

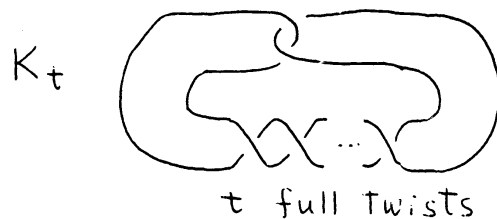
Doubly twisted knot の "sliceness" の決定

東大教養 山田明雄 (Akio Yamada)

東大 理 松本幸夫 (Yukio Matsumoto)

§ 1. 主な結果

1975年のプレプリント (§ 3 を見よ) の中で A. Casson と C. McA. Gordon は Casson-Gordon 不変量とよばれる強力な不変量を導入して, knot の sliceness を研究した. とくに 2-bridge knot について, その不変量を計算するアルゴリズムを見出し, 特殊な場合, すなわち Twist knot とよばれる knot K_t ($t \in \mathbb{Z}$) がいつ slice になるか (ie. B^4 の中で smooth な円板をはるか) を決定した.

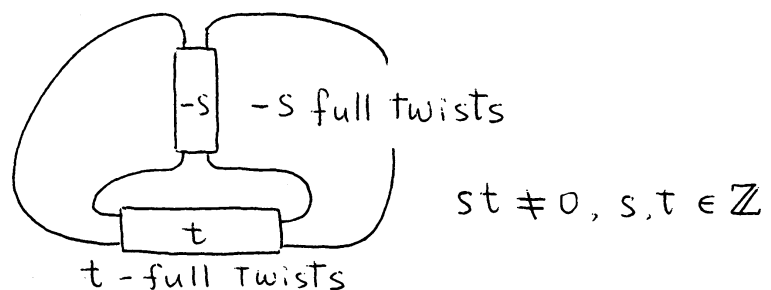


彼等によれば, Twist knot K_t が slice になるための必

要十分条件は, $t=0$ または 2 である. (なお K_t が, "代数的に slice" となるのは, $4t+1=l^2$ という整数 l があるときである.ここに, knot K が 代数的に slice であるとは, K の Seifert form が階数が半分の部分空間で消えていることである.)

さて, knot が個別に与えられる毎に, ある不変量を計算するアルゴリズムが存在することと, 一連の knot の系列について, その不変量がどのようなふるまいをするのかを理論的に示すこととは, 全く別のことである. 実際, 2-bridge knot の Casson-Gordon 不変量を個々に計算するアルゴリズムが存在しても, 2-bridge knot の無限の系列について Casson-Gordon 不変量を計算することは, 上述の twist knot についてしかなされていないように思われる.

ここでは, Casson-Gordon の計算を続行することによって, Doubly twisted knot の sliceness を決定しよう. ただし, Doubly twisted knot とは, 下図のような knot のことである.



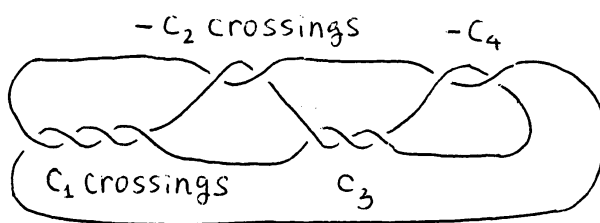
定理 1. 前頁下の Doubly twisted knot が slice のための必要十分条件は $|s-t|=1$ である。($s=1$ の場合が CASSON-GORDON の twist knot に関する結果と考えられる。)

良く知られているように (H. Schubert, Math. Zeit. 65. 1956) 正の有理数 $\frac{q}{p}$ ($q < p$) が与えられると次のように 2-bridge knot がきまる。すなわち

$$\frac{q}{p} = \frac{1}{c_1 + \frac{1}{c_2 + \dots + \frac{1}{c_\nu}}} \quad (c_i > 0)$$

$$=: [c_1, c_2, \dots, c_\nu] \quad (\text{記号})$$

と連分数展開して, (たとえば $\nu=4$ の時) 下図のような knot を考えるのである。



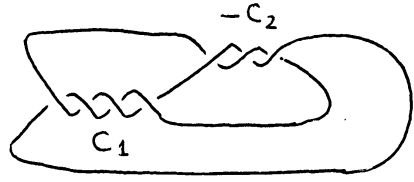
連分数展開 $[c_1, c_2, \dots, c_n]$ に対応する knot を

$$K_{c_1, c_2, \dots, c_n}$$


と書き, 長さ n の 2-bridge knot とよぶことにしよう. すると, 定理 1 は長さ 2 の 2-bridge knot の sliceness の決定へと拡張することができる.

$$K_{c_1, c_2} := \text{Diagram} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$$

以下 c_1, c_2 はマイナスでもよいとする.



定理 2. c_1, c_2 が同符号のとき, K_{c_1, c_2} について次は同値.

- ① $|c_1 - c_2| = 2$
- ② c_1, c_2 はともに偶数で $|\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2}| = 1$
- ③ K_{c_1, c_2} は ribbon knot である. (i.e. S^3 の中で,  という "ribbon singularity" しかもたない円板を挿入する.)
- ④ K_{c_1, c_2} は slice knot である.

定理 2 において, $c_1 = 2t, c_2 = 2s$ とおけば, 定理 1 の t と s が同符号の場合が得られる. 以下定理 2 の証明をする.

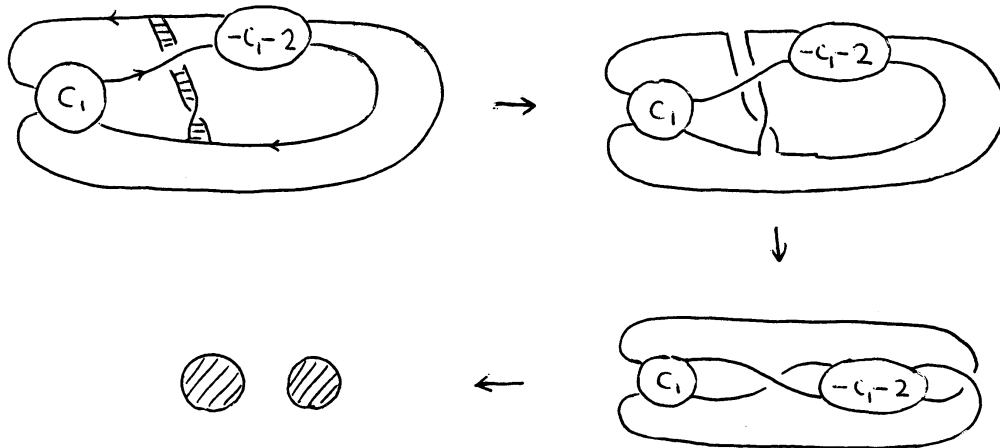
§2. 定理2の証明 (① ⇒ ② ⇒ ③ ⇒ ④ の部分)

① ⇒ ②を証明しよう。仮に, C_1, C_2 とともに奇数なら, K_{C_1, C_2} は2つの成分からなる link になってしまうので, C_1, C_2 はともに偶数としてよい。これで②が言えた。

② ⇒ ③を示そう。次の補題に注意する。証明は容易である。

補題. $K_{C_1, C_2} = -K_{C_2, C_1} = K_{-C_2, -C_1}$. ($-K$ は K の鏡映)

この補題により, $C_2 > C_1$ としてよい。そこで $C_2 = C_1 + 2$ とする。 C_1, C_2 はともに偶数と仮定した。 K_{C_1, C_2} に下図のように band をつける。



上図の矢印を時間軸と解釈すると, 円周の動いた軌跡として B^4 中の円板が与えられる。しかもこの円板には“極大点”がないので, K_{C_1, C_2} は ribbon knot である。よって② ⇒ ③

にあたる事実はすでに Fox が証明している。(R.H. Fox, A Quick Trip Through Knot Theory, Topology of 3-manifolds and Related Topics, Proceedings of the 1961 Topology Institute, Ed. by M.K. Fort, Jr. の例 15.)

③ \Rightarrow ④ は良く知られている。

§ 3. 定理 2 の証明 (④ \Rightarrow ① の部分)

定理 2 の ④ \Rightarrow ① を証明するには, 2-bridge knot について知られている幾つかの事実を用いるので, まずそれらを書き出しておこう。

以下しばらくの間, $K = K_{c_1, \dots, c_\nu}$ とする, すなわち K は有理数 $\frac{\xi}{p} = [c_1, \dots, c_\nu]$ に対応する 2-bridge knot であるとする. p と ξ は互に素としておく。

このとき

K : slice $\Rightarrow p$ は平方数

ということが知られている. 2-bridge knot K が代数的に slice であるならば, p は平方数となる (§1 を参照).

このような K に対して $l := \sqrt{p}$ と書くことにする.

我々の関心は「代数的に slice である K が slice となるのは, どのような場合か」という点にあるから, 以下では p が平方数となる K に限定して話を進める。

我々が用いる最も重要な事実は、CASSON-GORDON による次の結果である。

K : slice

m : l の素冪因数

χ : 位数 (order) m を持つ指標 (character)

すなわち $\chi: H_1(L_{p,\varepsilon}) \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid z^m = 1\}$ 準同型写像

($L_{p,\varepsilon}$ はレンズ空間で、 K の二重分岐被覆空間になっている。)

$\Rightarrow |\sigma(K, \chi)| \leq 1$

ここで $\sigma(K, \chi)$ は CASSON-GORDON の導入した不変量である。

この結果は

Cobordism of classical knots (1975)

というプレプリントに述べられているが、次の書物にも再録されている:

A la Recherche de la Topologie Perdue (失われたトポロジーを求めて), L. GUILLOU - A. MARIN 編,

Birkhäuser, 1986.

ついでながら、この論文集は 1984 年に亡くなった V. A. ROHLIN (РОХЛИН) に捧げられたもので、冒頭に

ROHLIN の略伝と論文リストがあり,

第 I 部 Du côté de chez Rohlin

第 II 部 Le côté de Casson

の二部から成る. CASSON-GORDON の上記の論文は 第 II 部の p.181~197 に収録されている.

[参考] Marcel PROUST, A la Recherche du Temps Perdu
(失われた時を求めて), 全 7 篇, 1913~27.

第 I 篇 Du côté de chez Swann (スワン家の^{ほう}の方へ)

第 III 篇 Le côté de Guermantes (ゲルマントの方)

さて, 上述の結果は重要であるが, 代数的に slice であるような K が具体的に与えられたとき, 指標 χ をうまく見つけて, しかも $\sigma(K, \chi)$ を求めたのち $|\sigma(K, \chi)| > 1$ ならば「 K は slice でない」と初めて判定できるということになるので, これだけでは 直ちに計算にとりかかって slice-ness が判定できるという形になっていない.

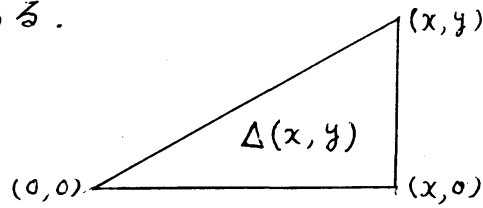
この点に対しても CASSON-GORDON は上記の論文の中で解答を与えている. すなわち, 指標 χ で位数が m となるものをうまく見つけて

$$\sigma(K, \chi^{er}) = 4 \left\{ \text{area } \Delta(nr, \frac{er}{m}) - \text{int } \Delta(nr, \frac{er}{m}) \right\} \\ (0 < r < m)$$

と書くことができる, というのである.

ここで $n := \frac{p}{m}$ であり,

$\Delta(x, y)$ は $(0, 0), (x, 0), (x, y)$ を



頂点とする三角形を表わし,

$\text{area } \Delta(x, y)$ は その面積を, $\text{int } \Delta(x, y)$ は $\Delta(x, y)$ 内の

格子点 (integer point. x 座標も y 座標も共に整数である

ような点) の個数を それぞれ表わす。但し, 辺の上の格子

点は $\frac{1}{2}$ の重みをかけて数え, 頂点が格子点となる場合には

$\frac{1}{4}$ の重みをつけるが, 原点は勘定に入れない。

x^{gr} も位数が m の指標であるから, この結果と前述の結果とを組み合わせると

K : slice

m : l の素冪因数

$$\Rightarrow 4 \left| \text{area } \Delta(nr, \frac{gr}{m}) - \text{int } \Delta(nr, \frac{gr}{m}) \right| \leq 1 \quad (0 < r < m)$$

ということになる。従って,

$$\delta(c_1, \dots, c_\nu; m, r) := 4 \left\{ \text{area } \Delta(nr, \frac{gr}{m}) - \text{int } \Delta(nr, \frac{gr}{m}) \right\}$$

なる函数の値を計算した結果, もし $|\delta(c_1, \dots, c_\nu; m, r)| > 1$

なることが判明した場合には, 「 K は slice でない」と言える

ことになる。 c_1, \dots, c_ν と m, r が具体的な整数値として

与えられれば, $\delta(c_1, \dots, c_\nu; m, r)$ の値が実際に「計算できる」

という点が重要である。

CASSON-GORDON も上記の1975年の論文の中で、
 “a Hewlett-Packard calculator” を用いてこの不変
 量を計算したと述べている。格子点の個数を数えるために
 当然プログラムを組んだはずであるから、使用機種は世界
 で最初のプログラム電卓 HP-65 (逆ポーランド記法に基づく)
 であったと推定される。

我々も遅れ馳せながら Hewlett-Packard 社のもっと新し
 いプログラム電卓など高々携帯型の物を用いて δ の計算
 を行なってみたところ、 δ は非常に微妙なふるまいをする
 関数であることが分かった。その例を少し挙げてみると、

$\delta(24, 12; 17, r)$ の値は $r=1, 2, \dots, 8$ に対して順に

$$-9 \quad -9 \quad -1 \quad -3 \quad -7 \quad -3 \quad 3 \quad -5$$

となる。 $r=9, \dots, 16$ に対しては $\delta(24, 12; 17, 17-r)$ と

等しくなる。また、 c_1 と c_2 を入れかえた $\delta(12, 24; 17, r)$

の値は $r=1, \dots, 8$ に対して順に

$$-3 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 9 \quad 5 \quad 9 \quad 7$$

となり、 $-\delta(24, 12; 17, r)$ ($1 \leq r \leq 8$) に置換を施し
 たものになっているらしいことが観察される。

そこで、 δ の定義に立ち返ってその意味を考えてみ
 よう。まず、直角三角形 $\Delta(nr, \frac{2r}{m})$ の斜辺の傾きは

的な性質によって定まる微妙な量であることが諒解される。

それでは、 δ の性質を解析する作業にとりかかろう。まず三角形の面積の方については

$$\text{area } \Delta(nr, \frac{gr}{m}) = \frac{ng^2r^2}{2m} = \frac{pg^2r^2}{2m^2}$$

であり、 m^2 は $p(=l^2)$ の約数であるから、 $4 \text{ area } \Delta(nr, \frac{gr}{m})$ は偶数である。一方、 $\text{int } \Delta(nr, \frac{gr}{m})$ の定義において、三角形の内部にある格子点は重み1で数えられ、辺上の格子点は重み $\frac{1}{2}$ で数えられるから、4倍されたとき共に偶数となる。そして頂点 $(nr, 0)$ のみが重み $\frac{1}{4}$ で数えられるから、4倍されて1となる。従って $4 \text{ int } \Delta(nr, \frac{gr}{m})$ は奇数である。故に $\delta(c_1, \dots, c_n; m, r)$ は奇数である(従って $\delta \neq 0$ であることに注意。前掲の例を参照)。

次に

$$\text{int } \Delta(nr, \frac{gr}{m}) = \sum_{x=1}^{nr-1} \left\lfloor \frac{gx}{p} \right\rfloor + \frac{nr-1}{2} + \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{gr}{m} \right\rfloor + \frac{1}{4}$$

と書き表わしてみる。ここで

$$\lfloor u \rfloor := \max \{ v \in \mathbb{Z} \mid v \leq u \}$$

である。 $\lfloor u \rfloor$ は、伝統的にガウス記号 $[u]$ で表わされていたものにほかならないが、

$$\lceil u \rceil := \min \{ v \in \mathbb{Z} \mid v \geq u \}$$

と同程度に重要であることから、K.E. IVERSONが導入した記号である。 $\lfloor u \rfloor$ は床^か函数(floor function)、 $\lceil u \rceil$ は天井^か函

数 (ceiling function) と呼ばれ, 組み合わせ論や計算機数学で次第に多く使われるようになって来ており, $\lfloor u \rfloor$ と $\lceil u \rceil$ の両方を組み込み関数として備えている計算機も出ている.

[参照] D. E. KNUTH, *The Art of Computer Programming* ;

PÓLYA - TARJAN - WOODS, *Notes on Introductory Combinatorics*.

がウス記号と違って, 一まとまりの式をくくる大括弧 $[]$ と混同するおそれがないのも $\lfloor u \rfloor$ という記号の長所である.

さて, CASSON - GORDON の論文には, $\text{int } \Delta(nr, \frac{r}{m})$ を上記の如く表わした式は書かれていないが, 途中の式変形の過程から, 彼等は上記の式で計算を実行したと推定される. 我々も doubly twisted knot すなわち $L=2$ の場合について, 当初は上記の式をプログラムに組んで計算した. その際に, 式の形からも分かるように nr が大きくなるにつれて次第に計算時間がかかるようになるので, 何とか早く計算できる方法はないものかということ考えた. 一組の (c_1, c_2) に対し, $p = c_1 c_2 + 1$ の平方根 l の素因数 m は, l が合成数なら複数個あり, その m の一つ一つに対して, $r=1$ から $r=m-1$ までの計算を繰り返すのだから, なおさら計算時間を短縮する必要に迫られたわけである.

我々は, $c_1, c_2 > 0$ なる大量の (c_1, c_2) の組について

$\delta(c_1, c_2; m, r)$ を計算したのであるが, このとき $\delta = c_2$ は

p よりも小さい。前述の式では、三角形内部の格子点の個数を求めるときに x 座標が同じものをまとめて数えたのちに $x=1, 2, \dots, nr-1$ について それらを加えているが、斜辺の傾き $\frac{r}{p}$ が 1 より小さいとすれば、 y 座標が同じである格子点の個数を求めてから y について和をとった方が良いのではないかということに気が付いた。すなわち

$$\sum_{x=1}^{nr-1} \left\lfloor \frac{rx}{p} \right\rfloor = \sum_{y=1}^{\left\lfloor \frac{r}{m} \right\rfloor} \left(nr-1 - \left\lfloor \frac{py}{r} \right\rfloor \right) = (nr-1) \left\lfloor \frac{r}{m} \right\rfloor - \sum_{y=1}^{\left\lfloor \frac{r}{m} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{py}{r} \right\rfloor$$

と変形した方が早く計算できる。例えば $c_1 = 10$ のとき約 $\frac{1}{10}$ の計算時間で済むということになる。

このように書きかえた式でしばらくの間は計算していたが、

よく考えてみると $\frac{py}{r} = \frac{(c_1 c_2 + 1)y}{c_2} = c_1 y + \frac{y}{c_2}$ であり、

$1 \leq y \leq \frac{r}{m} < r = c_2$ であるから 実は $\left\lfloor \frac{py}{r} \right\rfloor = c_1 y$ である。従って

$$\sum_{x=1}^{nr-1} \left\lfloor \frac{rx}{p} \right\rfloor = (nr-1) \left\lfloor \frac{r}{m} \right\rfloor - \frac{c_1}{2} \left\lfloor \frac{r}{m} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{r}{m} \right\rfloor + 1 \right)$$

という具合に和が求まってしまう。故に

$$\begin{aligned} \gamma(c_1, c_2; m, r) &= \frac{2(c_1 c_2 + 1)c_2 r^2}{m^2} - \left\{ \frac{2(c_1 c_2 + 1)r}{m} - 1 \right\} \left(2 \left\lfloor \frac{c_2 r}{m} \right\rfloor + 1 \right) \\ &\quad + 2c_1 \left\lfloor \frac{c_2 r}{m} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{c_2 r}{m} \right\rfloor + 1 \right) \end{aligned}$$

という公式を得る。これにより 計算時間が劇的に短縮され

るという量的な利点が得られたばかりでなく、 δ の性質を
 解明するための質的な進展も得られたのである。

以上で準備が整ったので、いよいよ ④ \Rightarrow ① の証明
 にとりかかる。すなわち、 c_1 と c_2 が同符号のときに、
 $K_{c_1, c_2} : \text{slice} \Rightarrow |c_1 - c_2| = 2$ を示す。

まず、§2 で述べた knot の鏡映に関する補題により、
 $c_1 > 0$ かつ $c_2 > 0$ としてよく、更に $c_2 \geq c_1$ としてよい。
 このとき

$$c_2^2 \geq c_1 c_2 = l^2 - 1 > (l-1)^2 \quad (\because c_1 c_2 > 0 \text{ より } l > 1)$$

となるので $c_2 > l-1$ である。 $c_2 = l$ ならば

$$l(l-c_1) = 1 \text{ より } l=1 \text{ になってしまうから 結局}$$

$$c_2 \geq l+1$$

となる。従って

$$c_1 \leq l-1$$

ということになり、

$$c_2 - c_1 \geq 2$$

を得る。故に、 m を l の素冪因数とするとき、次の
 ことさえ示せば ④ \Rightarrow ① の証明は終る。

$$c_2 - c_1 > 2 \Rightarrow \delta(c_1, c_2; m, \frac{m-1}{2}) > 1$$

実は、 l の任意の因数 $m (\geq 3)$ に対して、この命題は真である (l は奇数だから m も奇数であることに注意)。これを証明しよう。前に得た公式に $r = \frac{m-1}{2}$ を代入して

$$\begin{aligned} \delta(c_1, c_2; m, \frac{m-1}{2}) &= \frac{(c_1 c_2 + 1) c_2 (m-1)^2}{2m^2} - \frac{c_1 c_2 (m-1) - 1}{m} \left\{ 2 \left\lfloor \frac{c_2 (m-1)}{2m} \right\rfloor + 1 \right\} \\ &\quad + 2c_1 \left\lfloor \frac{c_2 (m-1)}{2m} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{c_2 (m-1)}{2m} \right\rfloor + 1 \right) \end{aligned}$$

なる式を得る。ここで、 $c_2(m-1)$ を $2m$ で割った余りを a と書けば

$$\delta(c_1, c_2; m, \frac{m-1}{2}) = \frac{c_1 a^2 - 2(c_1 m + 1)a + c_2(m^2 - 1) + 2m}{2m^2}$$

となる。これを a の二次函数とみたときの軸の位置は

$$\frac{c_1 m + 1}{c_1} = m + \frac{1}{c_1}$$

である。 a^2 の係数は正だから、 δ の値を下から評価するためには、軸に最も近い a の整数値を考えてやればよいが、 $a = m$ とはならない。なぜなら、 $c_2 (= 2)$ は m と互に素だからである。従って $a = m+1$ における値を考えれば

$$\delta(c_1, c_2; m, \frac{m-1}{2}) \geq \frac{(c_2 - c_1)(m^2 - 1) - 2}{2m^2} \geq \frac{3(m^2 - 1) - 2}{2m^2} > 1 \quad (\because m \geq 3)$$

という δ の値を下から評価する式が得られて、証明が完成する。

§ 4. C_1 と C_2 が異符号の場合

この場合には, 次の結果が得られる.

定理 3. C_1 と C_2 が異符号のとき, $K_{C_1 C_2}$ について

次の ①, ②, ③ は同値である.

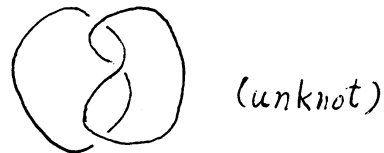
① $(C_1, C_2) \in \{ (1, -2), (-1, 2), (2, -1), (-2, 1), (5, -2), (-5, 2), (2, -5), (-2, 5) \}$

② $K_{C_1 C_2}$ は ribbon knot である.

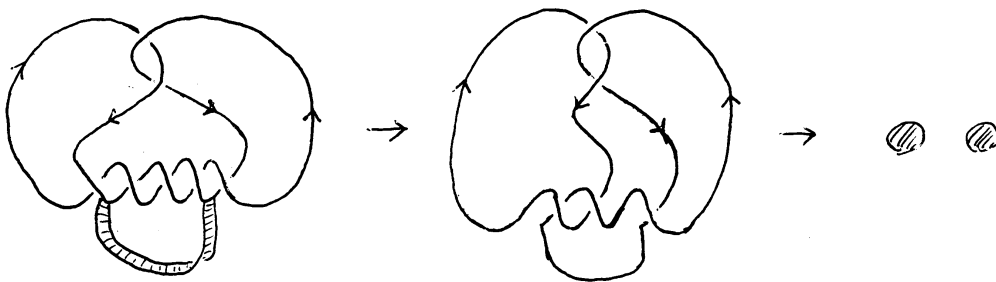
③ $K_{C_1 C_2}$ は slice knot である.

以下, 定理 3 の証明を概略のみ示す.

(① \Rightarrow ②) $C_1 = 1, C_2 = -2$ のとき



$C_1 = 5, C_2 = -2$ のとき



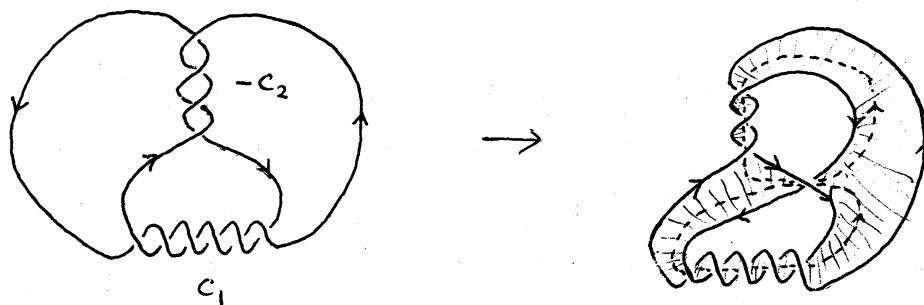
(③ \Rightarrow ①) C_1, C_2 の少なくとも一方は偶数であり,

$K_{C_2 C_1} = -K_{C_1 C_2}$ だから, C_2 は偶数であるとして一般性を失わない.

また, $K_{-C_1, -C_2} = -K_{C_1 C_2}$ であるから, $C_1 > 0,$

$c_2 < 0$ としてよい.

このとき, 仮に c_1 が偶数であるとすると,



図の点線で示した基底に関する Seifert 行列は

$$A = \begin{pmatrix} \frac{c_1}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{c_2}{2} \end{pmatrix}$$

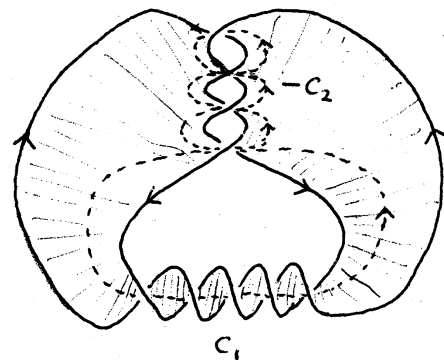
となり,

$$[\text{村杉 signature}] := \text{sign}(A + A^T) = 2$$

を得る. K_{c_1, c_2} が slice ならば, その [村杉 signature] は 0 となるはずである (K. MURASUGI, Trans. AMS 117 (1965)).
従って, K_{c_1, c_2} が slice である今, c_1 は奇数であることが分かる. そこで, 図のようにして Seifert 行列を求めると

$(-c_2) \times (-c_2)$ の行列

$$\begin{pmatrix} \frac{c_1-1}{2} & 0 & 0 & & \\ 1 & -1 & 0 & & \\ 0 & 1 & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$



が得られ

$$[\text{村杉 signature}] = 2 + c_2$$

となる. K_{c_1, c_2} は slice であると仮定しているから, 結局

$$c_2 = -2 \text{ である. ところが}$$

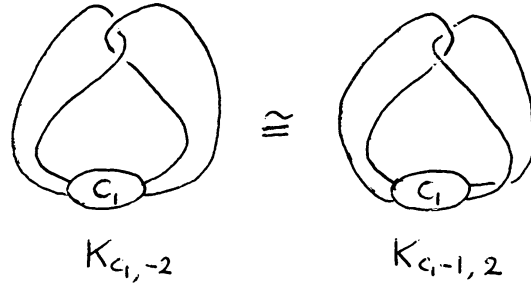
右図に示すごとく

$$K_{c_1, -2} \cong K_{c_1-1, 2}$$

であるから, §1 で述べた

CASSON-GORDON の結果に

より, $c_1 - 1 = 0$ または 4 すなわち $c_1 = 1$ または 5 を得る.



§5. 結び

定理2と定理3により, K_{c_1, c_2} ($c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$) が slice となるすべての場合が決定される. $c_1 = 0$ または $c_2 = 0$ ならば K_{c_1, c_2} は unknot であることに注意して最終的にまとめると, 次のようになる.

K_{c_1, c_2} が slice になるための必要十分条件は, 次の (i) または (ii) または (iii) が成立することである.

(i) $c_1 = 0$ または $c_2 = 0$

(ii) c_1, c_2 は共に偶数で $|c_1 - c_2| = 2$

(iii) $(c_1, c_2) \in \{(1, -2), (-1, 2), (2, -1), (-2, 1), (5, -2), (-5, 2), (2, -5), (-2, 5)\}$.

従って、定理 1 も δ と ϵ が異符号の場合まで含めて示されたことになる。

δ の値を大量に計算することによって、 $c_1 > 0$ かつ $c_2 > 0$ のときに

$$|c_1 - c_2| = 2 \iff |\delta(c_1, c_2; m, r)| = 1 \quad (0 < r < m)$$

が成立するであろうという予想の正しさに確信を持つに至ったのみならず、証明の鍵となった

「 $r = \frac{m-1}{2}$ における値に着目する」

という発想も、計算したデータの解析を通して得られたものである。また、 Σ を使わずに $\delta(c_1, c_2; m, r)$ を表わす公式も、計算機による計算時間を短縮する必要から発見されたものであると言える。

現在のところ、2-bridge knot に関しては、CASSON-GORDON の不変量よりも分解能の優れた不変量は発見されていないのだから、 δ の性質を調べることにより判明する種類の事柄はすべて調べつくすことが大切であり、そのために計算機は有効な手段を提供するであろう。

(§ 1, 2 松 本)
 § 3, 4, 5 山 田)