数理解析研究所講究録
第 624 巻 1987 年 33-45

A construction of 3-manifolds with involution

神戸大理 北村 雅子 (Masako kitamura)

§1 Introduction

Closed orientable 3-manifold M で orientation reversing involution τ (i.e. $\tau : M \to M$: orientation reversing homeo, τ^2=identity) をもつものを考えます。

このような多様体について. kawauchi[1] により. 次が証明されています。

Theorem 1. (kawauchi)

$H_1(M:\mathbb{Z})$ の torsion part はあるアーベル群 A の direct double $A \oplus A$, 又は $\mathbb{Z}_2$ と A 2つの直和 $\mathbb{Z}_2 \oplus A \oplus A$ に同型である。

又. 逆に. 上の性質をもつアーベル群 G (i.e. $\mathrm{Tor}G \cong A \oplus A$, or. $\mathbb{Z}_2 \oplus A \oplus A$) について. $H_1(M:\mathbb{Z}) \cong G$ となるような. ori. rev.

involution をもつ closed orientable 3-mfd が同論文で構成されています。その3-mfd を特にirreducibleなもので構成できるか、という問題については、

Theorem 2. (Kawauchi)

$H_1(M:\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus A \oplus A$. A : odd order ならば、Mは P^3 とある3-mfd との connected sum で表わせられる。

Theorem 3. (Kawauchi)

$\mathrm{Tor}\,G \cong A \oplus A$ であるような任意のアーベル群Gについて、$H_1(M:\mathbb{Z}) \cong G$ となるような、ori. rev. involution をもつ、closed irreducible orientable 3-mfd が存在する。

が知られています。そこで、本稿では Th 2・3 以外の、前述の性質をもつアーベル群Gに対して、$H_1(M:\mathbb{Z}) \cong G$ となるMを <u>irreducible</u> で構成します。

このようなGは次の２つに分類することができます。

Case 1. $\mathrm{Tor}\,G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus A \oplus A$ (possibly $A=0$), $G/\mathrm{Tor}\,G \neq 0$,

Case 2. $G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus A \oplus A$, A : even order

Mの構成もこの分類に従がって行ないます。

以下，S^3上の orientation reversing involution を

$$\begin{array}{ccccc} \tau: S^3 = \mathbb{R}^3 & \cup\{\infty\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \cup\{\infty\} = S^3 \\ \Psi & & & \Psi \\ (x,y,z) & & \longrightarrow & (-x,-y,-z) \\ \infty & & \longrightarrow & \infty \end{array}$$

で定義します。

§2 Case 1 のMの構成

Case 1 のアーベル群は，具体的に $G \cong \underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{s} \oplus \mathbb{Z}_2$
$\oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_r} \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_r}$ $(s \geqq 1,\ r \geqq 0,\ p_1, \cdots, p_r \in \mathbb{Z})$
の形に直和分解できます。

Step 1 $H_1(M:\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$ であるような M の構成。

まずS^3内に，Fig 1 のような graph T を，$(0,0,0) \in \mathbb{R}^3 \subset S^3$を含み，$\tau$-invariant であるように選びます。 $M_1 = \overline{S^3 - N(T)}$ ($N(T)$ は T の τ-invariant regular neighborhood) とすると，$\partial M_1 = F$ は genus 2 の orientable surface，そこで，F 上の involution

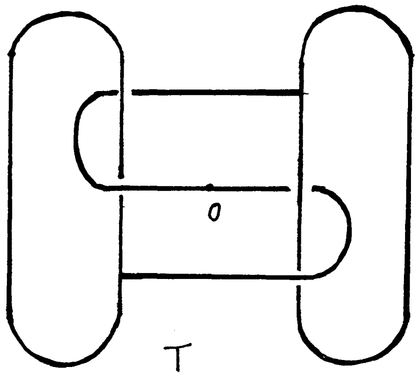


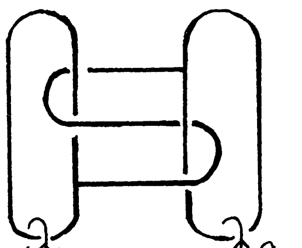
Fig. 1

$\tau' = \tau|_F$ を使って、$M_2 = F \times I / (x,1) \sim (\tau'(x),1)$ $(I = [0,1])$ とすると、M_2 は genus 3 の non-orientable surface 上の twisted I-bundle となり、$\tau'' : M_2 \to M_2$, $\tau''(x,t) = (\tau'(x),t)$ という involution をもっています。

$M = M_1 \cup_h M_2$, $h : \partial M_2 = F \times 0 \to \partial M_1 = F$: identity map とすると M は τ, τ'' から induce される ori. rev. involution をもっていますが、さらに、$H_1(M : \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, かつ M は irreducible であることが次のように確かめられます。

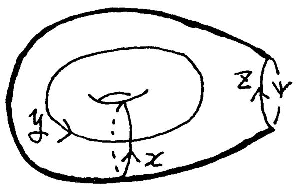
∘ $H_1(M : \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$

M_1, M_2, F の first homology を



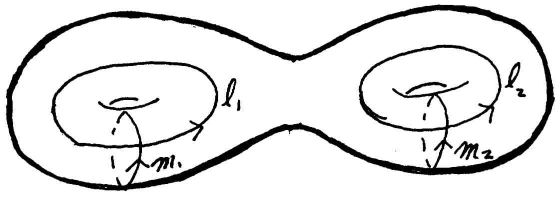
M_1

$H_1(M_1 : \mathbb{Z}) \cong \langle a_1, a_2 : \rangle$



$F \times \{1\}/\sim \; \subset M_2$

$H_1(M_2 : \mathbb{Z}) \cong \langle x, y, z : 2z = 0 \rangle$



$F = \partial M_1 = \partial M_2$

$H_1(F : \mathbb{Z}) \cong \langle m_1, m_2, l_1, l_2 : \rangle$

as abelian group presentation

と表わすと、inclusion induced map $i'_j : H_1(F:\mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(M_j:\mathbb{Z})$ $(j=1.2)$ によって、

$$i'_1(m_1)=a_1,\quad i'_1(m_2)=a_2,\quad i'_1(\ell_1)=0,\quad i'_1(\ell_2)=0,$$

$$i'_2(m_1)=x,\quad i'_2(m_2)=-x,\quad i'_2(\ell_1)=y,\quad i'_2(\ell_2)=y.$$

となります。従がって、

$$\begin{aligned} H_1(M:\mathbb{Z}) &\cong \langle a_1, a_2, x, y, z : 2z=0,\ a_1=x,\ a_2=-x,\ y=0 \rangle \\ &\cong \langle x, z : 2z=0 \rangle \\ &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 . \end{aligned}$$

◦ M が irreducible であること。

これを示すためには M_1, M_2 が共に irreducible かつ boundary-irreducible であることを示せば十分です。M_2 は closed surface 上の twisted I-bundle ですから明らかに irreducible かつ ∂-irreducible, M_1 は S^3 から connected graph をとり除いたものですから、Schönflies theorem より irreducible であることが示せます。

M_1 の ∂-irreducibility について。M_1 に properly embedded essential disk D が存在したとして、この D で M_1 を cut してみます。∂D が ∂M_1 上の essential loop であることに注意すると、$M-D$ は 1 or 2-component で、各 component は solid torus か knot exterior であることがわかります。M_1-D が 1-component なら、

M_1 は M_1-D に 1-handle をつけたもの。M_1-D が 2-component ならば M_1 はその2つの boundary sum ですから。いずれにせよ。M_1 の基本群は $\pi_1(M_1) \cong H_1 * H_2$ (free product), H_i は knot group. となるはずです。ところで。M_1 は S^3 から graph をとり除いたものですから。$\pi_1(M_1)$ の Alexander matrix が考えられますが〔2〕. 上の考察より。$\pi_1(M_1)$ の Alexander polynomial $\Delta(t)$ は. $\Delta(t^{-1}) = t^{\alpha}\Delta(t)$ (for some $\alpha \in \mathbb{Z}$) という性質を持たねばならないことがわかります。しかし。実際に $\pi_1(M)$ を計算し。その Alexander poly. を求めると。この性質をもっていないことがわかります。(詳しくは〔3〕参照) よって M_1 も ∂-irreducible です。

Step 2 $H_1(M:\mathbb{Z}) \cong \underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{s} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_r} \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_r}$ であるようなMの構成.

Kawauchi〔1〕とほぼ同様の構成を行ないます。

S^3 内に Fig. 2 のように $s+r$ 個の knots と graph T を. 次の性質をもつように選びます。

- $J, k_1, \cdots, k_{s-1}$ は τ - invariant.
- $J, k_1, \cdots, k_{s-1}, L_1, \cdots, L_r$ は τ の fixed points を含まない。
- T は step 1 と同じ.
- $T, J, k_1, \cdots, k_{s-1}, L_1, \cdots, L_r, \tau(L_1), \cdots, \tau(L_r)$ は mutually disjoint.

・$T, k_1, \cdots, k_{s-1}, L_1, \cdots, L_r$ は $S^3 - J$ で π_1-nontrivial.

・$k_1, \cdots, k_{s-1}, L_1, \cdots, L_r, \tau(L_1), \cdots, \tau(L_r)$ のどの2つも linking number 0。

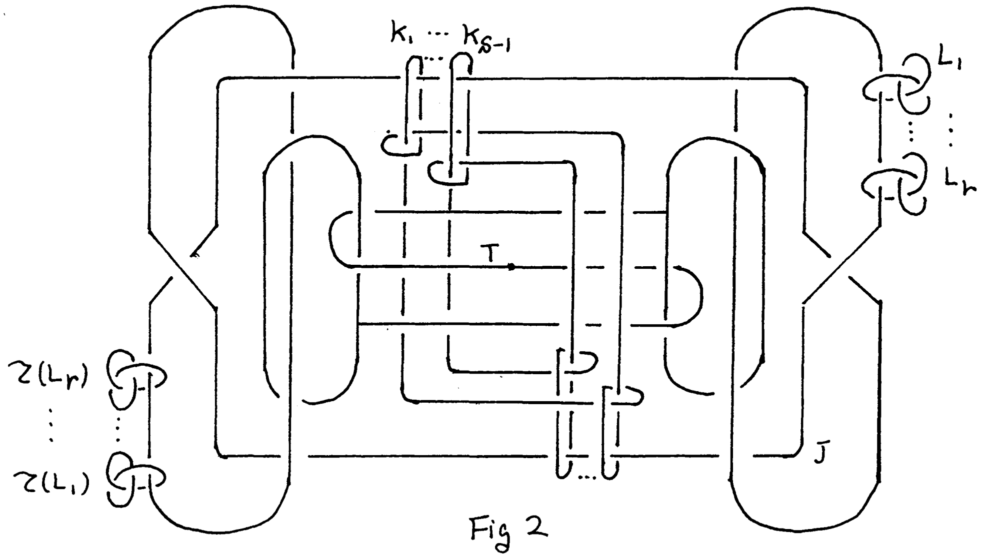


Fig 2

S^3からこのlinkとgraphのτ-invariant regular neighborhoodを除き、各boundary componentに次のように$2r+s+1$個のmfdをつけます。

・$\partial N(J) \longleftrightarrow \overline{S^3 - N(J')}$. J'はτのfixed pointsを含むτ-invariant non trivial knot. $\partial N(J)$のpreferred longitudeが$\partial N(J')$のmeridianとなるようにつける。

($\overline{S^3 - N(J)} \cup \overline{S^3 - N(J')}$ は π_1-infinite homology 3-sphere)

・$\partial N(k_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, s-1)$ $\longleftrightarrow \overline{S^3 - N(J'')}$. J''はτのfixed pointsを含まないτ-invariant nontrivial knot. $\partial N(k_i)$のpreferred longitudeが$\partial N(J'')$のpreferred longitudeとなるようにつける.

(この操作でhomologyの$\mathbb{Z}$ partが生じる.)

• $\partial N(L_i)$ $(i=1,\cdots,r)$ $\longleftrightarrow$ $\overline{S^3-N(L'_i)}$. L'_i は non trivial knot.

$\partial N(L_i)$ の preferred longitude が $\partial N(L'_i)$ 上の, L'_i と P_i 回 link する curve となるようにつける.

• $\partial N(\tau(L_i))$ $(i=1,\cdots,r)$ $\longleftrightarrow$ (a copy of) $\overline{S^3-N(L'_i)}$. attaching homeo が τ と可換になるようにつける.

（この操作で homology の $\mathbb{Z}_{P_i}\oplus\mathbb{Z}_{P_i}$ が生じる.）

• $\partial N(T)$ $\longleftrightarrow$ twisted I-bundle. Step 1 の要領で。

（この操作で homology の $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$ が生じる.）

$K_1,\cdots,K_{s-1}, L_1,\cdots,L_r$ の互いの linking number が 0 であることから, こうしてできた mfd M の first integral homology は求めるものであることがわかります. M の irreducibility は各 parts の irreducibility と ∂-irreducibility より導けます. Fig. 2 の link は上の性質をもっていればよいので, link type にはかなりの自由度があります。

§3 Case 2 の M の構成

Case 2 のアーベル群は具体的に $G\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_{2n}\oplus\mathbb{Z}_{2n}\oplus\mathbb{Z}_{P_1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{P_r}\oplus\mathbb{Z}_{P_1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{P_r}$ $(r\geq 0,\ n, P_1,\cdots,P_r\in\mathbb{Z})$ の形に直和分解できます。

Step 1　$H_1(M:\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n} \oplus \mathbb{Z}_{2n}$ であるような M の構成。

まず、genus 2 の handle body M_3 とその上の ori. rev. involution τ で fixed point set が 3 points からなるものを考えます。

(Fig.3 の 3つの 3-ball に antipodal map を考え、それを handles に拡張する。)

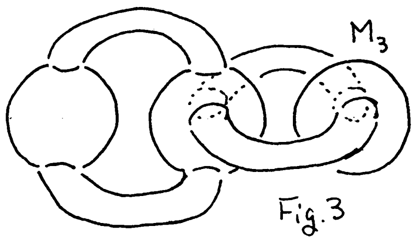


Fig.3

M_3 内に 2つの curves k_1, k_2 を Fig.4 のように、次の性質をもつよう選びます。

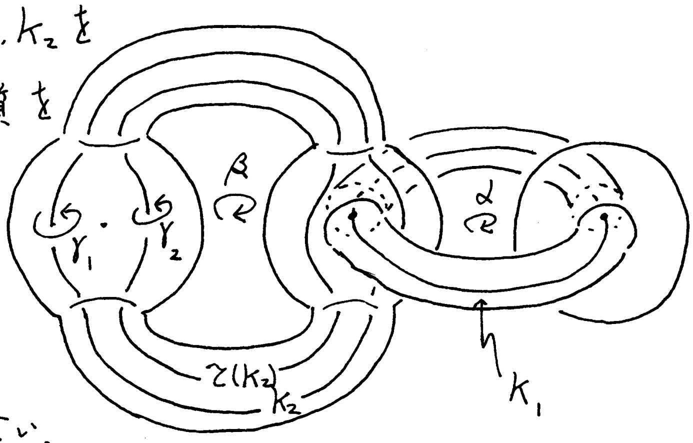


Fig. 4

- k_1 は τ-invariant、fixed points を 2点含む。
- k_2 は fixed points を含まない。
- $k_1, k_2, \tau(k_2)$ は muturlly disjoint.
- $[k_1] = \alpha \in H_1(M_3:\mathbb{Z})$ 、 $[k_2] = \beta \in H_1(M:\mathbb{Z})$

  (α, β は Fig.4 に示した $H_1(M:\mathbb{Z})$ の generators.)

M_3 から $k_1 \cup k_2 \cup \tau(k_2)$ の τ-invariant regular neighborhood をとり除き 3つの mfd を次のようにつけます。

・$\partial N(k_1) \longleftrightarrow \overline{S^3 - N(J'')}$. J'' は (S^3 の involution の) fixed points を含まない τ-invariant nontrivial knot. $\partial N(k_1)$ の preferred longitude が $\partial N(J'')$ の meridian となるように。

(この操作で homology は変わらないが、irreducibility に必要。)

・$\partial N(k_2) \longleftrightarrow \overline{S^3 - N(L)}$. L は nontrivial knot. $\partial N(L)$ の preferred longitude が $\partial N(k_2)$ 上の curve C s.t. $[C] = n\gamma_1 + \beta$
$\in H_1(\overline{M_3 - N(k_2 \cup \tau(k_2))} : \mathbb{Z})$ となるように。

・$\partial N(\tau(k_2)) \longleftrightarrow$ (a copy of) $\overline{S^3 - N(L)}$. $\partial N(L)$ の preferred longitude が $\partial N(\tau(k_2))$ 上の curve C' s.t. $[C'] = n\gamma_2 - \beta$
$\in H_1(\overline{M_3 - N(k_2 \cup \tau(k_2))} : \mathbb{Z})$ となるように。

(γ_1, γ_2 は、k_2, $\tau(k_2)$ を M_3 から除いたことで生じる homology generators. Fig 4 参照.)

こうしてできた mfd を M_4 とすると、M_4 は ori. rev. involution をもち、$H_1(M_4 : \mathbb{Z}) \cong \langle \alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2 : n\gamma_1 + \beta = 0,\ n\gamma_2 - \beta = 0 \rangle$ となっています。

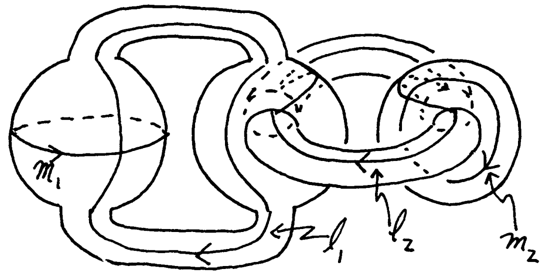
$F = \partial M_4$ は genus 2 の orientable surface で involution $\tau' = \tau|_F$ をもっています。$M_5 = F \times I / (x,1) \sim (\tau'(x),1)$ とし、$M = M_4 \cup_h M_5$,
$h : \partial M_5 = F \times 0 \longrightarrow \partial M_4 = F$: identity map. とすると、M は ori. rev. involution をもつ closed orientable mfd になっていますが、さらに、$H_1(M : \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n} \oplus \mathbb{Z}_{2n}$, M : irreducible であることが、次のよう

に確かめられます.

・$H_1(M:\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n} \oplus \mathbb{Z}_{2n}$

M_5, F の first homology を

$F\times\{1\}/\sim \subset M_5$



$F = \partial M_4 = \partial M_5$

$H_1(M_5:\mathbb{Z}) \cong \langle x, y, z : 2x+2y+2z=0 \rangle$ $H_1(F:\mathbb{Z}) \cong \langle m_1, m_2, l_1, l_2 : \quad \rangle$.

と表すと inclusion induced map $i_j : H_1(F:\mathbb{Z}) \to H_1(M_j:\mathbb{Z})$ $(j=4,5)$ によって

$i_1(m_1) = \gamma_1 + \gamma_2$, $i_1(m_2) = 0$, $i_1(l_1) = \beta$, $i_1(l_2) = \alpha$.

$i_2(m_1) = 2x$, $i_2(m_2) = 2z$, $i_2(l_1) = x+y+2z$, $i_2(l_2) = 2x+y+z$.

となります. 従がって.

$$
\begin{aligned}
H_1(M:\mathbb{Z}) &\cong \langle \alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, x, y, z : \\
&\qquad n\gamma_1 + \beta = 0,\ n\gamma_2 - \beta = 0,\ 2x+2y+2z=0, \\
&\qquad \gamma_1+\gamma_2 = 2x,\ 2z=0,\ \beta = x+y+2z,\ \alpha = 2x+y+z \rangle \\
&\cong \langle \gamma_2, x, z : 2n\gamma_2 = 0,\ 2nx=0,\ 2z=0 \rangle \\
&\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n} \oplus \mathbb{Z}_{2n}.
\end{aligned}
$$

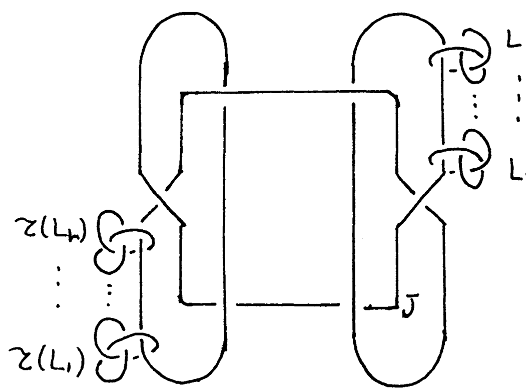
・M が irreducible であること.

§1 と同様, M の各 part の irreducibility と ∂-irreducibility を示せ

ばよいのですが、non trivial knot exterior はその性質をもっていますから、問題となるのは $\overline{M_3 - N(k_1 \cup k_2 \cup \tau(k_2))}$ についてのみです。まず、M_3 (handlebody) が irreducible であることから、もしこの mfd 内に essential 2-sphere があるとすればその内部に、k_1, k_2 又は $\tau(k_2)$ が含まれることになり、curves の選び方に矛盾。よって irreducible。∂-irreducibility についても、もし essential disk が存在したとすると、同様にして矛盾が導けます。
(詳しくは[3]参照)

Step 2. $H_1(M:\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n} \oplus \mathbb{Z}_{2n} \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_r} \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_r}$ であるような M の構成。

まず $\mathbb{Z}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_r} \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_r}$ のための mfd を用意します。§1. Step 2 の J, $L_1, \cdots, L_r$ を考え $L_1, \cdots, L_r, \tau(L_1), \cdots, \tau(L_r)$ に §1. Step 2 と同様の操作をすることで、これが得られます。



Step 1. で作った mfd では、
$M \supset M_3' \supset \partial N(k_1)$ に non trivial knot exterior $S^3 - N(J'')$ をつけまし

たが、そのかわりに上で作ったmfdを∂N(k_1)のpreferred longitudeが∂N(J)のmeridianになるようにつけると、できたmfd Mは求めるhomologyをもち、irreducibleであって、ori.rev.involutionをもつことがわかります。

最後に、

本稿で構成したmfdsのfixed point setのうち2-dimensional componentは、いずれもgenus 3のnon orientable surfaceになっていますが、ほぼ同様の構成法によって、surfaceのgenusやcomponent数を増やすことができます。ただし、そのgenus数の総和には、Mのfirst integral homology groupの影響による制限があるようです。

尚、本稿の問題は河内先生にいただいたものです。多くの助言をいただいた作間先生、中西先生に感謝いたします。

References

〔1〕 A. Kawauchi, On 3-manifolds admitting orientation-reversing involutions, J. Math. Soc. Japan, 33 (1981), 571-589.

〔2〕 S. Suzuki, Alexandar ideals of graphs in the 3-sphere, Tokyo J. Math 7 (1984), 233-247.

〔3〕 M. Kitamura, A construction of certain 3-manifolds with orientation reversing involution, preprint.