数理解析研究所講究録
第622巻 1987年 54-72



# 葉層構造とWeilコホモロジー類

北大理　鈴木治夫　( Haruo Suzuki )

$C^\infty$-多様体M上の$C^2$-葉層構造$\mathcal{F}$に対し，"葉成分"de Rhamコホモロジー群の元は$\mathcal{F}$の定義イデアルをde Rham コチェイン複体の部分複体とみて得られるコホモロジー群から，Mのde Rham コホモロジー群への準同形写像を定める。J. Heitsch と S. Hurder [HH] によるWeil作用素は，このような"葉成分"de Rham コホモロジー群の元の一つとみなすことができる。

まずWeil測度に基づく，S. Hurder と A. Katok [HK]による葉層2次特性類の自明性に関する結果を説明し，ついで葉層ホロノミー亜群における横断測度のモジュラ・コホモロジー類の一般化として，Weil作用素に対応するホロノミー亜群のコホモロジー類を構成する。§1 はWeilコホモロジー類の構成，§2 は Weil測度の説明，§3 は葉層構造の軟化(tempered)コサイクルと柔順性(amenability)の概念の導入によるWeil測度の消滅定理であり，I形葉層構造に対する次元差的

(redidual) 2次特性類の自明性を導びく。 §4は高次元モジュラ・コホモロジー類の構成に当てる。

## §1. Weilコホモロジー類

Mを$n$次元閉Hausdorff $C^\infty$-多様体, $(M,\mathcal{F})$を余次元$q$の$C^2$-葉層構造とする。 $A(M)$をMのde Rham複体, $A(M,\mathcal{F})\subset A(M)$を$\mathcal{F}$の定義イデアルとする。 $\mathcal{F}$の積分可能性によって, $A(M,\mathcal{F})$は外微分作用素$d$に関して閉じており, したがって$A(M)$の部分複体となる。 $H^{\bullet}_{DR}(M)$, $H^{\bullet}(M,\mathcal{F})$をそれぞれMのde Rhamコホモロジー群, $A(M,\mathcal{F})$のコホモロジー群とする。 M上に一つのRiemann計量をとることにより, 接ベクトル束$T(M)$は$\mathcal{F}$の葉に接する部分ベクトル束$T(\mathcal{F})$とその法ベクトル束$V(\mathcal{F})$とのWhitney和$T(M)=T(\mathcal{F})\oplus V(\mathcal{F})$に分解し, $A(M)$の微分形式は2重次数をもつが, その葉方向の外微分を$d_{\mathcal{F}}$とすると$d_{\mathcal{F}}\circ d_{\mathcal{F}}=0$がいえる。 この$d_{\mathcal{F}}$に関する, 横断次数0, 葉次数$s$のコホモロジー群を$H^{0,s}_{\mathcal{F}DR}(M)$とかき, $(M,\mathcal{F})$の次数$(0,s)$の"葉成分"または葉層de Rhamコホモロジー群とよぶ。 鈴木[$S_1$, $S_2$]により, 準同形写像$\chi: H^{0,s}_{\mathcal{F}DR}(M)\longrightarrow \mathrm{Hom}(H^{\bullet}(A,\mathcal{F}), H^{\bullet+s}_{DR}(M))$が, $[z]\in H^{0,s}_{\mathcal{F}DR}(M)$, $[\varphi]\in H^{\bullet}(A,\mathcal{F})$に対して,

$$(\chi([z]))([\varphi]) = [z\wedge\varphi]$$

で与えられる。

$\theta^b$, $\theta^r$ をそれぞれ $V(\mathcal{F})$ 上の Bott 接続, Riemann 接続とするとき, $\theta=t\theta^b+(1-t)\theta^r$ $(t\in\mathbb{R})$ は $V(\mathcal{F})\times\mathbb{R}$ 上の接続を定める。 $\theta$ の曲率形式を $\Omega^{br}$, $c_i$ を $i$ 次 Chern 多項式とし, $i$ は内部積を表わすものとして,

$$h_i(\theta^b,\theta^r)=\int_0^1 i(\partial/\partial t)c_i(\Omega^{br})\,dt$$

とおく。 $\theta^b$, $\theta^r$ の曲率形式をそれぞれ $\Omega^b$, $\Omega^r$ とかくことにすると, $i$ が奇数のとき $\Omega^r$ は歪対称であるから $c_i(\Omega^r)\equiv 0$ と成り, したがって

$$\begin{aligned} dh_i(\theta^b,\theta^r)&=c_i(\Omega^b)-c_i(\Omega^r)\\ &=c_i(\Omega^b) \end{aligned}$$

と成る。 鈴木 [S1] により, $i$ が奇数ならば $h_i$ の $(0,2i-1)$ 成分 $(h_i)_{0,2i-1}$ は $\mathcal{F}$ の葉方向の外微分 $d_{\mathcal{F}}$ に関し閉となり, そのコホモロジー類

$$[(h_i)_{0,2i-1}]\in H^{0,2i-1}_{\mathcal{F}DR}(M)$$

は $\theta^b$, $\theta^r$ のとり方によらない。

$I(GL(q;\mathbb{R}))\cong\mathbb{R}[c_1,c_2,\cdots,c_q]$ を $GL(q;\mathbb{R})$ のリー環 $\mathfrak{gl}_q$ の随伴不変多項式から成る次数つき環とし, $I(GL(q;\mathbb{R}))_q=I(GL(q;\mathbb{R}))/(\deg>2q)$ とおく。 $\wedge(y_1,y_3,\cdots,y_l)$ $(l=2[(q+1)/2]-1)$ を $\{y_1,y_3,\cdots,y_l\}$, $\deg y_i=2i-1$ によって生成される次数つき交代多元環とする。 微分作用素 $d$ をもつ次数つき多元環を

$$WO_q = \Lambda(y_1, y_3, \cdots, y_\ell) \otimes I(GL(q;\mathbb{R}))_q,$$
$$d(y_i \otimes 1) = 1 \otimes c_i,$$
$$d(1 \otimes c_i) = 0$$

によって定める。微分作用素をもつ次数つき多元環の間の準同形写像 $\Delta = \Delta(\theta^b, \theta^r) : WO_q \to A(M)$ を

$$\Delta(y_i \otimes 1) = h_i(\theta^b, \theta^r),$$
$$\Delta(1 \otimes c_i) = c_i(\Omega^b)$$

と定めると，これはコホモロジー準同形写像 $\Delta_* : H^\bullet(WO_q) \to H^\bullet_{DR}(M)$ を引きおこす。$\Delta_*$ は $\theta^b, \theta^r$ のえらび方によらない。$\chi[(h_i)_{0,2i-1}] : H^\bullet(M, \mathcal{F}) \to H^{\bullet+2i-1}_{DR}(M)$ は Weil 作用素 $\chi(y_i)$ と一致するので，$[(h_i)_{0,2i-1}]$ を Weil コホモロジー類と呼ぶことにする。

## §2. Weil 測度

$\pi : P \to M$ を法ベクトル束 $V(\mathcal{F})$ の $q$-枠から成る，主 $GL(q;\mathbb{R})$-束とする。$GL(q;\mathbb{R})$ は $P$ の右から作用する。$V(\mathcal{F})$ 上の $C^2$-Riemann 計量 $r$ は $C^2$-断面写像 $s_r : M \to P/O_q$ を定める。$S(gl_q^*)$ をリー環 $gl_q$ の双対空間 $gl_q^*$ の対称多元環とし，各 $\alpha \in gl_q^*$ を $S(gl_q^*)$ の次数 2 の元 $\tilde{\alpha}$ とみなす。$S(gl_q^*)_q = S(gl_q^*)/(\deg > 2q)$ とおく。裁端(truncated) Weil 多元環とは，微分作用素 $d$ をもつ次数つき多元環 $W(gl_q)_q$ で，

$$W(gl_q)_q = \wedge gl_q^* \otimes S(gl_q^*)_q,$$
$$d = d' + d'',$$
$$d'\alpha = d_\wedge \alpha,$$
$$i(x)d'\tilde{\alpha} = \theta(x)\tilde{\alpha}, \qquad \theta(x) = -(\mathrm{ad}\,x)^*, \qquad \forall x \in gl_q$$
$$d''\alpha = \tilde{\alpha},$$
$$d''\tilde{\alpha} = 0$$

となるものである。 $W(gl_q)_q$ の中で $O_q$-基底形式，すなわち $O_q$ のリー環 $o_q$ の任意の元 $x$ に対し $i(x)$ を施すと 0 になり，$O_q$ の元の随伴変換で不変な形式全体から成る $W(gl_q)_q$ の d-不変部分環を $W(gl_q, O_q)_q$ とかく。 $WO_q$ の $1\otimes c_i$ を $c_i \in S(gl_q^*)_q$ に対する $1\otimes c_i$ と同一視し，$y_i\otimes 1$ に対して微分作用素が可換となるように $y_i \in \wedge gl_q^* \otimes S(gl_q^*)_q$ を定めることによって，$WO_q$ は $W(gl_q, O_q)_q$ の部分環と見なすことができこの対応は同形写像

$$H^\cdot(WO_q) \cong H^\cdot(W(gl_q, O_q)_q)$$

をひきおこす。（C. Godbillon [G] 参照。）

$V(\mathcal{F})$ の上の Bott 接続 $\theta^b$ は枠束 P 上の接続を定め，したがって微分作用素をもつ次数つき多元環の写像

$$k(\theta^b): W(gl_q, O_q)_q \to A(P/O_q),$$
$$k(\theta^b)\alpha = \alpha\theta^b,$$
$$k(\theta^b)\tilde{\alpha} = \alpha\Omega^b$$

を定める。 F. Kamber と Ph. Tondeur [KT, 123-125] によれば、

$$\Delta(\theta^b, \theta^r) = ds_r^* \circ k(\theta^b)|WO_q : WO_q \to A(M)$$

となる。 $\tau : W(gl_q, O_q)_q \to \Lambda gl_q^*$ を第1因子への射影写像として $\tau_i = \tau(\bar{y}_i)$ とおく。 $k(\theta^b)(S(gl_q^*)) \wedge \mathrm{c}^{*}A(M, \mathcal{F}) = 0$ であることから、

$$\begin{aligned} h_i &= ds_r^* \circ k(\theta^b)(\bar{y}_i) \qquad \mathrm{mod}\ A(M, \mathcal{F}) \\ &= ds_r^* \circ k(\theta^b)(\tau_i \otimes 1) \qquad \mathrm{mod}\ A(M, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

となる。 $(U, \Phi)$ を局所葉層座標、 $s : U \to P|_U$ を局所正規直交 $C^2$ $q$-枠場で、$s_r$ のリフトとなるものとする。 $L$ を $U$ における連結葉(plaque)とすると、 $L$ は可縮 $\theta^b|L$ は平坦だから、 $P|L \cong \mathbb{R}^{n-q} \times GL(q;\mathbb{R})$ で、 $GL(q;\mathbb{R})$ の左不変ベクトル場 $X$ および $\mathbb{R}^{n-q} = L$ の座標 $y$ に対して

$$\theta^b(\partial/\partial y, X) = X$$

となる。 $s$ に対し、$C^2$-写像 $g : L \to GL(q;\mathbb{R})$ が定まり、 $s(y) = (y, g(y))$ と表わされることから、

$$\begin{aligned} \theta^b \circ ds(\partial/\partial y) &= \theta^b(\partial/\partial y, dg(\partial/\partial y|g(y))) \\ &= g(y)^{-1} dg(\partial/\partial y)|g(y) \end{aligned}$$

を得る。 $gl_q$-値1次形式 $A_s = g^{-1}d_{\mathcal{F}}g : T(\mathcal{F})|U \to gl_q$ を

$$A_s(\partial/\partial y|_y) = g(y)^{-1} dg(\partial/\partial y)|g(y)$$

によって定めると、

$$A_s^*(\tau_i) = ds^* \circ k(\theta^b)(\tau_i \otimes 1)$$
$$= ds^* \circ k(\theta^b)(\bar{y}_i) \qquad \mathrm{mod}\ A(M, \mathcal{F})$$
$$= ds_r^* \circ k(\theta^b)(\bar{y}_i)$$

と成る。 したがって

$$h_i = A_s^*(\tau_i) \qquad\qquad \mathrm{mod}\ A(M, \mathcal{F})$$

がいえる。

$\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha=1}^{d}$ を $\mathcal{F}$ の局所葉層座標近傍によるMの有限開被覆とし，$P_\alpha = P|U_\alpha$ とおく。 Riemann計量 $s_r$ の $U_\alpha$ 上への制限を $s_{r,\alpha} : U_\alpha \to P_\alpha/O_q$ とかく。 これらは局所正規直交 $q$－枠場 $s_\alpha : U_\alpha \to P_\alpha$ にもち上げられる。 一般に $\{t_\alpha : U_\alpha \to P_\alpha\}$ を可測局所 $q$－枠場の集合とするとき，可測関数 $O_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to O_q$ が存在し，

$$t_\alpha(x)\, O_{\alpha\beta}(x) = t_\beta(x) \qquad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

と成るならば，$\{t_\alpha\}$ は $O_q$-関係にあるという。 $\rho$ を $GL(q;\mathbb{R})$ 上の左不変Riemann計量で同時に $O_q$ の右作用で不変なものとする。 $\rho$ は対称空間 $S_q = GL(q;\mathbb{R})/O_q$ 上のRiemann計量 $\bar{\rho}$ を引きおこす。 また $s_r$ は $C^2$－同形写像 $\mathcal{T} : P/O_q \cong M \times S_q$ を定める。

$P/O_q$ の断面写像 $s$ に対して

$$\|s\| = \underset{x \in M}{\mathrm{ess\cdot sup}}\ \bar{\rho}(\mathcal{T} \circ s(x), \overline{id})$$

と定めると，これは半ノルムとなる。 $gl_q$-値可測 $p$ 次形式 $\omega: \Lambda^p(T(M)) \to gl_q$ に対し，そのノルム，半ノルムが

$$\|\omega\| = \operatorname*{ess\cdot sup}_{\substack{x \in M \\ v \in \Lambda^p(T_x(M)) \\ |v|_x = 1}} \|\omega(v)\|,$$

$$\|\omega\|_{\mathcal{F}} = \operatorname*{ess\cdot sup}_{\substack{x \in M \\ v \in \Lambda^p(T_x(\mathcal{F})) \\ |v|_x = 1}} \|\omega(v)\|$$

によって定められる。

$(M, \mathcal{F})$ における可測飽和集合族の $\Sigma$-代数を $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ とかき，$\{\lambda_\alpha\}_{\alpha=1}^d$ を $\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^d$ に従属する 1 の分割とする。 積分の dominated convergence 定理を使い，$O_q$-関係にある局所 $C^2$ $q$-枠場の列 $\{s_{\alpha,j}\}_{j=1,2,\cdots}$ をえらび，殆んどすべての $x \in U_\alpha$ に対して $\lim_{j\to\infty} s_{\alpha,j}(x) = s_\alpha(x)$ となるようにすることによって次の定理を得る。

定理 1 葉方向に $C^2$ であるような $O_q$-関係にある局所可測 $q$-枠場の集合を $\{s_\alpha\}_{\alpha=1}^d$ とするとき，$\|s_\alpha\| < \infty$，$\|A_{s_\alpha}\|_{\mathcal{F}} < \infty$ ならば，$[\varphi] \in H^{n-2i+1}(M, \mathcal{F})$，$B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ に対して

$$\chi_B(y_i)[\varphi] = \sum_{\alpha=1}^d \int_{B\cap U_\alpha} \lambda_\alpha A^*_{s_\alpha}(\tau_i) \wedge \varphi$$

が定まる。

$\tau_i$ は $O_q$-基底形式であるから，右辺は $\{s_\alpha\}$，$\{\lambda_\alpha\}$ のとり方

によらない。

## §3. 2次特性類の消滅定理

局所葉層座標近傍族$\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha=1}^{d}$に対し，$T_\alpha \subset U_\alpha$を葉に横断的な$q$次元座標部分多様体で，$T_\alpha \cap T_\beta = \phi$ $(\alpha \neq \beta)$となるようにとり，$T = \bigcup_\alpha T_\alpha$とおく。 $x \in M$を通る$\mathcal{F}$の葉を$L_x$とかく。 $T \times T$の部分空間

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in T \times T \mid L_x = L_y\}$$

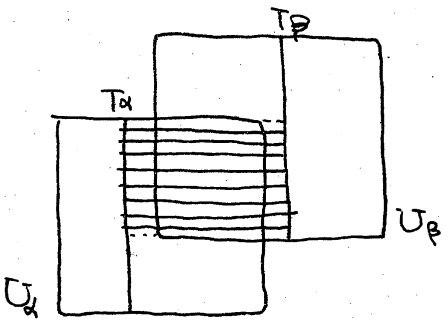
は主亜群構造をもち，$T$上の同値関係を定める。 $\mathcal{R}_x = \{y \in T \mid (x, y) \in \mathcal{R}\}$とおく。 一般に$G$を完備可分距離空間の位相群とする。 $\mathcal{R}$上の可測$G$-コサイクルは可測写像$\psi : \mathcal{R} \to G$で，

$$\psi(y, z)\psi(x, y) = \psi(x, z), \quad x \in T, \quad y, z \in \mathcal{R}_x$$

となるものである。 二つの$G$-コサイクル$\psi_1$，$\psi_2$は，可測写像$f : T \to G$が存在し，

$$\psi_1(x, y) = f(y)^{-1}\psi_2(x, y)f(x) \qquad (x, y) \in \mathcal{R}$$

となるとき，コホモローグであるといい，$\psi_1 \sim \psi_2$とかく。




$U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$のとき$\gamma_{\alpha\beta}$を$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}$によって定められる$T_\alpha$の開集合から$T_\beta$の開集合の上への局所$C^2$-同形写像

とする。局所$C^2$−同形写像族$\{\gamma_{\alpha\beta} \mid U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi\}$は擬群$\mathcal{S}$ $=\mathcal{S}(\mathcal{F})$を定める。一般に$\mathcal{S}$の元は(或る$\alpha, \beta$に対し)$T_\alpha$の開集合から$T_\beta$の開集合の上への局所$C^2$−同形写像である。

$x, y \in \mathcal{R}$に対し, $\{(\alpha_i, \beta_i) \mid U_{\alpha_i} \cap U_{\beta_i} \neq \phi, 1 \leqq i \leqq N\}$が存在して

$$y = \gamma_{\beta_N \alpha_N} \circ \cdots \circ \gamma_{\beta_1 \alpha_1}(x)$$

となるとき$|(x, y)| \leqq N$と定める。このとき$|(x, y)|$はノルムとなり$\mathcal{R}$上の距離(語距離)$d$を定める。$\mathcal{R}$上の$G$−コサイクル$\psi$に対し, 連続関数$c: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$が存在して,

$$|\psi(x, y)| \leqq c(d(x, y))$$

となるとき, $\psi$を軟化(tempered)コサイクルと呼ぶ。とくに$\mathcal{R}$上の$GL(q; \mathbb{R})$−コサイクル$\nu$が存在し, 任意の$\gamma \in \mathcal{S}$および$\gamma$の定義領域の殆んどすべての点$x$に対して

$$d\gamma(x) = \nu(x, \gamma(x))$$

となる。この$\nu$を$d\gamma$で表わし, $\mathcal{R}$に対する径(英役)コサイクルと呼ぶ。

$tr(sl_q) = 0$であることから, まず次のことがいえる。

定理2　$V(\mathcal{F})$の枠束$P$が主$SL(q; \mathbb{R})$束に縮約(reduce)されるならば,

$$A^*_{S_\alpha}(T_i) \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ A(M, \mathcal{F})$$

となり, したがって$B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$に対して,

$$\chi_B(y_i) = 0.$$

位相群Hはコンパクト凸可分空間上のHの任意の連続アファイン作用が不動点をもつとき，柔順(amenable)であるという。 S. Hurder [H] によれば，柔順部分群 $H \subset GL(q; \mathbb{R})$ に対し，Hのリー環を $\mathfrak{h}$，その極大コンパクト部分群を $J = H \cap O_q \subset H$ とするとき，自然準同形写像

$$H^i(\mathfrak{gl}_q, H) \longrightarrow H^i(\mathfrak{h}, J) \qquad i > 1$$

は0写像となる。 ただし $H^i(\mathfrak{gl}_q, H)$ は $\wedge \mathfrak{gl}_q^*$ のH－基底形式環 $(\wedge \mathfrak{gl}_q^*)_H$ の $i$ 次元コホモロジーを表わすものとする。 $H^i(\mathfrak{h}, J)$ についても同様。 このことと定理1から次のことがいえる。

定理3 $\psi: \mathcal{R} \to GL(q; \mathbb{R})$ が軟化コサイクルで，$\psi \sim d\gamma$ となり，Pが主柔順群束に縮約されるならば，$i > 1$ に対して $A^*_{S\alpha}(T_i) \in \mathrm{Im}(d_{\mathcal{F}})$ となり，したがって

$$\chi_B(y_i) = 0.$$

Kをコンパクト凸空間とし，$\psi$ をKのアファイン自己同形写像全体の群 Aut K に値をもつ $\mathcal{R}$ 上のコサイクルとする。任意のこのようなコサイクル $\psi$ に対して，不変断面写像，すなわち可測写像 $h: T \to K$ で

$$\psi(x, y)\, h(x) = h(y) \qquad \forall (x, y) \in \mathcal{R}$$

となるものが存在するならば，$\mathcal{R}$ は柔順であるという。 集

合$X\subset T$は$x\in X$ならば$\mathcal{R}_x\subset X$となるとき，飽和(saturated)であるという。 $T$の可測飽和部分集合族の$\Sigma$－代数を$\mathcal{B}(\mathcal{R})$とかく。 可測飽和部分集合$A$は，二つの正測度をもつ互に素な飽和集合の和に分解できないとき，エルゴード的であるという。 とくに$T$がそれ自身エルゴード的飽和集合であるとき，$\mathcal{R}$はエルゴード的であるという。

$GL(q;\mathbb{R})$の$2^q$個の極大柔順部分群の共役類に関するC. C. Moore [M]の結果に対応して，次のことがいえる： $\psi$を柔順エルゴード的関係$\mathcal{R}$上の$GL(q;\mathbb{R})$－コサイクルとするとき，$\psi$は柔順部分群$H\subset GL(q;\mathbb{R})$に値をもつ軟化コサイクルにコホモローグとなり，$\mathcal{R}$がエルゴード的でない場合，$T$は高々$2^q$個の$Y_i\in\mathcal{B}(\mathcal{R})$ $i=1,\cdots,m$に分解し，$\psi|Y_i$は柔順部分群$H_i\subset GL(q;\mathbb{R})$に値をもつ軟化コサイクルにコホモローグとなる。（S. Hurder と A. Katok [HK, 22]参照。）このことと定理1，3とから次の結論がいえる。

定理4　$B\in\mathcal{B}(\mathcal{F})$で$\mathcal{F}|B$が柔順（すなわち$\mathcal{R}$が柔順）ならば，$y\in H^p(gl_q, O_q)$　$p>1$に対して

$$\chi_B(y)=0.$$

関係形のMurray-von Neumann分類（J. Feldman と C. C. Moore [FM]参照）によれば，各$B\in\mathcal{B}(\mathcal{F})$は（測度0の集合を除いて）一意的にそれぞれ$\mathcal{F}$がI，IIおよびIII形となる

ような可測飽和集合の和

$$B = B_{I} \cup B_{II} \cup B_{III}$$

に分解する。 その中で $\mathcal{F}|B_I$ は可測断面写像をもち，したがって $B_I/\mathcal{F}$ は標準Borel測度空間となる。 すなわち可測横断多様体Tが存在し，$B_I/\mathcal{F}$ の上へ一対一に写される。 定理4から次のことがいえる。

定理5 $\mathcal{F}|B$ がI形ならば柔順であり，したがって任意の $y \in H^p(gl_q, O_q)$ $p>1$ に対して

$$\chi_B(y) = 0.$$

$B/\mathcal{F}$ の測度はB上の絶対連続不変横断測度を引きおこすから，$d\gamma$ は $SL(q;\mathbb{R})$ に値をもつコサイクルにコホモローグとなり，定理2から，

$$\chi_B(y_1) = 0.$$

以上により次の結論を得る。

定理6 $\mathcal{F}$ がI形ならば，すべての次元差的(residual)な2次特性類 $y_I c_J$ $(|J|=q)$ は0となる。

## §4. 葉層ホロノミー亜群コホモロジーと高次元Weilコホモロジー類

$(M,\mathcal{F})$ を $C^2$-葉層多様体とする。 $\gamma$ を $\mathcal{F}$ の一つの葉上の点 $x$, $y$ を結ぶ区分的 $C^2$-曲線弧とし，$[\gamma]$ を $\gamma$ のホロノミー

同値類とする。$\mathcal{F}$のホロノミー亜群は，$\mathcal{F}$の葉をLと表わすとき，

$$G = G(\mathcal{F}) = \bigcup_{\mathcal{F} \ni L} \{(x, y, [\gamma]) \mid x, y \in L,\ \gamma : [0,1] \to L,\ \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}$$

によって定義される。Gは(必ずしもHausdorffとは限らない) $2m-q$ 次元 $C^2$-多様体となる。したがってGは一つの位相亜群である。$\mathcal{N}G = \bigcup_{0 \leqq n} \mathcal{N}_n G$ をGの半単体的空間とする。すなわち，

$$\mathcal{N}_0 G = M,$$

$$\mathcal{N}_n G = \{x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} x_n \mid x_i \in M,\ f_i = (x_i, x_{i-1}, [\gamma_i]) \in G\}$$

$$n > 0$$

で，$\mathcal{N}_0 G$ はMの位相，$\mathcal{N}_n G$ は $G \times \cdots \times G$ の部分空間位相をもつものであり，写像

$$\partial_i : \mathcal{N}_n G \to \mathcal{N}_{n-1} G$$

$$s_i : \mathcal{N}_n G \to \mathcal{N}_{n+1} G \qquad (0 \leqq i \leqq n)$$

が定義され，

$$\partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i \qquad (i < j),$$

$$s_i s_j = s_{j+1} s_i \qquad (i \leqq j),$$

$$\partial_i s_j = s_{j-1} \partial_i \qquad (i < j),$$

$$\partial_i s_j = s_j \partial_{i-1} \qquad (i > j+1),$$

$$\partial_i s_i = \partial_{i+1} s_i = id$$

となるものである。

$(M, \mathcal{F})$, $(M', \mathcal{F}')$ を余次元 $q$ の $C^2$-葉層構造, $f_0, f_1 : M \to M'$ を $\mathcal{F}'$ に横断的な $C^2$-写像で,

$$f_0^* \mathcal{F}' = f_1^* \mathcal{F}' = \mathcal{F}$$

となるものとする。 $\mathcal{F}'$ に横断的な $C^2$-写像 $H : M \times \mathbb{R} \to M'$ が存在し,

$$f_i(m) = H(m, i) \qquad m \in M, \quad i = 0, 1$$

$$H^* \mathcal{F}' = \pi^* \mathcal{F}$$

$$(\pi : M \times \mathbb{R} \to M \text{ は射影写像})$$

となるならば, $f_0$, $f_1$ は<u>葉を保つ写像によって</u> $C^2$-<u>ホモトープ</u>であるといい, $f_0 \underset{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}{\simeq} f_1$ とかく。 余次元 $q$ の葉層構造 $(M, \mathcal{F})$ は, $\mathcal{F}$ に横断的な $q$ 次元部分多様体 $N \subset M$ と, $\mathcal{F}$ に横断的な写像 $f : M \to N \subset M$ が存在し,

$$f \underset{\mathcal{F}, \mathcal{F}}{\simeq} \mathrm{id}_M$$

となるならば, $\mathcal{F}$-<u>可縮</u>であるという。 $N$ を $M$ の $\mathcal{F}$-<u>可縮部分多様体</u>とよぶ。 $M$ の開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}$ は, $\mathfrak{U}$ の任意の有限個の交わりが $\mathcal{F}$-可縮ならば, $\mathcal{F}$-<u>単純被覆</u>という。

$\theta^F$, $\theta^V$ をそれぞれ $F = T(\mathcal{F})$, $V = V(\mathcal{F})$ の接続とする。 $T(M) = F \oplus V$ における接続 $\theta^F \oplus \theta^V$ を使うことによって, $M$ の任意の開被覆が開集合族による $\mathcal{F}$-単純な細分をもつことがいえる。 $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Sigma}$ を $(M, \mathcal{F})$ の局所葉層座標近傍による $M$ の $\mathcal{F}$-単純開被覆とする。 有限部分集合 $s \subset \Sigma$ に対

して

$$U_S = \bigcap_{\alpha \in S} U_\alpha ,$$

$$R_{\mathfrak{U}} = \{U_S\}_{S \subset \Sigma}$$

とおく。 $\mathfrak{U}$ の $\mathcal{F}$-単純性によって，各 $U_S$ ($U_\alpha$) の中に連結葉とただ一点で交わる横断的な $q$ 次元部分多様体 $N_S$ ($N_\alpha$) と $\mathcal{F}$-可縮写像 $r_S : U_S \to N_S$ を見出すことができる。

$\mathfrak{U}$ に対応して位相カテゴリ $M_{\mathfrak{U}}$ が，その対象および射を

$$\{(x, U_S) \mid S \subset \Sigma,\ x \in U_S\} \subset M \times R_{\mathfrak{U}} ;$$

$$\{[(x, U_S) \to (y, U_T)] \mid S \subset T \subset \Sigma\}$$

$$\subset \{(x, U_S) \mid S \subset \Sigma, x \in U_S\} \times \{(x, U_S) \mid S \in \Sigma, x \in U_S\}$$

(共に部分空間の位相）と定めることによって得られる。

関手 $P_{\mathfrak{U}} : M_{\mathfrak{U}} \to G(\mathcal{F})$ を

$$P_{\mathfrak{U}}((x, U_S)) = x ,$$

$$P_{\mathfrak{U}}([(x, U_S) \to (y, U_T)]) = (x, y, [\gamma])$$

$$y = r_T(x)$$

$$\gamma : [0, 1] \to L_x \cap U_T \quad (C^2\text{-曲線})$$

$$\gamma(0) = x, \quad \gamma(1) = y$$

によって定める。 実際 $L_x \cap U_T$ は可縮だから，$\gamma$ は $x$，$y$ によってホモトピーを除いてきまる。 $\mathcal{R}(M_{\mathfrak{U}})$ を $M_{\mathfrak{U}}$ の脈体とする。 これは半単体的集合で，$P_{\mathfrak{U}}$ は半単体的写像

$$\mathcal{R}(P_{\mathfrak{U}}) : \mathcal{R}(M_{\mathfrak{U}}) \to \mathcal{R}(G(\mathcal{F}))$$

を引きおこす。

$\mathfrak{N}(M_{\mathfrak{U}})$の各$n$－単体は

$$(x, i_0, \cdots, i_n) = (x, U_{i_0, \cdots, i_n}, U_{i_1, \cdots, i_n}, \cdots, U_{i_n})$$

$$x \in N_{i_0, \cdots, i_n} \subset U_{i_0, \cdots, i_n}$$

の形をもつ。　$x$に関して$C^2$-関数となる$\mathfrak{N}(M_{\mathfrak{U}})$上の実数値コチェインの群を$\hat{C}^{\cdot}(\mathfrak{N}(M_{\mathfrak{U}}))$とかくと，

$$\mathfrak{N}(P_{\mathfrak{U}})^{\#}(C^{\cdot}(G(\mathcal{F}); \mathbb{R}) \subset \hat{C}^{\cdot}(\mathfrak{N}(M_{\mathfrak{U}}))$$

および自然同形写像

$$\lambda : \hat{C}^{\cdot}(\mathfrak{N}(M_{\mathfrak{U}})) \cong C^{\cdot}(\mathfrak{N}(R_{\mathfrak{U}}); C^2_{\mathcal{F}})$$

が得られる。　こゝで$C^2_{\mathcal{F}}$は$\mathcal{F}$の葉に沿って一定な値をとる$C^2$－関数の芽の層とする。　単体の重心細分作用素から，コチェイン写像$K: C^{\cdot}(\mathfrak{N}(R_{\mathfrak{U}}); C^2_{\mathcal{F}}) \to C^{\cdot}(\mathfrak{N}(\mathfrak{U}); C^2_{\mathcal{F}})$が

$$(Kf)_{i_0, \cdots, i_n}(x) = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) f(x, \sigma(i_0), \cdots, \sigma(i_n))$$

$$x \in U_{i_0, \cdots, i_n}, \quad f \in C^n(\mathfrak{N}(R_{\mathfrak{U}}); C^2_{\mathcal{F}})$$

によって定められ，同形写像

$$K^{\cdot} : H^{\cdot}(\mathfrak{N}(R_{\mathfrak{U}}); C^2_{\mathcal{F}}) \cong H^{\cdot}(\mathfrak{N}(\mathfrak{U}); C^2_{\mathcal{F}})$$
$$= \check{H}^{\cdot}(\mathfrak{U}; C^2_{\mathcal{F}})$$

を引きおこす。　以上により$K \circ \lambda \circ \mathfrak{N}(P_{\mathfrak{U}})^{\#}$は準同形写像，

$$\Theta : H^{\cdot}(G(\mathcal{F}); \mathbb{R}) \to \check{H}^{\cdot}(M; C^2_{\mathcal{F}})$$

を定める。　この$\Theta$が同形となる場合，鈴木[S1]の方法による同形写像

$$\Phi : H^{0,\bullet}_{\mathcal{F}DR}(M) \xrightarrow{\cong} \check{H}^{\bullet}(M; C^{2}_{\mathcal{F}})$$

と合わせて，Weilコホモロジー類$[(h_i)_{0,2i-1}]$に対応する$H^{2i-1}(G(\mathcal{F}); \mathbb{R})$の元

$$m_i(M, \mathcal{F}) = \Theta^{-1} \circ \Phi[(h_i)_{0,2i-1}]$$

を定めることができる。 とくに $i = 1$ に対しては，モジュライ・コホモロジー類 $m_1(M, \mathcal{F}) = m(M, \mathcal{F})$ が得られる。（鈴木［$S_2$］参照。）

# 参考文献


[FM] J. Feldman and C. C. Moore, Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras I, Trans. Amer. Math. Soc. 234(1977), 289 - 324.

[G] C. Godbillon, Cohomologie d'algebres de Lie de champs de vecteurs formels, Seminaire Bourbaki 421.01 - 421.19 (1971/72).

[H] S. Hurder, Foliation dynamics and leaf invariants, Comment. Math. Helvetici 60(1985), 319 - 335.

[HH] J. L. Heitsch and S. Hurder, Secondary classes, Weil measures and the geometry of foliations, J. Differential Geometry 4(1984), 291 - 309.

[HK] S. Hurder and A. Katok, Ergodic theory and Weil measures for foliations, Math. Sci. Res. Inst. preprint, 1984.

[KT] F. Kamber and Ph. Tondeur,Foliated bundles and characteristic classes, Lecture Notes in Math. 493, Springer-Verlag, Berlin 1976.

[M] C. C. Moore, Amenable subgroups of semi-simple groups and proximal flows, Israel J. of Math. 34(1979), 121 - 138.

[$S_1$] H. Suzuki, An interpretation of Weil operator $\chi(y_1)$, Research Notes in Math. 131, Ed. L. A. Cordero, Differential Geometry, Pitman 1985, 228 - 244.

[$S_2$] H. Suzuki, Modular cohomology class from the viewpoint of characteristic class, Research Notes in Math. 123, Ed. H. Araki and E. G. Effros, Geometric Methods in Operator Algebras, Pitman 1986, 375 - 386.