

C^* 環のゼータ関数

東工大・理 黒川信重(N. Kurokawa)

数論は数論的環(基本的には \mathbb{Z} 上有限生成の可換環)のゼータ関数の研究と考えられるが, 同様にして「 C^* 環のゼータ関数が考えられるのではないかと思われます。ここでは基本的な例として Selberg [13] によって研究され, Smale [14] によって力学系のゼータ関数として捉え直され一般化されたゼータ関数の特殊値について Lichtenbaum 予想 [10] の類似を考える。

§1 最も基本的なゼータ関数は リーマン・ゼータ関数

$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$ である。ここで p は素数全体を動く。この無限積 (の拡張) を オイラー積 という。

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ と展開され, オイラーにより

$$\zeta(2) = \pi^2/6 \quad (\zeta(-1) = -1/12),$$

$$\zeta(4) = \pi^4/90 \quad (\zeta(-3) = -1/120), \dots$$

が知られている。オイラーによる関数等式により

$\zeta(s)$ と $\zeta(1-s)$ の値は初等的因子を除いて一致する。

「オイラーの結果は 1730~50 頃に得られていた。」

オイラーの特殊値に関する結果は Quillen を経て

Lichtenbaum [10] により 「ゼータ関数の特殊値は

K 群で書ける」という予想 (slogan) に一般化された。

この予想は, 現在も不明な $\zeta(3), \zeta(5), \dots$ の明確な

表示も含んであり詳しくは次の形: 整数 $m \geq 1$

に対し $s = 1 - m$ における テイラー展開は

$$\zeta(s) = \pm \frac{\#K_{2m-2}(\mathbb{Z})_{\text{tors}}}{\#K_{2m-1}(\mathbb{Z})_{\text{tors}}} \times (2\pi)^{\pm} \times \text{Reg}(K_{2m-1}(\mathbb{Z})) \times$$

$$\times (s+m-1)^{\text{rank } K_{2m-1}(\mathbb{Z})} + \dots$$

ここで $K_n(\mathbb{Z})$ は Quillen の K 群, $\text{Reg}(K_n(\mathbb{Z}))$ は regulators で $\text{rank } K_n(\mathbb{Z}) = 0$ のときは 1。例えば

$$K_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad K_1(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad K_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

$$K_3(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/48\mathbb{Z} \quad \text{であり}$$

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2} = -\frac{\#K_0(\mathbb{Z})_{\text{tors}}}{\#K_1(\mathbb{Z})},$$

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12} = -\frac{\#K_2(\mathbb{Z})}{\#K_3(\mathbb{Z})} \times 2.$$

なお, $2\pi^{\pm}$ まで入れた正確な予想は Lichtenbaum [10a, b] にある。さらに, この予想は \mathbb{Z} を一般の代数的整数環 \mathcal{O}_F (F は有理数体 \mathbb{Q} の有限次拡大体, \mathcal{O}_F は \mathbb{Z} の F における整閉包) にしてもこのままの形で成立すると予想される。ただし, ゼータ関数は

$$\zeta(s, \mathcal{O}_F) = \prod_{\mathfrak{p} \in \text{Max}(\mathcal{O}_F)} (1 - N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}, \quad N(\mathfrak{p}) = \#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}),$$

$\text{Max}(\mathcal{O}_F)$ は \mathcal{O}_F の極大イデール空間。例えば, $s = 0$

これは 次のように確かめられる (Dedekind 1877):

$$\zeta(s, \mathcal{O}_F) = -\frac{h}{w} R \cdot s^r + \dots,$$

$$h = (\text{類数}) = \# K_0(\mathcal{O}_F)_{\text{tors}},$$

$$w = (\mathcal{O}_F \text{ 内の } 1 \text{ の } h\text{-乗根の個数}) = \# K_1(\mathcal{O}_F)_{\text{tors}},$$

$$R = (\text{通常の regulator}) = \text{Reg}(K_1(\mathcal{O}_F)),$$

$$r = \text{rank } K_1(\mathcal{O}_F).$$

一般の $S=1-m$ のべき乗子に関しては Borel [4], Soule [15], Thomason [17] の結果がかなり良くわかってきている。これらの予想は $(\mathbb{Z})_{\mathcal{O}_F}$ を \mathbb{Z} 上有限生成の可換環 A (数論的環) にした場合に Beilinson [1], Bloch [3], Deligne [5] 等により一般化されている。加藤 [7] に詳しい解説がある。なお, $\zeta(s, A)$ は次のように定義される:

$$\zeta(s, A) = \prod_{p \in \text{Max}(A)} (1 - N(p)^{-s})^{-1}, \quad N(p) = \#(A/p).$$

これは Hasse-Weil のゼータ関数と呼ばれるが, 環 A の性質が $\zeta(s, A)$ の性質に良く反映している点がいちばん重要である。また, その特殊値に関する予想も A の K 群 $K_n(A)$ を用いて表わされる。同様にして, C^* 環などを含む, さらに一般の環 A に対して

ゼータ関数 $\zeta(s, A)$ を構成することにより, A の性質を $\zeta(s, A)$ を用いることにより記述できないかと考えることは自然なように思われる。とくに C^* 環の場合には K 群が集中的に研究されていることもあり手掛りがあると思われる。

§2 さて, ゼータ関数の特徴として 次の3つを期待したい。

- ① オイラー積表示をもつ。
- ② 特殊値が K 群でわかる。
- ③ 全 s 平面で“有理型”, 零点, 極が規則的に分布する。

上記の数論的ゼータ関数は ①, ②, ③ を満たすと思われるが, 同様な性質をもつ, 他の型のゼータ関数として Selberg [13] によるゼータ関数がある。ゼータ関数一般については 岩波数学辞典 (第3版) の「ゼータ関数」の項を参照下さい。セルバーグゼータ関数は群のゼータ関数として捉える方法と力学系のゼータ関数として捉える方法とがあり, どちらも重要である。ここでは, まず後者によって解説し, 後で特殊値を扱うときに前者による見方をする。

Smale [14] による力学系のゼータ関数の構成法は

とあり。 M を (コンパクト) 空間, $X: \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(M)$ を (位相) 力学系 とする。 このとき X の (セルバーグ) ゼータ関数を

$$\zeta(s, X) = \prod_{p \in \text{Per}(X)} (1 - N(p)^{-s})^{-1} \quad \text{と定義する。} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \text{Per}(X) &= \{ p = \mathbb{R} \cdot m \mid \mathbb{R}_p = \mathbb{R}_m = \ell(p)\mathbb{Z}, 0 < \ell(p) < \infty \} \\ &= \{ \text{periodic orbits 全体} \}, \end{aligned}$$

$N(p) = e^{\ell(p)} > 1$ 。 ただし, \mathbb{R}_m は isotropy 群

(stabilizer)。 このゼータ関数の特殊な場合について

では (1)(3) は Selberg により古典的に知られており、

特殊値に関する (2) についても様々なことが知られて

はじめている — とくに最近になって素粒子論との

関連において ([9F] 等)。 力学系のゼータ関数について

では Smale [14], Ruelle [12], 石川 [16] を参照す

べ。 例えば Ruelle [12] により X が実解析的 Anosov

流 のとき $\zeta(s, X)$ は 全 s 平面で有理型であることが

知られている。

このセルバーグ型のゼータ関数をヒントにして

C^* 力学系のゼータ関数を考えることができるように

思われる。 $X: \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(A)$ を C^* 力学系 とし, その

ゼータ関数 $\zeta(s, X)$ を A が連続関数環 $C(M)$ の

ときには上記のセルバーグ型セータ関数に交りよりにする。
 基本的には C^* 代数系 $X: \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(A)$ に付随する
 代数系 $\bar{X}: \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(\text{Pure}(A))$ を考えればよいと思
 われる。ここで $\text{Pure}(A)$ は A の pure states の空間であり、
 左 A -加群の圏 $\text{Mod}(A)$ の simple objects (の同型類)
 全体と同一視できる — この同一視は環のセータ
 関数の統一的な視点を与える [9a2]。実際、数論
 的環 A に対しては $\text{Max}(A)$ と $\text{Simple}(\text{Mod}(A))$ とは
 $p \mapsto A/p$ による同一視でき、 $\zeta(s, A) = \zeta(s, \text{Mod}(A))$
 $= \prod_{p \in \text{Simple}(\text{Mod}(A))} (1 - N(p)^{-s})^{-1}$, $N(p) = \#p$ とする明快な

定義が得られ、さらに、Lichtenbaum予想も $K_n(A)$
 $= \pi_{n+1}(\mathbb{Q}\text{Mod}(A))$ であるから大変見通しの良い
 ものとなる。ここで \mathbb{Q} は \mathbb{Q} -construction = "Quillenification"
 で $\mathbb{Q}\text{Mod}(A)$ は exact category。セータ関数を圏の
 セータ関数と見ること ([9a2]) はセルバーグ型セータ関
 数を群のセータ関数と見なしたときにも重要である。(§4)

さて [9] には少し変形した構成を示した。
 この $\zeta(s, X)$ を $C^*(X) = \mathbb{R} \rtimes_X A$ (C^* 接合積) の
 セータ関数 $\zeta(s, C^*(X))$ と見なすこともできると思われ
 る。と A が Cuntz 環の場合に Quillen-Lichtenbaum

予想の類似が確かめられる ([91])。ただし、この構成は完全に望ましいとは考えられない。セータ関数の良い構成には C^* 環の性質に根差した深い研究が必要と思われる。また、 A が C^* 環、 $\sigma \in \text{Aut}(A)$ (“ σ ”: $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(A)$) と同一視する) のときには 良く知られた Lefschetz 固定点定理の類似が期待され、これからセータ関数が予測される。

§3 さて、望ましいセータ関数 $\zeta(s, A)$ は Quillen-Lichtenbaum 予想を満たすべきである (こゝでの要言) からの特殊値に関して望まれることを準備しておくことは意味がある。この点で最近知られたセルバーグ型セータ関数の特殊値に関する結果は興味深い。次に概観する。(一般論は [92]-[94] 等にある)

こゝではセルバーグ・セータ関数を群のセータ関数と見なすのが簡明である。いま $M = \mathbb{P} \setminus H$ を種数 $g \geq 2$ のコンパクトリーマン面 (リーマン多様体として) とする。こゝで $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ は上半平面, $\Gamma = \pi_1(M)$ は基本群で $\Gamma \subset \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ という埋め込みがリーマン計量から指定される。

このとき Γ の (あるいは M の) セルバーグ・セータ関数を

$$Z_p(s) = \prod_{p \in \text{Prim}(\Gamma)} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - N(p)^{-s-n})$$

と定義する。また $\zeta(s, \Gamma) = \prod_{p \in \text{Prim}(\Gamma)} (1 - N(p)^{-s})^{-1}$

と表わす。この2つは $\zeta(s, \Gamma) = \frac{Z_p(s+1)}{Z_p(s)}$ と表わす。

実質的には同じものである。上記で $\text{Prim}(\Gamma)$ は

Γ の素共役類 (任意の $m \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}$ と任意の $\gamma \in \Gamma$ に対し $p \neq [\gamma^m]$ とする共役類 p のこと; ただし $[\gamma^m]$ は γ^m を含む共役類を表わす) 全体を

動かす, $N(p)$ は $p = [\gamma]$ とすると γ の固有値を α, α^{-1} ($|\alpha| \geq 1 \geq |\alpha^{-1}|$) としたとき $N(p) = |\alpha|^2$ と表わす。(このとき α は実数となる。)

なお, $Z_p(s), \zeta(s, \Gamma)$ は 4 -マンフォールド $M = \Gamma \backslash H$ の言葉で書くと $X: \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(UM)$ を M の単位接束

$UM (= SM)$ 上の測地流 (geodesic flow) とし

$$Z_p(s) = Z_m(s) = \prod_{p \in \text{Per}(X)} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - N(p)^{-s-n}),$$

$$\zeta(s, \Gamma) = \zeta(s, X) = \prod_{p \in \text{Per}(X)} (1 - N(p)^{-s})^{-1} = \frac{Z_m(s+1)}{Z_m(s)} \quad \text{と表わす。}$$

さて, $Z_{\Gamma}(s)$ の特殊値について次の結果が得られる。

定理 整数 $k \geq 2$ に対して $s = 1 - k$ における $Z_{\Gamma}(s)$ の

テイラー展開は

$$Z_{\Gamma}(s) = C_k^{-1} \det(\Delta_{\Gamma}^k / S_{2k}(\Gamma)) (2\pi(s-1+k))^{2 \cdot \dim S_{2k}^k(\Gamma)} + \dots$$

となる。

ここで $z = x + iy$ を上半平面 H 上の変数として

$$S_{2k}(\Gamma) = \left\{ f: H \rightarrow \mathbb{C} \left| \begin{array}{l} \textcircled{1} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \left(\frac{cz+d}{c\bar{z}+d}\right)^k f(z) \\ \text{かつ } \exists \text{ の } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \text{ に対して成立} \\ \textcircled{2} \int_{\Gamma \setminus H} \frac{dx dy}{y^2} |f(z)|^2 < \infty \end{array} \right. \right\}$$

$$= \left\{ y^k g(z) \left| \begin{array}{l} \textcircled{1} g\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{2k} g(z) \\ \text{かつ } \exists \text{ の } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \text{ に対して成立} \\ \textcircled{2} \int_{\Gamma \setminus H} \frac{dx dy}{y^2} |g(z)|^2 y^{2k} < \infty \end{array} \right. \right\},$$

$$S_{2k}^{\text{hol}}(\Gamma) = \left\{ y^k g(z) \in S_{2k}(\Gamma) \mid g(z): \text{holomorphic} \right\},$$

$$\Delta_{\Gamma}^k = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + 2iky \frac{\partial}{\partial x} + k(k-1),$$

$$C_k = \exp \left(2 \left(k - \frac{1}{2} \right)^2 - 4 \zeta'(-1) - (2k-1) \log(2\pi) - 2 \sum_{m=0}^{k-2} (2k-3-2m) \log(2k-2-m) \right)$$

である。 Δ_P^k は Laplace 作用素 であり、

$$S_{2k}^{\text{hol}}(\Gamma) = \text{Ker}(\Delta_P^k) = \{ f \in S_{2k}(\Gamma) \mid \Delta_P^k f = 0 \},$$

$$\dim S_{2k}^{\text{hol}}(\Gamma) = (g-1)(2k-1) \quad (k=2, 3, \dots)$$

と存在する。

証明は D'Hoker-Phong [5] (cf. Voros [18] 等)

による $Z_P(k) = C_k^{g-1} \det(\Delta_P^k) \quad (k=2, 3, \dots)$

と 関数等式

$$Z_P(s) = Z_P(1-s) \exp \left(2(2g-2) \int_0^{s-\frac{1}{2}} \pi v \tan(\pi v) dv \right)$$

を用いなければならない。(ただし、D'Hoker-Phong [5] 等には

計算ミスがある。) なお、 $\det(\Delta_P^k)$ は

$$\exp \left(- \frac{d}{ds} \sum_{\lambda > 0} \lambda^{-s} \Big|_{s=0} \right) \text{ で定義する。 ここで } \lambda \text{ は}$$

Δ_P^k の正の固有値全体を動く。 D'Hoker-Phong

の結果は Selberg 跡公式 (trace formula)

$$\sum_{\lambda} W(\lambda) = \sum_P M(P)$$

にたいし $W(\lambda) = " \log \lambda "$ とおけば得られる。

こゝで $W \leftrightarrow M$ はセルバーグ変換 (フーリエ変換の一般化) であり, 実際には収束性を考慮した修正が必要となる。また, $g=1$ の場合には次のとおり:

$$Z_P(s) = \frac{1}{2\pi} \cdot C_1^{g-1} \det(\Delta_P^1 / S_2(P)) (2\pi s)^{2 \cdot \dim S_2^{\text{hol}}(P) - 1} + \dots$$

ただし, $\dim S_2^{\text{hol}}(P) = g$ 。

したが g が小さいときは, 例えは $g=2$ の場合のように, より具体的な事かわかる。

定理 $g=2$ のとき

$$Z_P'(1)^{-1} Z_P(2)^{-1} = C' |\chi_{10}(\tau_M)|^2 (\det \text{Im} \tau_M)^{10}$$

こゝで C' は Γ によらない定数, τ_M は $M = \Gamma \backslash H$ の

周期行列 (τ_M は 2 次の複素対称行列で $\text{Im} \tau_M$ が正定値) で, $\chi_{10}(\tau_M) = \prod_{m: \text{偶}} \mathcal{V}_m(\tau_M)^2$ は重さ 10 の

種数 2 (次数 2) の Siegel cusp form (定数倍を除いて

一意性)。証明は Quillen の方法を拡張した
Belavin-Knizhnik [2] による結果

$$\left(\det \Delta_p^1 \right)^{13} \left(\det \Delta_p^2 \right)^{-1} = C \cdot |\chi_{10}(\tau_M)|^2 (\det \operatorname{Im} \tau_M)^{10}$$

1: D'Hoker-Phong の結果

$$Z_p'(1) = C_1^{g-1} \det(\Delta_p^1) \quad (Z_p(1) = 0)$$

$$Z_p(2) = C_2^{g-1} \det(\Delta_p^2)$$

を用いればよい。

ここで Quillen (1985) [20] の方法とは 上記の 左辺 の
 $\bar{\partial}$ log を計算することにより ($\equiv 0$ を示し)

左辺 = $|\chi_{10}|^2$ を示すことである。

このこと、別にも示される modular 不変性 とを
合わせればよい。

なお、上記の θ -関数の超版 (super-version)
が Manin 達 [11][0] により考えられ、超弦理論
に応用されている。(超弦理論については [9e], [9f]
等を参照下さい。)

§4 群・環・圏のセータ関数の簡単な見方。環 A に対しては左 A 加群の圏 $\text{Mod}(A)$ を考え、群 G はそれ自身を 1 個の object がある圏 $^{[G]}$ とみる (morphisms 全体が G)。

すると基本的には $\zeta(s, A) = \zeta_0(s, \text{Mod}(A))$, $\zeta(s, G) = \zeta_1(s, [G])$ と考えられる。ここで、 $\zeta_n(s, C)$ は圏 C の n -セータ関数で prime (= simple) n -morphisms 上の Euler 積で定義する: $\zeta_n(s, C) = \prod_{p \in P_n(C)} (1 - N(p)^{-s})^{-1}$ 。 (0-morphism = object, 1-morphism = morphism, ...) 基本予想は

$\zeta_0(s, C) = \zeta_1(s, \pi_1(C))$ である。[= の予想がいくつかの予想 — (前の②③等) — が確かめられる。]

ただし、一般には C を normed category (1.14 圏) とする必要がある。さらに多重圏 (multiple category) のセータ関数を考えると多重圏のテンソル積に関して閉じるため多重セータ関数の取り扱い等に関し見通しがよくなる。[9aa] 簡単のためここでは 2 つの場合を考える。

4.1 圏の基本 0-1.14 (cardinal norm). C を zero (= "null") object 0 をもつ category とする。 C の object X は任意の object Y に対して任意の morphism (= "arrow") $f: X \rightarrow Y$ が zero または monic になるときに simple と呼ばれる。 (C が abelian のとき, この条件は X の subobjects が 0 と X のみという通常の条件と同等。) さらに faithful functor $F: C \rightarrow \text{Set}$ が与えられている

とする。ここで Set は 集合の category。(言い換えれば C は concrete category。) 簡単のため zero object を持つ concrete category を Z -category と呼ぶ, 以下 C は Z -category とする。 C の object X は $F(X)$ が有限集合のとき有限であるといひ, X の 114 を $N(X) = \#F(X)$ で決める — $\#$ は cardinality X と Y が同型な有限 objects なら $F(X)$ と $F(Y)$ は同型 なら $N(X) = N(Y)$ となる。したがって有限 object X の同型類 $[X]$ に対して $[X]$ の 114 を $N([X]) = N(X)$ により定めることができる。いま, $P(C) = P_0(C)$ により C の有限 simple objects の同型類全体を表わし, $N: P(C) \rightarrow \mathbb{R}_{+1} = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 1\}$ (整数値) を 114 とする。 $P(C)$ を C の (0-)素元全体と考える。すると $P(C)$ は [9a], [9aa] の意味で prime set となる。(ただし, ここでは $P(C)$ は 一般には set とは限らなく class であるか?)

よって

$$\zeta_0(s, C) \left[= \zeta(s, C) \right] = \prod_{p \in P(C)} (1 - N(p)^{-s})^{-1}$$

と定義する。例えば A が数論的環のとき $C = \text{Mod}(A)$ に対して $\zeta_0(s, C)$ は通常の A のゼータ関数

$\zeta(s, A)$ と一致する。(ただし, F は forgetful functor.)

C が non-abelian の例として groups の category Grp を考えると,

$$\zeta_0(s, \text{Grp}) = \prod_{p: \text{有限単純群}} (1 - N(p)^{-s})^{-1}$$

となる。したがって、有限単純群の分類定理を用いれば $\text{Re}(s) > 1/3$ で有理型 (meromorphic) — ただし、 $s=1$ での simple pole を除いて non-zero holomorphic — であることがわかる。上記の $\zeta_0(s, C)$ は正確には $\zeta_0(s, C, \#)$ と cardinal norm $\# = \# \circ F$ を明記すべきであり、一般にはこの N_X を色々取る必要がある。例えば、前に見たように、コンパクト空間 M 上の連続関数環 $A = C(M)$ のとき $C = \text{Mod}(A)$ に対しては M 上の力学系 (flow) X によって N_X が決まる。この N_X に対する $\zeta_0(s, C, N_X)$ が力学系のゼータ関数 $\zeta(s, X)$ である。

4.2 Normed groups (ノルム群). 群 G 上の関数

$N: G \rightarrow \mathbb{R}_{+1} = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 1\}$ が次の条件 (1)-(4) を満たすときノルム群と呼ぶ。

$$(1) \quad N(1) = 1, \quad N(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$(2) \quad N(x) = N(x^{-1})$$

$$(3) \quad N(xy) = N(yx)$$

$$(4) \quad N(xy) \leq \max\{N(x)^2, N(y)^2\} \text{ (またはその変形)}.$$

このような Γ が与えられた群 (G, N) (単に G と書く) を normed group と呼ぶ。 G の共役類全体の集合を $\text{Conj}(G)$ と表わす。共役類 c に対して, その m 乗 c^m ($m \in \mathbb{Z}$) を $c^m = \{ x^m \mid x \in c \}$ と定義する。 c^m も G の共役類となる。 G の素共役類全体の集合 $\text{Prim}(G)$ を次で定義する:

$$\text{Prim}(G) = \left\{ p \in \text{Conj}(G) \mid p = c^m \text{ となる } c \in \text{Conj}(G) \text{ と } m \geq 2 \text{ が存在しない。} \right\}$$

Γ の条件 (3) から N は $\text{Conj}(G)$ 上の関数である。したがって 各有限次元表現 $\rho: G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ に対して ζ -関数 (L -関数) が 次のように定義される:

$$\zeta_1(s, [G], \rho) = \zeta_1(s, [G], N, \rho) = \prod_{p \in \text{Prim}(G)} \det(1 - \rho(p)N(p)^{-s})^{-1}$$

例えば $M = \Gamma \backslash H$ が 種数 $g \geq 2$ のコンパクト 4 -マンニフ (解析的多様体として) のとき 埋め込み $\Gamma \hookrightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ を通して, $\gamma \in \Gamma$ に対して, その固有値を $\alpha(\gamma), \beta(\gamma)$ とすると $N(\gamma) = \max\{|\alpha(\gamma)|^2, |\beta(\gamma)|^2\}$ により, Γ は "normed group" となる。 normed group (G, N) の特長は自然に解析的な群 $\overline{G}^{(N)}$ への埋め込み $G \hookrightarrow \overline{G}^{(N)}$ が N により決まるという点にある。 normed group の ζ -関数は 進化の観点から見て 原始的 (primitive, ur) な ζ -関数と考えられる。

文献

- [0] M. A. Baranov - Yu. I. Manin - I. V. Frolov - A. S. Shvarts:
The multiloop contribution in the fermion string. Sov. J. Nucl.
Phys. 43 (4) April 1986 p. 670-671. [Baranov-Svarc: JETPLett.
42 (1985) 419-421]
- [1] A. Beilinson: Higher regulators and values of L-functions.
J. Soviet Math. 30 (1985) 2036-2070.
(also: Contemp. Math. 55-I (1986) [19])
- [2] A. Belavin - V. Knizhnik: Complex geometry and theory of
quantum strings. Landau Institute preprint 1986 (JETP)
[also: Bost: Sémin. Bourbaki No. 676, 1987 Feb.]
[Belavin-Knizhnik-Morozov-Perelomov: Phys Lett. 177B (1986) 324-328]
- [3] S. Bloch: Algebraic cycles and values of L-functions. Crelle
350 (1984) 94-108. [Duke MJ. 52 (1985) 379-397; J. Pure Appl. Alg.
Adv. Math. 61 (1986) 267-304 [34 (1984) 119-145]
- [32] —: Tamagawa numbers and the Deligne conjectures (1986).
[Hawaii Conf. on K-Theory, Jan. 1987]
- [4] A. Borel: Cohomologie de SL_n et valeurs de fonctions
zeta aux points entiers. Ann. Scuola Normale Superiore
(Ser. 4) 4 (1977) 613-636. [Ann. Sci. ENS (Ser. 4) 7 (1974) 235-272]
Proc. ICM Vancouver 1974, 435-442]
- [5] P. Deligne: Périodes d'intégrales et valeurs de
fonctions L. Proc. Symp Pure Math. AMS vol 33-2 (1979)
p. 313-346
[also: Letters to Soulé and Beilinson in 1985]

- [6] E. D'Hoker - D.H. Phong: On determinants of Laplacians on Riemann surfaces. *Com. Math. Phys.* 104 (1986) 537-545.; *Nucl. Phys. B* 269 (1986) 225-234; Gilbert: *Nucl. Phys. B* 277 (1986) 102-124
[Fried: *Invent. Math.* 84 (1986) 523-540]
- [7] 加藤和也: 「代数的 K 理論」 *数学* 34 (1982) 97-115.
- [8] 久賀道郎: 「弱対称 H - ∞ 空間における位相解析とその応用」 *数学* 9 (1957/58) 166-185.
- [9] 黒川信重: Zeta functions of analytic rings via Euler products. *Proc. Japan Acad.* 62A (1986) 193-196
- [9a] —: On the meromorphy of Euler products (I), (II). *Proc. London Math. Soc.* 53 (1986) 1-47, 209-236.
- [9aa] —: On some Euler products (I), (II). *Proc. Japan Acad.* 60A (1984) 335-338, 365-368.
- [9b] —: String theories and prime number theories. *Proc. Japan Acad.* 62A (1986) 314-317.
- [9c] —: Special values of Euler products and Hardy-Littlewood constants. *Proc. Japan Acad.* 62A (1986) 25-28.
- [9d] —: On certain Euler products. *Acta Arithmetica* 48 (1986) 49-52.
- [9e] —: 「超弦理論と数論」 *素粒子論研究* 74-4, 1987年1月号 p. D24-D39.
- [9f] —: 「素粒子と素数」 *数理科学* No. 281, 1986年11月号 p. 64-69.

- [10] S. Lichtenbaum: Values of zeta functions, étale cohomology and algebraic K-theory. Springer Lecture Notes in Math. 342 (1973) 489-501.
- [10a] —: Values of zeta functions at non-negative values. Springer LNM 1068 (1984) 127-138
- [10b] —: The construction of weight two arithmetic cohomology (1986)
[Hawaii Conf. on K-Theory, Jan. 1987]
- [11] Ju. I. Manin: Quantum strings and algebraic curves. Talk at the ICM-86, Berkeley, Sec. 13.
[Beilinson-Manin: Com. M. Phys. 107 (1986) 354-376]
- [11a] A. Beilinson - Ju. I. Manin - V. A. Shechtman: handwritten manuscripts (1986). "Localization of the Virasoro and Neveu-Schwartz algebras." (Very Preliminary draft; Nov. 1986)
- [12] D. Ruelle: Invent. Math. 34 (1976) 231-242
Zeta functions for expanding maps and Anosov flows.
- [13] A. Selberg: Harmonic analysis and discontinuous subgroups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. J. Indian Math. Soc. 20 (1956) 47-87.
- [14] S. Smale: Differentiable dynamical systems. Bull. AMS 73 (1967) 747-817.
- [15] C. Soulé: K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale. Invent. Math. 55 (1979) 251-295

[15a] —: Régulateurs. Sémin. Bourbaki No. 644, 1985 Fev.
(Astérisque 133/134 (1986) p. 237-253)

[16] 砂田利一: 「幾何学における数論的方法について」
数学 38 (1986) 289-301.

[16a] —: L-functions in geometry and some applications.
Springer LNM 1201 (1986) 266-284.

[17] R. Thomason: Algebraic K-theory and étale cohomology, Ann. ENS. (Ser. 4) 13 (1985) 437-552.

[18] A. Voros: Spectral functions, special functions and the Selberg zeta function. Com. Math. Phys. 1987
(Saclay PhT 86-114; preprint) [Balazs-Voros: Phys. Rep. 143 (1986) 109-240]
[also: resume in Phys. Lett. 1986]

(special values)
[19] D. R. Grayson: Dilogarithm Computations for K_3 .
Springer LNM 854 (1981) 168-178

[虚数 2-2 倍のゼータ関数の $s=2$ での値の Lichtenbaum 予想の実例]

S. Bloch - D. Grayson: K_2 and L-functions of elliptic curves: computer calculations. Contemporary Math. 55-I (1986) 79-88

S. Bloch: Algebraic K-theory and zeta functions of elliptic curves. Proc. International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978) pp. 511-515, Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980

A.A. Beilinson: Higher regulators and values of L-functions of curves. *Functional Anal. Appl.* 14 (1980) no. 2. 116-118 [⇒ [1]]

S. Bloch: A note on height pairings, Tamagawa numbers, and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture. *Invent. Math.* 58 (1980) 65-76 [⇒ [32]]

Dinakar Ramakrishnan: A regulator for curves via the Heisenberg group. *Bull. AMS* 5 (1981) 191-195

—: Analogs of the Bloch-Wigner function for higher polylogarithms. *Contemp. Math.* 55-I (1986) 371-376

—: Higher regulators on quaternionic Shimura curves and values of L-functions. *Contemp. Math.* 55-I (1986) 377-388.

[also: Ramakrishnan: for Hilbert modular L-functions: *CR* 301 (1985) n° 18 p. 807; *Invent. Math.* 1987 (in press), etc.]

(string theories)

[20] V. P. Snaith: The K-theory of classifying spaces of Galois groups. *Contemp. Math.* 37 (1985) 145-148.

L. Alvarez-Gaumé and P. Nelson: Riemann surfaces and string theories. *CERN-TH. 4615/86*, December 1986 [40頁]

D. Quillen: *Funct. Anal. Appl.* 19 (1985) 31

J. Bismut and D. Freed: *Comm. Math. Phys.* 106 (1986) 159-179

D. Freed: *Com. Math. Phys.* 107 (1986) 483-513 ^{107 (1986) 103-163}

M. Green and D. Gross (eds): *Unified String Theories*
World Scientific, Singapore (1986)

Schwarz (ed.): *Superstrings (I)(II)*. World Scientific, Singapore (1985)

Moore - Harris - Nelson - Singer : Phys. Lett. 178B (1986) 167-173

Namazie - Narain - Sarmadi : Phys. Lett. 177B (1986) 329-334

[21] (arithmetic)

R. Langlands : Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Proc. Sympos. Pure Math. 33-2 (1979) 205-246.

Gelbart : Bull. AMS 10 (1984) 177-220

J. L. Brylinski and J. P. Labesse : Cohomologie d'intersection et fonctions L de certaines variétés de Shimura. Ann. Sci. ENS 17 (1984) 361-412

J. L. Brylinski : 1-motifs et formes automorphes. Publ. Math. Univ. Paris VII 15 (1983) 43-106 (Journées automorphes).

P. Deligne, J. Milne, A. Ogus, K. Y. Shih : Hodge cycles, Motives, and Shimura varieties. Springer LNM 900 (1982)

A. Borel - W. Casselman : Cohomologie d'intersection et L_2 -cohomologie de variétés arithmétiques de rang rationnel 2. C.R. Acad. Sci. Paris 301 (1985) 369-373

[Bull. AMS 3 (1980) 1025, Duke MJ. 50 (1983) 605, Am. J. M. 105 (1983) 309
SLNM 104 (1984) 103, Adv. Stud. Pure Math. 8 (1987)]

S. Zucker : L_2 -cohomology and intersection cohomology of locally symmetric varieties (II). Compos. Math. 59 (1986) 389-398.

A. Yu. Morozov and A. M. Perelomov : Vanishing of the vacuum energy for superstrings. JETP Lett. 44 No. 4. (Aug. 1986) 201-204.

E. Farhi and A. H. Guth : An obstacle to creating a universe in the laboratory. Phys. Lett. 183B (1987) 149-155