

E-cycle 付き DS-diagram の変形

神戸大 教養 池田裕司 (Hiroshi Ikeda)

東洋大 工 山下正勝 (Masakatsu Yamashita)

2次元球面 S^2 上に描かれた connected 3-regular graph について考える. このグラフの頂点, 辺, 面に,

- (0) 頂点は 4 点ずつ同じラベルがついている,
- (1) 辺は 3 本ずつ同じラベルがついている,
- (2) 面は 2 枚ずつ同じラベルがついている

ようにラベルがついているものを **DS-diagram** という. DS-diagram の頂点, 辺, 面に対してそのラベルを [] であらわす. たとえば, 辺 ε に付いたラベルは $[\varepsilon]$ である.

DS-diagram 上の辺を次々につないで得られる loop (= simple closed curve) は S^2 を 2 つの半球 S^+ と S^- に分ける. いまそのような loop を $E = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$

とする. すなわち, 各 ε_i は DS-diagram 上の辺であり, $S^2 = \dot{S}^+ \cup \dot{S}^-$, $S^+ \cap S^- = E$ である. E が DS-diagram の **E-cycle** であるとは

- (1) $i \neq j$ ならば $[\varepsilon_i] \neq [\varepsilon_j]$,
 - (2) S^* ($\# = +, -$) 上の 2 つの面 α, β に対して, $\alpha \neq \beta$ ならば $[\alpha] \neq [\beta]$
- が成り立つことである.

E-cycle 付き DS-diagram については

[1] Ikeda, H., DS-diagrams with E-cycles, Kobe J. Math., 3(1986), 103-112. で詳しく論じてある. 我々の "E-cycle 付き DS-diagram の変形" の議論のために, E-cycle の性質を簡単に列挙しておく.

(P1) DS-diagram の任意の辺を σ とすれば, ラベル $[\sigma]$ を持つ辺は 3 つある. 1 つは E-cycle 上に, 1 つは S^+ 内に, 1 つは S^- 内にある.

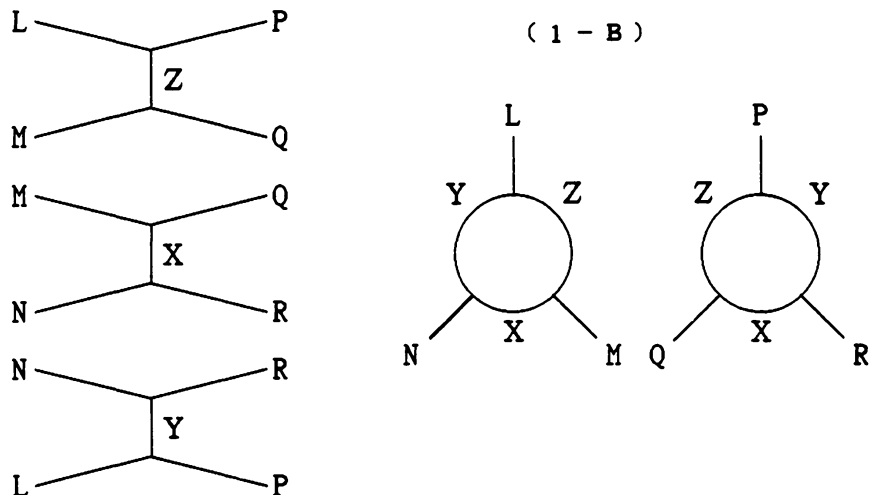
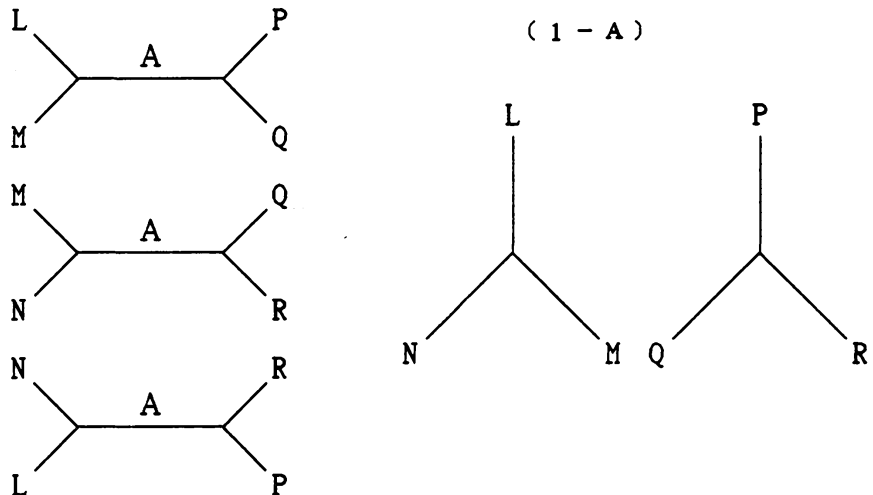
(P2) DS-diagram の任意の頂点を v とすれば, ラベル $[v]$ を持つ頂点は 4 つある. 2 つは E-cycle 上に, 1 つは S^+ 内に, 1 つは S^- 内にある.

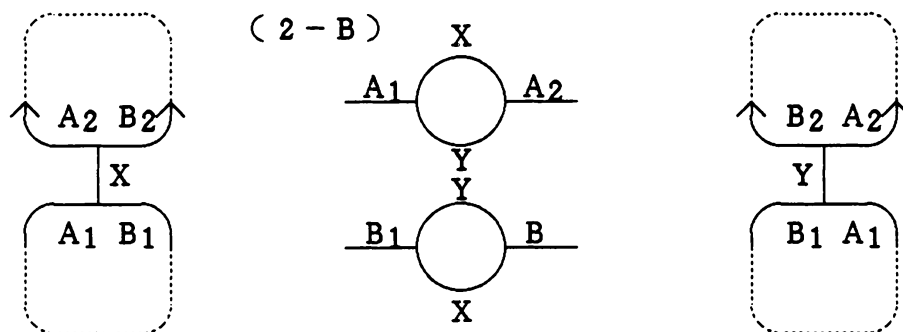
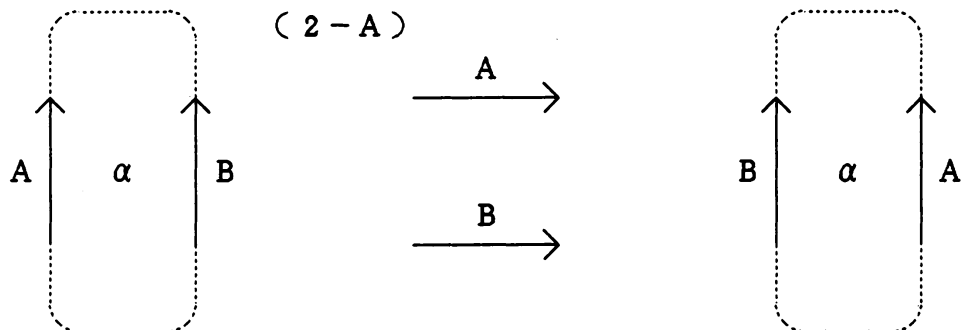
DS-diagram 上の loop E が E-cycle であるか否かの判定条件として次の定理は便利である.

定理 0 [1]. $S^2 = S^+ \cup S^-$, $\dot{S}^+ \cap \dot{S}^- = E$ で, $\dot{\alpha}, \dot{\beta} \in S^*(\# = +, -)$ なる 2-cell α, β に対しては $[\alpha] \neq [\beta]$ であるような loop $E = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ に対して, 次の (i), (ii) は同値である:

- (i) $i \neq j$ ならば $[\varepsilon_i] \neq [\varepsilon_j]$.
- (ii) DS-diagram の辺の個数は $2n$ 個.

勝手な DS-diagram は E-cycle を持つとは限らないが, closed 3-manifold を考えるにあたっては E-cycle 付き DS-diagram を調べるだけで十分である(石井一平氏の結果). そこで我々は E-cycle 付き DS-diagram を, 他の E-cycle 付き DS-diagram に移す変形について調べてみた. もちろん, 対応する closed 3-manifold の位相型を変えない変形についてである. 次の四種(正逆を区別しなければ二種)の変形が基本的である.



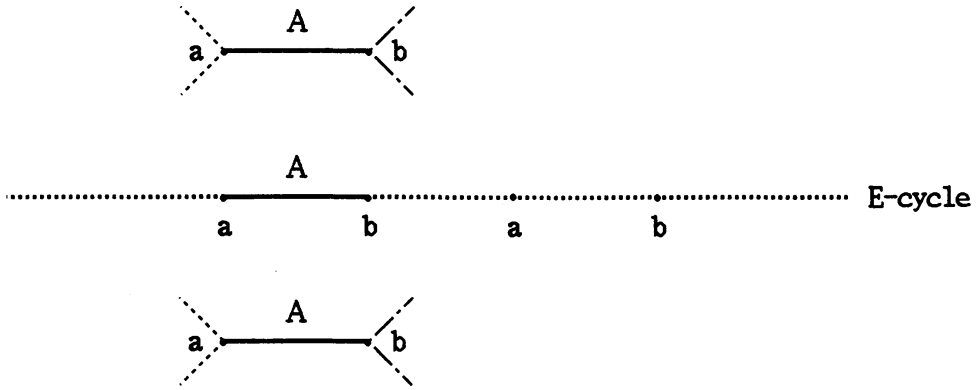


定義 (1-A) \Rightarrow (1-B) を **type I⁺** の変形,
 (1-B) \Rightarrow (1-A) を **type I⁻** の変形,
 (2-A) \Rightarrow (2-B) を **type II⁺** の変形,
 (2-B) \Rightarrow (2-A) を **type II⁻** の変形
 という. I⁺, I⁻, II⁺, II⁻ を総称して **初等 DS-変形** という.

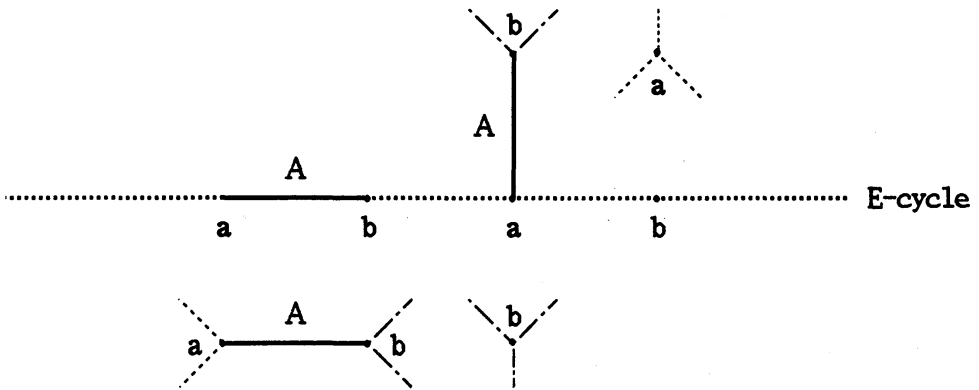
定理 1 type I⁺ の変形は E-cycle 付き DS-diagram を E-cycle 付き DS-diagram に移す変形である.

証明 図 (1-A) について考える. ラベル A の辺は 3 つある. 一つは E-cycle 上に, 一つは S⁺ 内に, 一つは S⁻ 内にある. E-cycle 上にない辺を $A^* \in S_{\pm}$ ($\# = +, -$) とする. $A^* \in S^*$ ($\# = +, -$) と E-cycle との共通部分は \emptyset であるか一点である. したがって辺 A^+, A^- と E-cycle との交点の組は (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) の 4 組である. (0, 1) と (1, 0) は A^+ と A^- の立場をいれかえただけだから, 結局次の (3-1), (3-2), (3-3) の 3 つの場合について示せばよい.

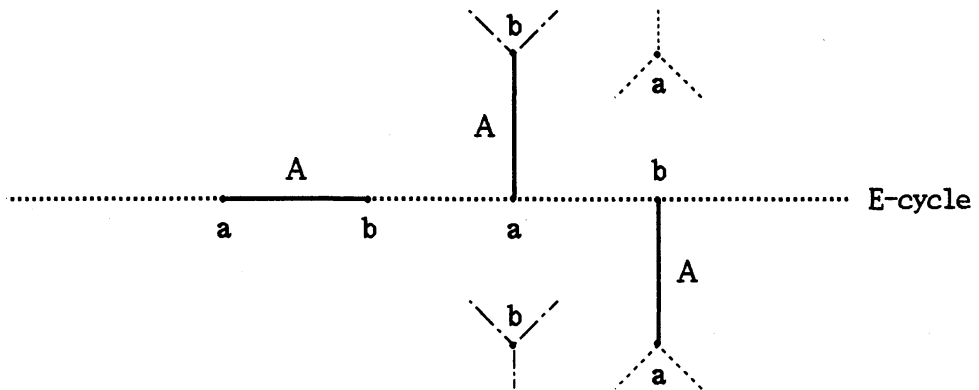
(3 - 1)



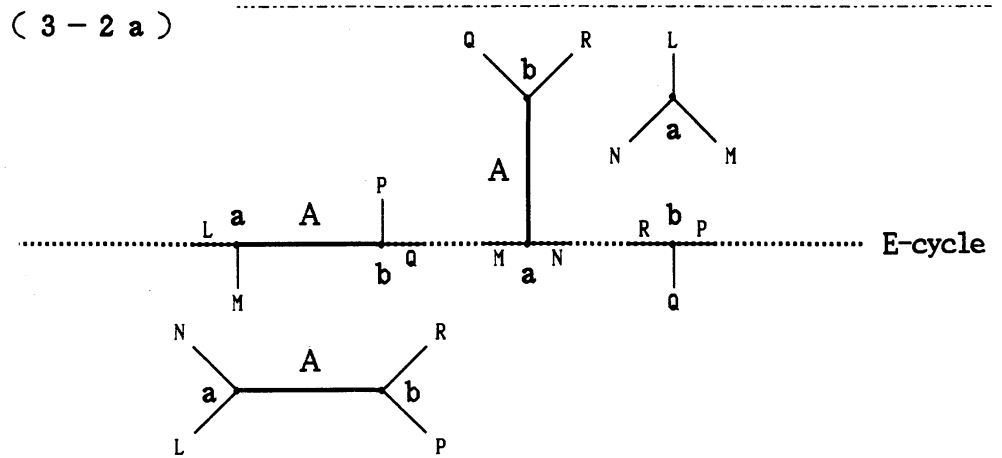
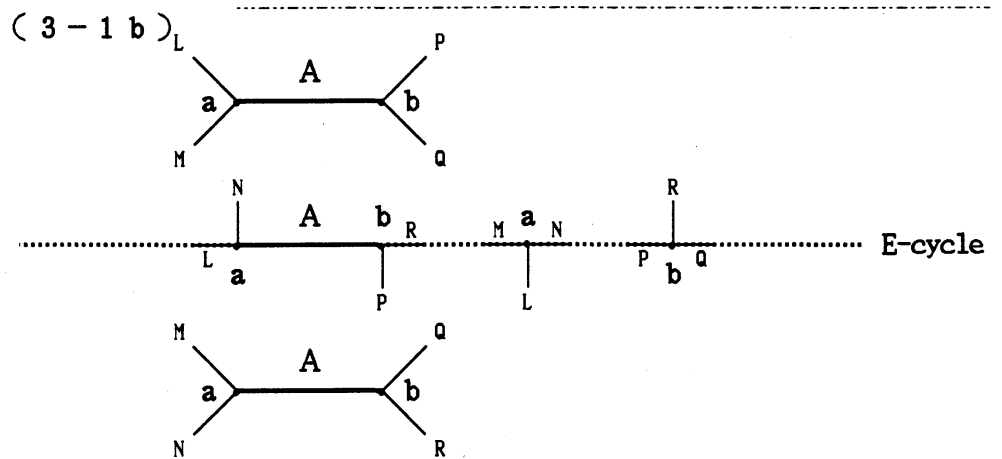
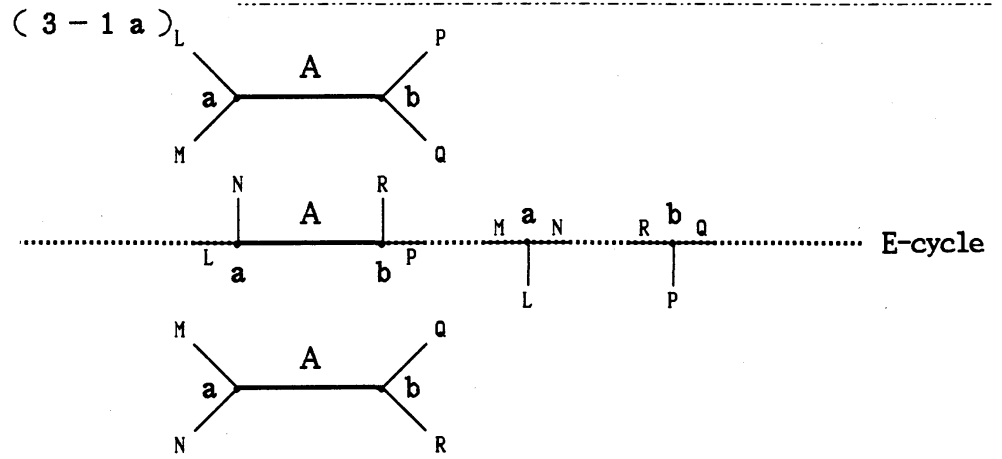
(3 - 2)



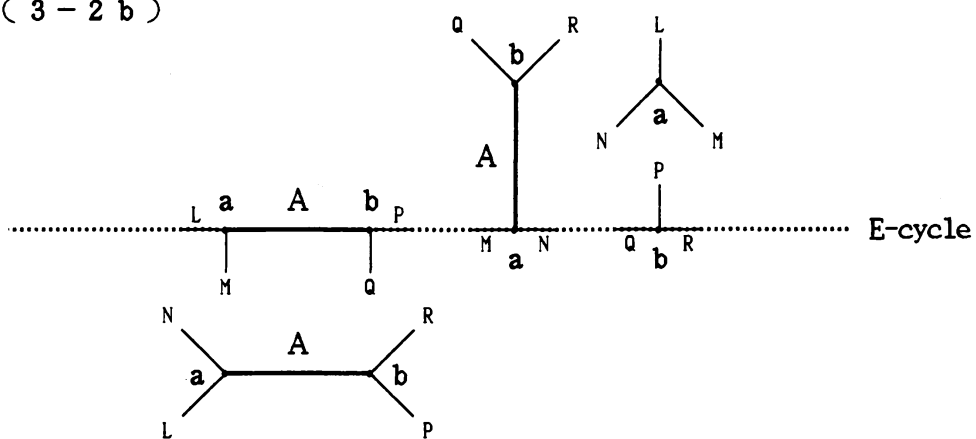
(3 - 3)



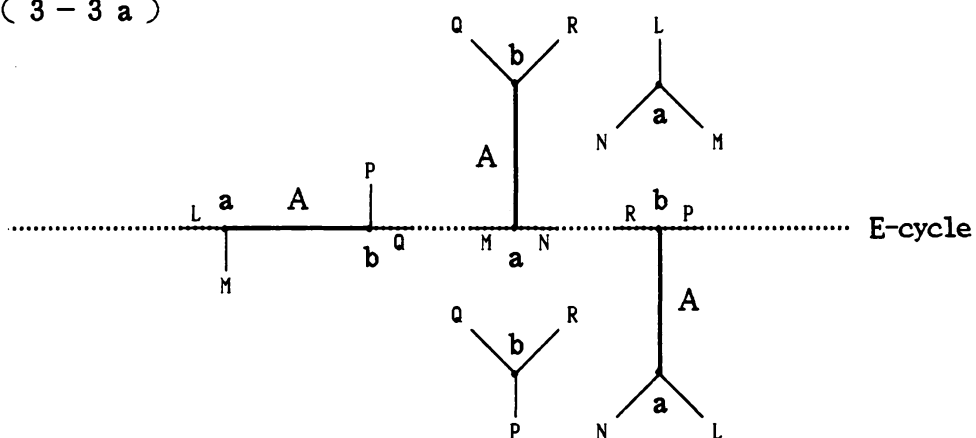
(3-1)~(3-3)での頂点 a, b の近くの様子は次の(3-1a)~(3-3a)のようになる.



(3 - 2 b)

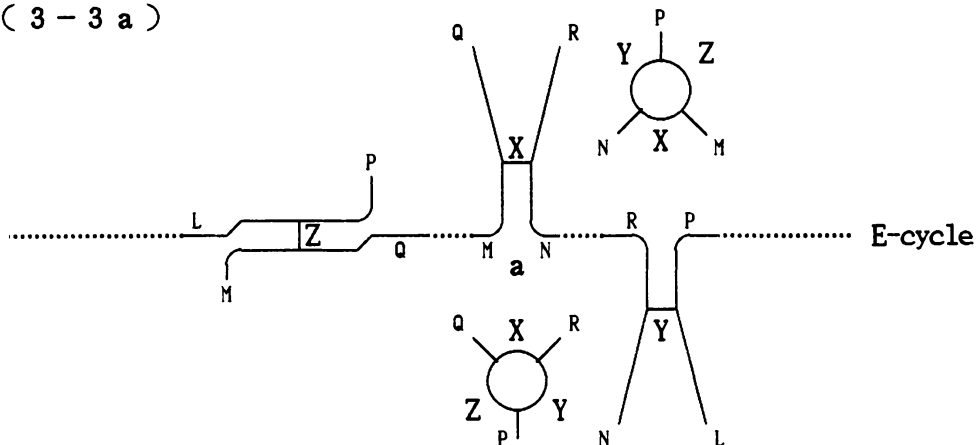


(3 - 3 a)

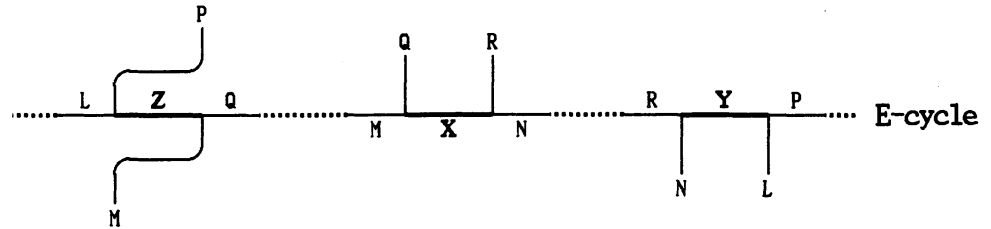


たとえば, (3-3a) に type I* の変形を適用すれば,

(3 - 3 a)

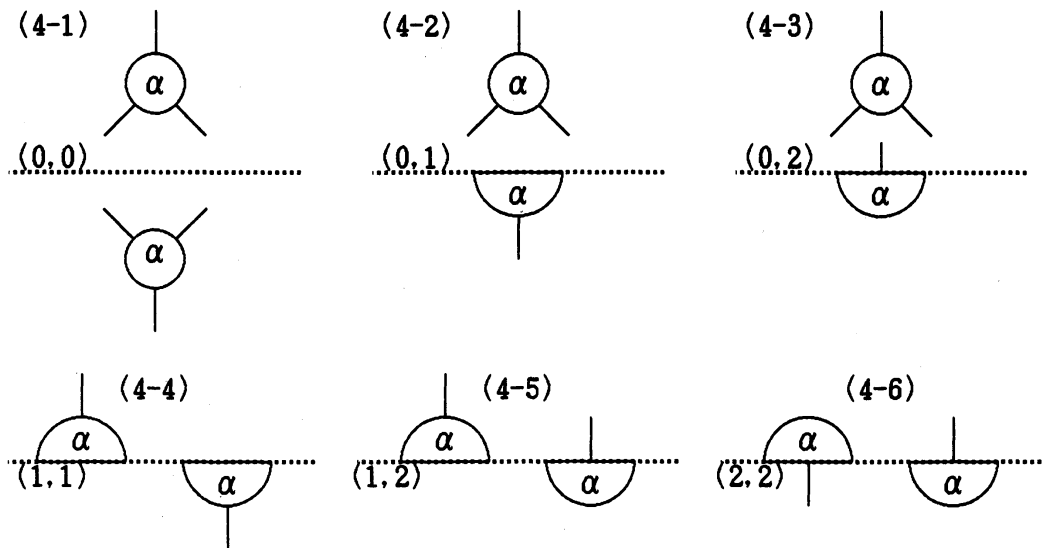


が得られる. 元の E-cycle の付近を整理して描き直せば,



となる. そのとき元の E-cycle $\dots LAQ \dots MN \dots RP \dots$ から新たに得られた loop $\dots LZQ \dots MXN \dots RYP \dots$ は増えた頂点の関係から E-cycle であることが分かる. 他の場合についても同じようにして, E-cycle を保つ変形であることが分かる. ■

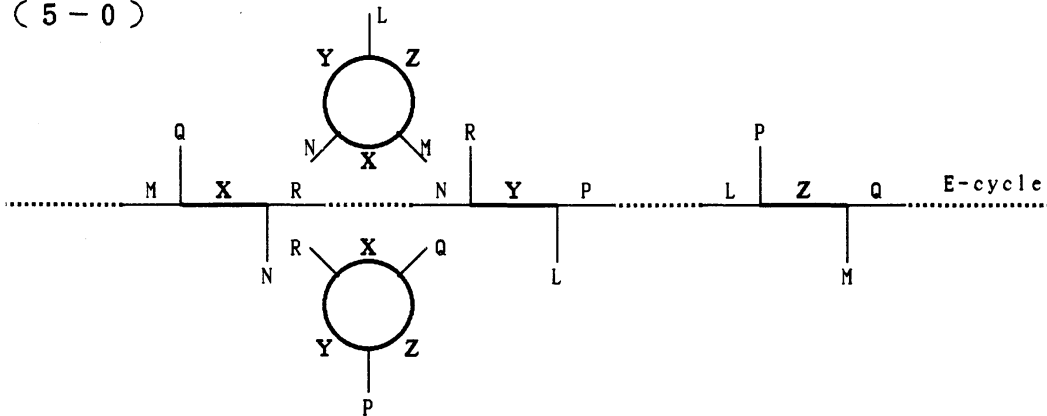
次に type I⁻の変形について調べてみる. まずI⁻変形をほどこすべき3辺形を捜す. いまその3辺形のラベルを α とする. このラベルの3辺形の一方は S^+ 側にあり, 他方は S^- 側にある. 3辺形が E-cycle と頂点だけで交わることはない(3-regularの条件に反するから). したがって, 3辺形と E-cycle の共通部分は \emptyset であるか, 1辺か2辺かの何れかである. 3辺形と E-cycle の共通部分の辺の数の組 $(*, *)$, $*=0, 1, 2$, により次の図のような6通りの場合が考えられる.



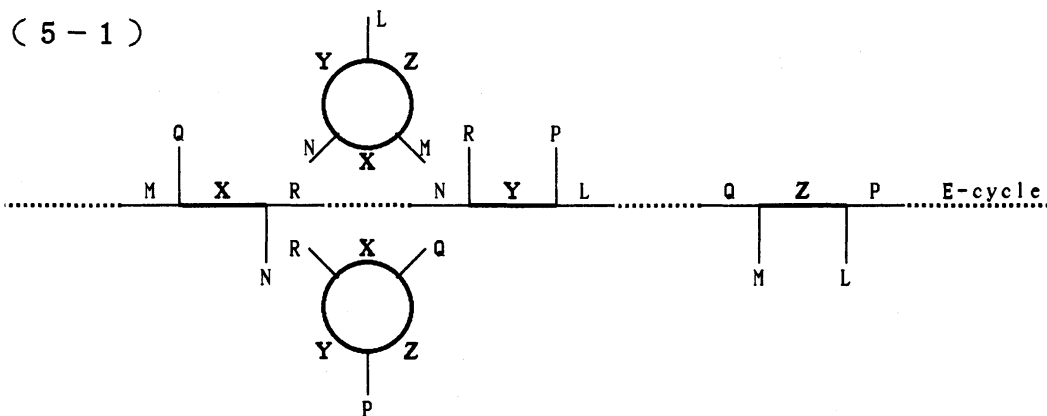
しかしながら, E-cycle 上には同じラベルの辺は1本しかないことから(4-6)のことは決して起こらない.

(4-1)~(4-5) についてその頂点の近くの様子を調べると、次の (5-0)~(5-5) が考えられる。(4-1) からは (5-0), (5-1) の 2 つの場合が起こる。 $k=2, 3, 4, 5$ に対しては、(4-k) から (5-k) が必然的に定まる。

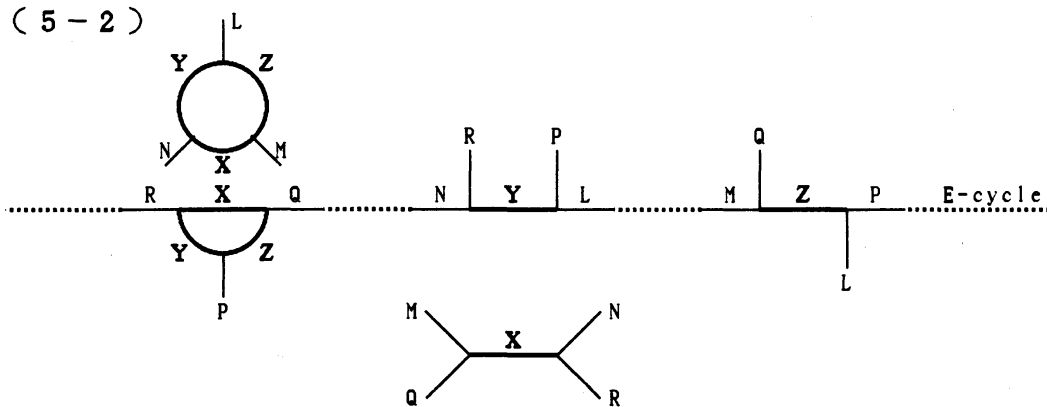
(5-0)



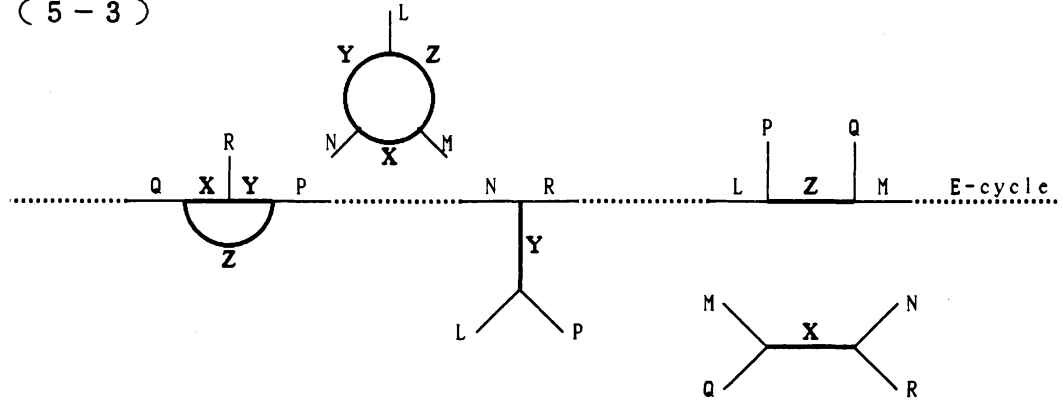
(5-1)



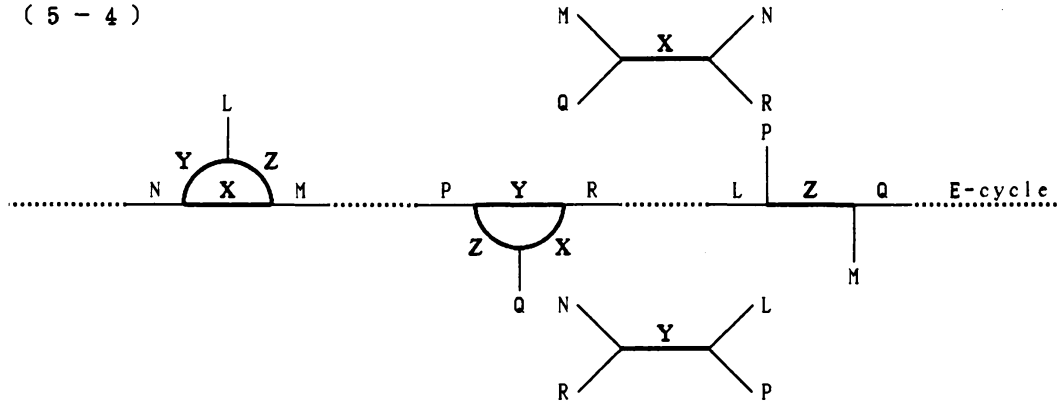
(5-2)



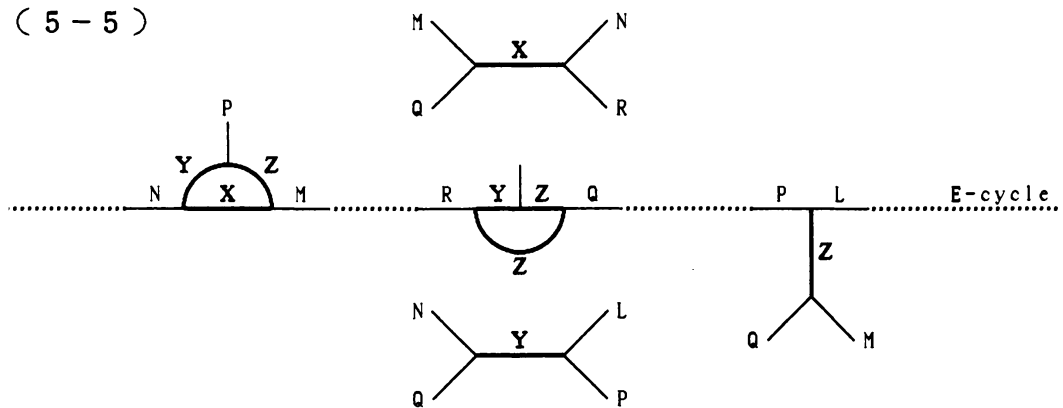
(5-3)



(5-4)



(5-5)



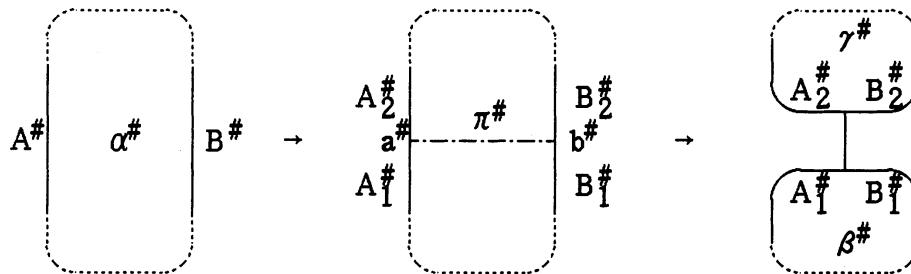
定理 2 (5-0) の場合を除けば type I⁻の変形は E-cycle 付き DS-diagram を他の E-cycle 付き DS-diagram に移す変形である。

定理 1 のときと同様にして, E-cycle を保つことを示すことができる. ■

type II⁺の変形について, その作り方を説明する. DS-diagram 内の面は同じラベルのものがそれぞれ1つずつ S⁺, S⁻内において対になっている. ラベル α を持つ面の1組を α^+, α^- とする. α^* ($\# = +, -$) 内の simple arc π^* を考える. π^* の両端点を a^*, b^* とする. 但し, 次の条件を満たすものとする:

- (1) $\dot{\pi}^* \subset \dot{\alpha}^*, \dot{\pi}^* = \{a^*, b^*\} \subset \dot{\alpha}^*$, 但し, $\# = +, -$.
- (2) α^+ と α^- の同一視から induce されるラベル付けに対して,
 $[\pi^+] = [\pi^-], [a^+] = [a^-], [b^+] = [b^-], a = b$.

このときのラベル π を II⁺のための補助線という. (2-A) の辺 A[#] から B[#] へ補助線 π^* を引いて (2-B) に変形することを π に関する type II⁺の変形というのである. ここで, 上の(1), (2)を満たしているならば, A[#] = B[#]でもよい.

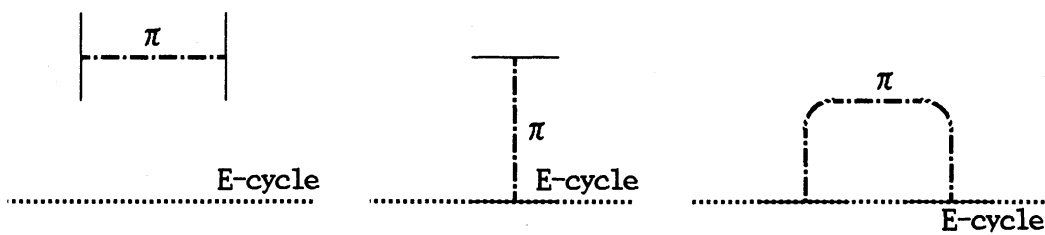


π^* ($\# = +, -$) の両端と E-cycle との交点は $\emptyset, 1$ 点, 2 点のいずれかである. したがって, π^* ($\# = +, -$) に関して次の3種類の場合が考えられる.

(6-1)

(6-2)

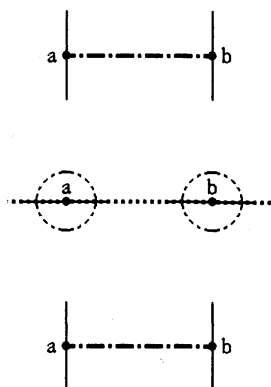
(6-3)



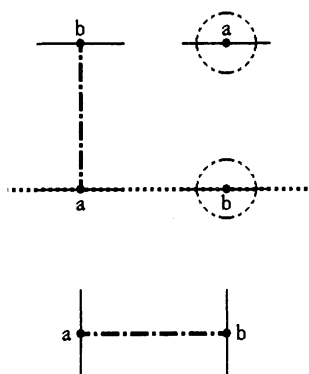
定理 3 π^+, π^- のいずれもその両端が同時に E-cycle 上にないならば, π に関する type II⁺の変形は E-cycle 付き DS-diagram を他の E-cycle 付き DS-diagram に移す変換である.

証明 仮定により, 次の3つの場合について考えればよいことになる.

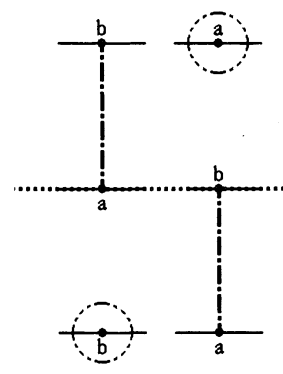
(7-1)



(7-2)

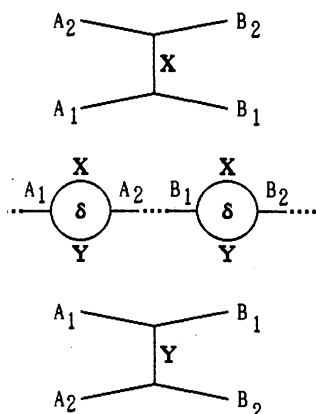


(7-3)

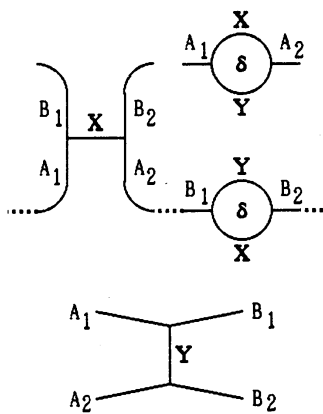


それぞれについて type II⁺の変形をほどこすと次のようになる(A, Bの向きや位置によってバリエーションがあるが本質的には下図だけ).

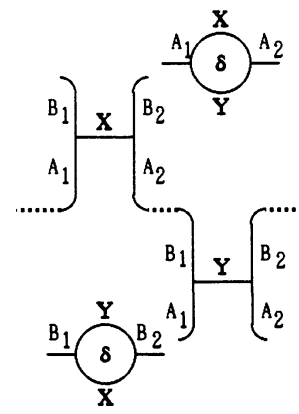
(8-1)



(8-2)

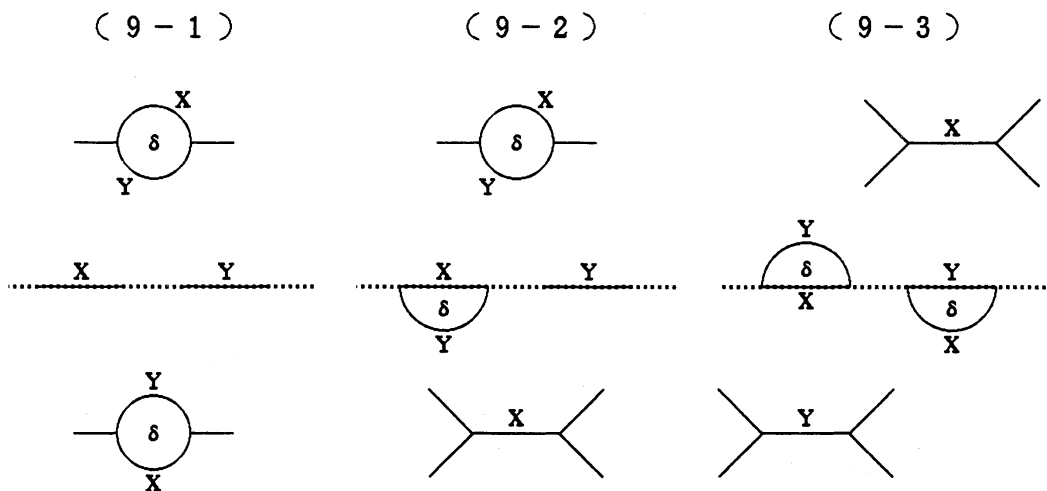


(8-3)

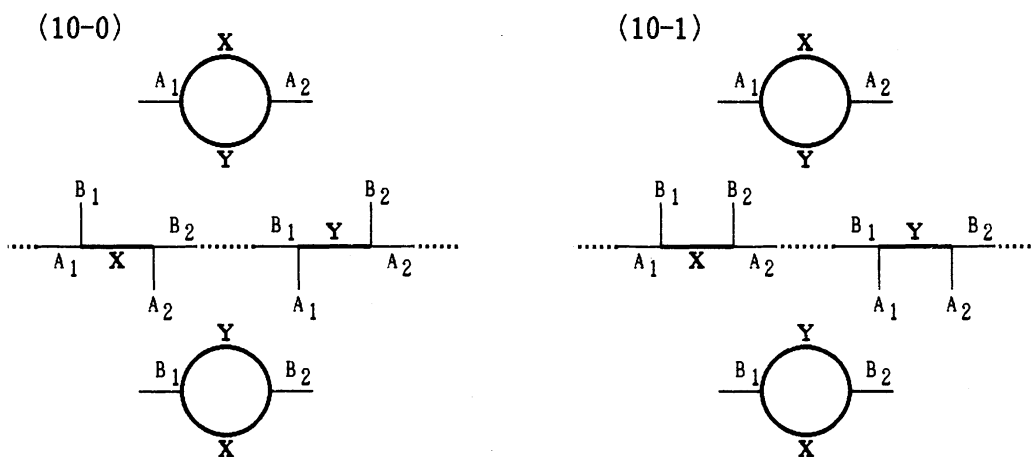


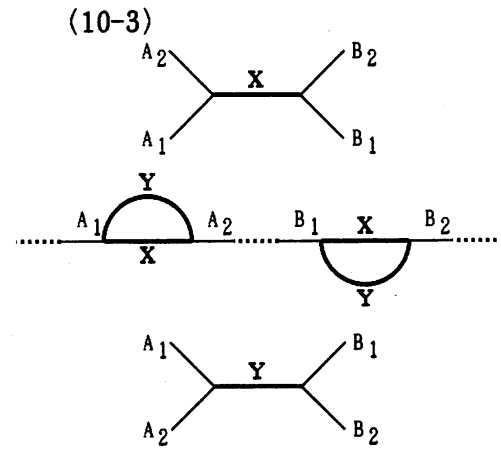
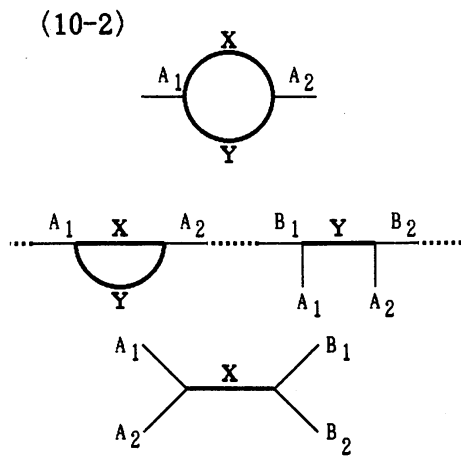
いずれの場合もはじめの DS-diagram の E-cycle を利用した loop:
 $\dots A_1 X A_2 \dots B_1 Y B_2 \dots$
 が新たな DS-diagram の E-cycle になっている. ■

type II⁻の変形を実行するにはラベル δ の面の組 (δ^+, δ^-) を目標にすればよい.
 $\# = +, -$ に対して, $\delta^* = X^* Y^*$, $[X^*] = X$, $[Y^*] = Y$ とする. δ^* と E-cycle
との交わりは \emptyset か一辺 (X^*, Y^* のうちのどちらか) である. したがって, 次の3つの
場合が起こる.



隣接した辺の記号まで書けば本質的に次の4つの場合が起こる.





定理 4 (10-0) の場合を除けば type II⁻ の変形は E-cycle 付き DS-diagram を他の E-cycle 付き DS-diagram に移す変形である。

証明の方法はもはや明らかであろう。