\delta'_j = \lambda_1 \delta_1 + \lambda_2 \delta_2$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$) と可. $U_n^* \delta'_j(U_n) = (\lambda_1 \delta_{2n} + \lambda_2 \delta_{2n}) 1$,
 $U_n^* \delta_j(U_n) = \delta_{jn} 1$ であるから, $j=1$ のときは $\lambda_1=1, \lambda_2=0$; $j=2$ のときは
 $\lambda_1=0, \lambda_2=1$. したがって $\delta'_j = \delta_j$.

また u_j の代りに, $u_j = \tau(u_j) \in \mathfrak{g}$ である, $\tau(u_j) = 0$ と仮定して
 τ , 補題 6.3 の仮定より, $\text{Ad}_u \circ (\delta_1 \circ \delta_j \circ \delta) = \delta_j \circ \text{Ad}_u$ である u
 $\in U_0(A_\theta)$ の代りに可. したがって, $\delta \circ (\text{Ad}_u)^{-1}$ は δ_1, δ_2 と可換である,
 $\delta \circ (\text{Ad}_u)^{-1}$ は \mathfrak{g} の各固有空間 $U_1^m U_2^n$ ($(m, n) \in \mathbb{Z}^2$) 上では $\lambda(m, n)$
 L である, $(\delta \circ (\text{Ad}_u)^{-1})(U_1^m U_2^n) = \lambda(m, n) U_1^m U_2^n$ である, \mathbb{Z}^2
 上の関数 λ の値は $\tau(u_j)$ である. $\delta \circ (\text{Ad}_u)^{-1}$ は自己同型写像であるから,
 $\lambda(m, n) = \lambda(1, 0)^m \lambda(0, 1)^n$. したがって $\lambda(m, n) = e^{(\tau m + \delta n)}$ とおき
 $(\tau, \delta) \in \mathbb{T}^2$ と仮定可. したがって, $\delta \circ (\text{Ad}_u)^{-1} = \alpha(\tau, \delta)$ である. L は
 τ, δ による $\alpha(\tau, \delta): (\tau, \delta) \in \mathbb{T}^2 \rightarrow \tau$ と $\gamma \text{Ad}_u: u \in U_0(A_\theta)$ の作用の積
 の値である. (参照, [F.M. Goodman - P.E.T. Toruelsen: Smooth
 Lie group actions on non commutative tori] 1.4.12), A_θ^0 には, θ
 の Diophantine 条件 τ と δ に関する条件は, 常微分方程式の可解性
 により, τ と δ の外半単純 Lie 環の可解性は内部的 τ, δ に限られることである.)