数理解析研究所講究録
第 624 巻 1987 年 237-254

Geodesic Links in S^3

大阪市大・理　作間 誠(Makoto SAKUMA)

針金で作った結び目を無重力空間の中に置き、それを帯電してやると、クーロンの法則に従って結び目の各部分は反発し合い、空間の中にできるだけ均等に広がろうとするであろう。そして、力のバランスが取れ、安定状態になった時の結び目の位置は、その knot type の特徴(特に対称性)を良く反映しているのではないだろうか-----。　この素朴な考えは次の様な問題として述べる事ができる。

各埋め込み $S^1 \hookrightarrow S^3$ に対して"エネルギー"を定義し、その極値を与えるものとして、Knot type の"標準的位置"というものを選び出せないだろうか?　もし、その様なものがあれば、Knot の性質、特に対称性とどの様な関係があるか?

この問題を、S^3 内の大円が作る link (geodesic Link)

に限って考察するのが、本論の目的である。

§1. Geodesic Links in S^3

S^3を4次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ 内の単位球面とする。この時、S^3内のgeodesicは原点を通る2-plane PとS^3の交わりとして得られる。従ってS^3内のgeodesic (resp. oriented geodesic) 全体が作る空間 $\mathcal{G}$ (resp. $\tilde{\mathcal{G}}$) はGrassmann manifold $G_2(\mathbb{R}^4)$ (resp. oriented Grassmann manifold $\widetilde{G_2}(\mathbb{R}^4)$) と同一視される。互いに交わらないgeodesicから成るS^3内のlinkを<u>geodesic link</u>と呼ぶ。二つのgeodesic link LとL'がgeodesic linkであるという性質を保ったままS^3のambient isotopyで重なる時、LとL'は<u>rigidly isotopic</u>であると言い、$L \cong L'$で表わす。

Viro [7] は5 component以下のgeodesic linkのrigid isotopyによる分類を行ない次の結果を得ている

componentの数	1	2	3	4	5	6	7
Isotopy classの数	1	1	2	3	7	15	34
hyperbolic linkの数	0	0	0	0	1	1	8

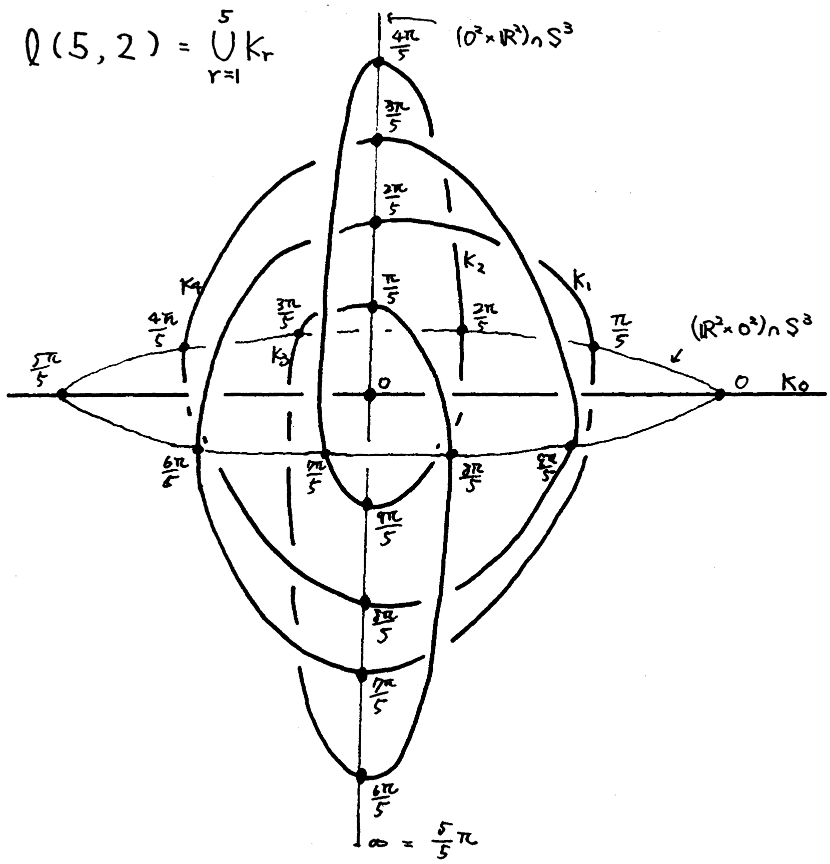
$\underbrace{}_{?}$

上の表でcomponent数が6, 7の場合は、筆者が数え挙げてみたもので、多分この数で良いと思うが、まだ確定はしていない。

この様に、geodesic link は非常に特殊な対象ではあるが、次の様にして、knot theorist と顔なじみの結び目から自然に出てくる系列がある。今、K を spherical Montesinos knot — double cover $\Sigma_2(K)$ が spherical manifold となる knot — とする。この時、$\Sigma_2(K)$ の universal cover $\widetilde{\Sigma_2(K)}$ は S^3 となり、分岐被覆 $p : S^3 = \widetilde{\Sigma_2(K)} \longrightarrow S^3$ を得るが、

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\Sigma_2(K)} & \longrightarrow & S^3 \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \Sigma_2(K) & \end{array}$$

射影 p による K の逆像 $p^{-1}(K)$ は geodesic link である。例えば、2-bridge knot $K(p,q)$ から、この様にして得られる link $l(p,q)$ は下図の link となる。(例3.5参照)



尚、Burde [1] は $l(p,q)$ の linking number を使って 2-bridge knot の分類を行なっている。

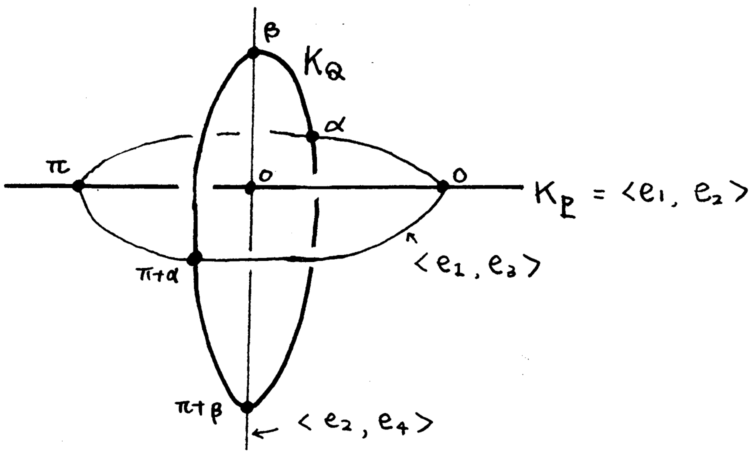
§2. geodesic link の energy

P, Q を $G_2(\mathbb{R}^4)$ の元とする。(原点を通る) P 上の line と平面 Q が成す角度の内で、最大のものを α, 最小のものを β と置く。この pair を P と Q の principal angle と呼ぶ。
この時、P と Q の位置関係は principal angle α, β で定まる。

命題 2.1 (Gluck-Warner [3]) $\mathbb{R}^4$ の正規直交基底 e_1, e_2, e_3, e_4 で次の条件を満たすものがある。

$$\begin{cases} P = \langle e_1, e_2 \rangle \\ Q = \langle \cos\alpha \cdot e_1 + \sin\alpha \cdot e_3,\ \cos\beta \cdot e_2 + \sin\beta \cdot e_4 \rangle \end{cases}$$

対応する geodesic link $K_P \cup K_Q$ は次で与えられる。



定義 2.2 (1) $e(K_P, K_Q) \equiv \cot^2\alpha + \cot^2\beta$ を $K_P \cup K_Q$ のエネルギーと呼ぶ。

(2) Geodesic link $L = \bigcup_{r=1}^{n} K_r$ に対して

$e(L) \equiv \sum_{1 \leq r < s \leq n} e(K_r, K_s)$ を L のエネルギーと呼ぶ。

Principal angle が共に $\pi/2$ となる時 $e(K_P, K_Q) = 0$ となり、α 又は β が 0 に近づく時、K_P と K_Q は接近するが、それにともない、エネルギーも無限大に発散する。

例 2.3 $\ell(p,q) = \bigcup_{r=1}^{p} K_r$ のエネルギー

$$
\begin{aligned}
e(\ell(p,q)) &= \sum_{1 \leq r < s \leq p} e(K_r, K_s) \\
&= \sum_{1 \leq r < s \leq p} \left\{ \cot^2 \frac{r-s}{p}\pi + \cot^2 \frac{(r-s)}{p} q\pi \right\} \\
&= p \sum_{k=1}^{p-1} \cot^2 \frac{k\pi}{p} \\
&= \frac{1}{3} p(p-1)(p-2)
\end{aligned}
$$

となり、整数値を取る。ここで最後の等号は Hirzebruch–Zagier [4] Chapter II に依る。

例 2.4 Hopf fibration $h : S^3 \to S^2$ による S^2 内の有限点集合の逆像は geodesic link になるが、その点集合を正多面体の頂点に選んだ時のエネルギーは次の様な

整数値となる。

頂点の数	4	6	8	12	20
正n面体	4	8	6	20	12
エネルギー	6 ॥ $1\cdot2\cdot3$	24 ॥ $2\cdot3\cdot4$	60 ॥ $3\cdot4\cdot5$	180 ॥ $3^2\cdot4\cdot5$	720 ॥ $4\cdot5\cdot6^2$

§3. 基本的な事実と定義

Oriented Grassmann manifold $\widetilde{G_2}(\mathbb{R}^4)$ の構造を Gluck-Warner [3] に従って解説する。Oriented 2-plane $P \in \widetilde{G_2}(\mathbb{R}^4)$ に対して、正規直交基底 u, v を取り、その外積 $u \wedge v \in \Lambda^2\mathbb{R}^4$ を考えると、これは u, v の取り方に依らない。対応 $P \mapsto \omega_P = u \wedge v$ により、$\widetilde{G_2}(\mathbb{R}^4)$ は $\Lambda^2\mathbb{R}^4$ 内の単位球面に埋め込まれる。一方 $\Lambda^2\mathbb{R}^4$ 上には $*$ operation $\omega \mapsto \omega^*$ が、$\omega \wedge \eta^* = \langle \omega, \eta \rangle \Omega \in \Lambda^4\mathbb{R}^4$ を満たすものとして定義されている。ここで $\langle\ ,\ \rangle$ は $\Lambda^2\mathbb{R}^4$ 上の標準的な内積で、$\Omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \in \Lambda^4\mathbb{R}^4$ である。この時 $(\omega_P)^*$ は P の直交補空間 $P^\perp$ から定まる元 $\omega_{P^\perp}$ に一致することに注意されたい。$*$-operator は $\Lambda^2\mathbb{R}^4$ 上の involution であり、$\Lambda^2\mathbb{R}^4$ は固有空間 $E_+ = \{\omega \mid \omega^* = \omega\}$ と $E_- = \{\omega \mid \omega^* = -\omega\}$ の orthogonal sum に分解される。この時、$E_+ \cong E_- \cong \mathbb{R}^3$ であり、$S^2_\pm = \{\omega \in E_\pm \mid \|\omega\| = 1/\sqrt{2}\}$

とすると $\omega_P \in S^2_+ \times S^2_-$ を得る。

命題 3.1 [3] $\tilde{\mathcal{G}} \cong \widetilde{G_2}(\mathbb{R}^4) \cong S^2_+ \times S^2_-$

$$\mathcal{G} \cong G_2(\mathbb{R}^4) \cong S^2_+ \times S^2_- / (\omega_+, \omega_-) \sim (-\omega_+, -\omega_-)$$

今 $P, Q \in \widetilde{G_2}(\mathbb{R}^4)$ が与えられたとする。対応する $S^2_+ \times S^2_-$ の元を (ω_P^+, ω_P^-), (ω_Q^+, ω_Q^-) とし、$\theta^\pm = \arg(\omega_P^\pm, \omega_Q^\pm)$ と置くと次が成り立つ。

命題 3.2 (1) [3] P と Q の principal angle を α, β とすると $\begin{cases} \theta^+ = \alpha - \beta \\ \theta^- = \alpha + \beta \end{cases}$ である。

特に $K_P \cap K_Q = \phi$ であるためには $\theta^+ \neq \theta^-$ となる事が必要十分である。

(2) $$e(K_P, K_Q) = 2 \times \frac{2 - \{\langle \omega_P^+, \omega_Q^+ \rangle^2 + \langle \omega_P^-, \omega_Q^- \rangle^2\}}{\{\langle \omega_P^+, \omega_Q^+ \rangle - \langle \omega_P^-, \omega_Q^- \rangle\}^2}$$

但し、$\langle\ ,\ \rangle$ は $E_\pm$ の内積を 2 倍して、$S^2_\pm$ が単位球面となる様に正規化したもの。

次に n-component geodesic link 全体が作る空間を考える。

$\Delta_n = \{ (K_1, \cdots, K_n) \in \mathcal{G}^n \mid K_r \cap K_s \neq \phi$ for some $r \neq s \}$ とする。

n次の置換群$\mathfrak{S}_n$は$\mathcal{G}^n$に成分の入れ替えとして作用するが、Δ_nはその作用に関して(setwiseに)不変である。この時、$\mathcal{L}_n \equiv \mathcal{G}^n - \Delta_n / \mathfrak{S}_n$ は unoriented, unordered, geodesic link 全体の成す空間となり、non-compact, disconnected, $4n$-dim. manifold となっている。そして$\mathcal{L}_n$の連結成分がn-component link の rigid isotopy type に対応している。

S^3の(orientation-preserving) isometry group $\mathrm{Isom}^+ S^3$は$\mathcal{L}_n$に作用し、その商空間 $\underset{\sim}{\mathcal{L}_n} = \mathcal{L}_n / \mathrm{Isom}^+ S^3$ はS^3の剛体変換で移る link を同一視して得られる空間であるが、これはもはや多様体ではない。エネルギー関数 $e: \mathcal{L}_n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ は$\mathrm{Isom}^+ S^3$の作用で不変であるので、$e: \underset{\sim}{\mathcal{L}_n} \longrightarrow \mathbb{R}^+$を導びく。

<u>定義 3.3</u> (1) $L \in \mathcal{L}_n$ が <u>minimal position</u> にあるとはLを含む$\underset{\sim}{\mathcal{L}_n}$の連結成分上で$e(L)$が$e$の最小値になる時をいう。

(2) $L \in L_n$ が <u>harmonic position</u> にあるとは、Lが$e: \mathcal{L}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ の critical point になっている時をいう。

$\mathcal{L}_n$の各連結成分Uに対して、$(e|_U)^{-1}[0, c]$ $(c \in \mathbb{R}^+)$ は compact であるので、geodesic link の各 rigid isotopy class は minimal position にある link を含む。

L を harmonic position にある link, $d^2e_L : T_L\mathcal{L}_n \times T_L\mathcal{L}_n \to \mathbb{R}$ を L に於ける e の Hessian とする。 $\mu_L : \mathrm{Isom}^+S^3 \to \mathcal{L}_n$ を $\mu_L(g) = gL$ で定めると, $d\mu_L(T_e \mathrm{Isom}^+S^3)$ は d^2e_L の null space になる。

<u>定義 3.4</u> Harmonic position にある link L が stable であるとは d^2e_L が $T_L\mathcal{L}_n / d\mu_L(T_e SO(4))$ 上の positive definite form であるときをいう。 そうでない時, L は unstable であるという。

以下, 本論では次の問題を考察する。

<u>問題</u> L が対称性の高い位置にあれば harmonic か? stable か? 又, 逆に, (stable) harmonic position にある link から, その link type が持つ対称性を読み取れるか?

次のセクションへ移る前に, Isom^+S^3 の $\tilde{g}$ への作用を記述しておく。 $\mathbb{R}^4$ を4元数体 $\mathbb{H} = \langle 1, i, j, k \rangle$ と同一視し, S^3 をその単位球, $S^2 = S^3 \cap \langle i, j, k \rangle$ とする。 S^3 は積に関して群を成し, Isom^+S^3, Isom^+S^2 は次の様に記述される。(cf [6])

$$1 \longrightarrow \langle(-1,-1)\rangle \longrightarrow S^3 \times S^3 \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Isom}^+ S^3 \longrightarrow 1$$

但し $\Phi(g_1, g_2) : S^3 \xrightarrow{\cong} S^3$
$g \longmapsto g_1 g g_2^{-1}$

$$1 \longrightarrow \langle -1 \rangle \longrightarrow S^3 \xrightarrow{\Psi} \mathrm{Isom}^+ S^2 \longrightarrow 1$$

但し $\Psi(g) : S^2 \xrightarrow{\cong} S^2$
$w \longmapsto g w g^{-1}$

$E_\pm$ の 直交基底として次が取れる。

$$\begin{cases} \varepsilon_i^\pm = \frac{1}{2}\{1\wedge i \pm (1\wedge i)^*\} \\ \varepsilon_j^\pm = \frac{1}{2}\{1\wedge j \pm (1\wedge j)^*\} \\ \varepsilon_k^\pm = \frac{1}{2}\{1\wedge k \pm (1\wedge k)^*\} \end{cases}$$

$\varepsilon_i^\pm, \varepsilon_j^\pm, \varepsilon_k^\pm$ に i, j, k を対応させると相似写像 $E_\pm \to \langle i, j, k\rangle$ (伸張率 $= \sqrt{2}$) が得られるが、これにより $S^2_\pm$ は単位球 $S^2 \subset \langle i, j, k \rangle$ と同一視できる。 この時、$\Phi(g_1, g_2) \in \mathrm{Isom}^+ S^3$ の $\tilde{\mathcal{G}}$ への作用 $\Phi_*(g_1, g_2)$ は次で与えられる。

$$\Phi_*(g_1, g_2) = \Psi(g_1) \times \Psi(g_2) : S^2_+ \times S^2_- \longrightarrow S^2_+ \times S^2_-$$

この時、$\tilde{\mathcal{G}}$ の自然なリーマン計量に関して、$\mathrm{Isom}^+ S^3$ は $\tilde{\mathcal{G}}$ の isometry として作用していることに注意されたい。

<u>例 3.5</u>　p と q を互いに素な自然数とする。
$G_{p,q} = \langle (e^{i\frac{q+1}{p}\pi}, e^{i\frac{q-1}{p}\pi}), (j, j) \rangle \subset S^3 \times S^3$ とすると、

$\Phi(G_{p,q})$ は order $2p$ の dihedral group D_p になり，
$\mathrm{Fix}\,\Phi(G_{p,q}) = \ell(p,q)$ を得る。 $\ell(p,q)$ の components
$\{K_r \mid 0 \le r \le p-1\}$ は次で与えられる。

$$K_r \leftrightarrow \left(e^{i\frac{2r\pi(q+1)}{p}}\cdot j,\ e^{i\frac{2r\pi(q-1)}{p}}\cdot j \right) \in S^2_+ \times S^2_-$$

§4. The principle of symmetric criticality

定理 4.1　geodesic link L が $\mathrm{Isom}^+ S^3$ の有限部分群 G の固定点集合 $\mathrm{Fix}\,G = \{x \in S^3 \mid st_G(x) \neq \{1\}\}$ になるなら，L は harmonic position にある。

これより $\ell(p,q)$ が harmonic であるのがわかる。この定理は，Symmetric Criticality の原理（Palais [5] 参照）より得られる次の定理の特別な場合である。

定理 4.2　G を $\mathrm{Isom}^+ S^3$ の有限部分群とする。もし geodesic link $L \in \mathcal{L}_n$ が G の $\mathcal{L}_n$ への作用 $G_* : \mathcal{L}_n \circlearrowleft$ の孤立固定点であるなら，L は Harmonic position にある。

（証明：[5] 参照）　$e : \mathcal{L}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ は G-invariant であるので gradient vector field $\mathrm{grad}\, e$ は G-invariant

である。一方 L は $G:\mathcal{L}_n$ ↺ の isolated fixed point であるので $\mathrm{Fix}[dG: T_L\mathcal{L}_n ↺] = \{0\}$ となる。従って $\mathrm{grad}\, e_L = 0$ となり $de_L = 0$ を得る。

$L \in \mathcal{L}_n$ が有限群作用の孤立固定点であるための条件は次で与えられる。

<u>命題 4.3</u>　G を $\mathrm{Isom}^+ S^3$ の有限部分群，$L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ を G-不変な geodesic link とする。この時、L が G の $\mathcal{L}_n$ への作用の孤立固定点であるための必要十分条件は、各 r $(1 \leq r \leq n)$ に対して K_r が $st_G(K_r) = \{g \in G \mid g(K_r) = K_r\}$ の $\mathcal{G}$ への作用の孤立固定点となることである。

<u>命題 4.4</u>　H を $\mathrm{Isom}^+ S^3$ の有限部分群，K を H-不変な geodesic とする。K が H の $\mathcal{G}$ への作用の孤立固定点となるための必要十分条件は、H が次の (1) 又は (2) の形の群と $\mathrm{Isom}\, S^3$ 内で conjugate でないことである。

(1) $\langle \Phi(1, e^{i\frac{2\pi}{n}}) \rangle \cong \mathbb{Z}_n$

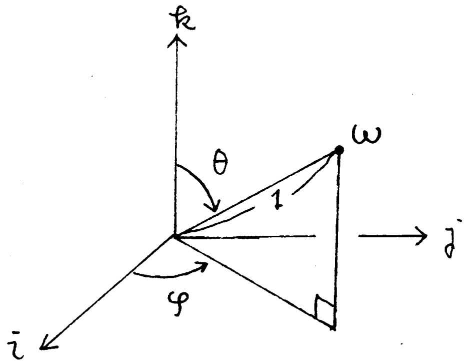
$\left(\text{Fixed points on } \mathcal{G} = S^2_+ \times \{\pm i\} \subset \mathcal{G} \right)$

(2) $\langle \Phi(1, e^{i\frac{2\pi}{n}}), \Phi(i, k) \rangle \cong D_n$

$\left(\text{Fixed points on } \mathcal{G} = S^2 \times \{\pm i\} \subset \mathcal{G} \right)$

§5. Calculation

$\tilde{g} \cong S^2_+ \times S^2_-$ の点を記述するために、各 $S^2_\pm$ に次の様な極座標 $(\theta^\pm, \varphi^\pm)$ を導入する。



(θ, φ)

$\updownarrow$

$\sin\theta\cos\varphi \cdot i + \sin\theta\sin\varphi \cdot j + \cos\theta \cdot k$

Oriented geodesic knot $K = (\omega^+, \omega^-) \in S^2_+ \times S^2_- = \tilde{g}$ は4つの角度の組 $((\theta^+, \varphi^+), (\theta^-, \varphi^-))$ で表わされる。

二本の geodesic knot $K_r = (\omega_r^+, \omega_r^-) = ((\theta_r^+, \varphi_r^+), (\theta_r^-, \varphi_r^-))$ $(r = 1, 2)$ に対して、その間のエネルギー $e = e(K_1, K_2)$ は次の様になる（命題3.2）。

$$e = 2 \times \frac{2 - \{A_+^2 + A_-^2\}}{\{A_+ - A_-\}^2}$$

但し
$$A_\pm = \langle \omega_1^\pm, \omega_2^\pm \rangle = \cos\theta_1^\pm \cos\theta_2^\pm + \sin\theta_1^\pm \sin\theta_2^\pm \cos(\varphi_1^\pm - \varphi_2^\pm)$$

従って e の全微分 de は次で与えられる。

$$de = \frac{4}{\{A_+ - A_-\}^3} \times \left[\{A_-^2 + A_+A_- - 2\} dA_+ + \{-A_+^2 - A_+A_- + 2\} dA_-\right]$$

ここで、$dA_\pm$ は $d\theta_1^\pm$, $d\theta_2^\pm$, $d\varphi_1^\pm - d\varphi_2^\pm$ の一次結合である。

2階の全微分（= Hessian）は 8 次の対称行列で表わされるが、一般形は複雑なのでここで書き下すのはやめ、次の特別な場合のみを考える。

<u>Case 1</u>　$\theta_1^\pm = \theta_2^\pm = \frac{\pi}{2}$ の場合

例 3.5 の $l(p,q)$ はこの条件を満たす。

<u>Case 2</u>　$(\theta_1^-, \varphi_1^-) = (\theta_2^-, \varphi_2^-) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ の場合

Hopf fibration の逆像として得られる link (multiple Hopf link) はこの条件を満たす。

<u>Case 1</u>　$\theta_1^\pm = \theta_2^\pm = \pi/2$ の場合

この時、$d^2 e$ は 3 つの 2 次形式の直和 $E(\varphi) + E(\theta^+) + E(\theta^-)$ に分解される。各成分は次の通りである。

$$
\begin{aligned}
E(\varphi) = & \left\{ \tfrac{3}{2} \cot^4 \tau^+ + 2\cot^2 \tau^+ \right\} \left\{ (d\varphi_1^+ - d\varphi_2^+) + (d\varphi_1^- - d\varphi_2^-) \right\}^2 \\
& + \left\{ \tfrac{3}{2} \cot^4 \tau^- + 2\cot^2 \tau^- \right\} \left\{ (d\varphi_1^+ - d\varphi_2^+) - (d\varphi_1^- - d\varphi_2^-) \right\}^2 \\
& + (d\varphi_1^+ - d\varphi_2^+)^2 + (d\varphi_1^- - d\varphi_2^-)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(\theta^+) = & \left\{ 1 + \cot\tau^+ \cdot \cot\tau^- + (\cot\tau^+ - \cot\tau^-)^2 \right\} \\
& \times \left[\left\{ 1 - \cot\tau^+ \cdot \cot\tau^- \right\} \left\{ (d\theta_1^+)^2 + (d\theta_2^+)^2 \right\} + \frac{2}{\sin\tau^+ \cdot \sin\tau^-} \cdot d\theta_1^+ d\theta_2^+ \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(\theta^-) = & \left\{ 1 - \cot\tau^+ \cdot \cot\tau^- + (\cot\tau^+ + \cot\tau^-)^2 \right\} \\
& \times \left[\left\{ 1 + \cot\tau^+ \cdot \cot\tau^- \right\} \left\{ (d\theta_1^-)^2 + (d\theta_2^-)^2 \right\} + \frac{-2}{\sin\tau^+ \cdot \sin\tau^-} \cdot d\theta_1^- \cdot d\theta_2^- \right]
\end{aligned}
$$

但し　$\tau^+ = \frac{1}{2}\{(\varphi_1^+ - \varphi_2^+) + (\varphi_1^- - \varphi_2^-)\}$

$\tau^- = \frac{1}{2}\{(\varphi_1^+ - \varphi_2^+) - (\varphi_1^- - \varphi_2^-)\}$

ここで $E(\varphi)$ は 2次元 null space $\{d\varphi_1^\pm = d\varphi_2^\pm\}$ を持つ positive form である事に注意されたい。

今、harmonic position にある geodesic link $L = \bigcup_{r=1}^{n} K_r$ ($K_r = ((\theta_r^+, \varphi_r^+), (\theta_r^-, \varphi_r^-))$) が条件 $\theta_r^\pm = \pi/2$ $(1 \le r \le n)$ を満たしたとする。$d^2e(L) = \sum d^2e(K_r, K_s)$ であるので、L は $\varphi_r^\pm$ 方向に関しては安定となり、残りの $\theta_r^\pm$ 方向についてのみ調べれば良いことになる。特に $l(p,q)$ に於ける Hessian d^2e は次の形となる。

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} d\theta_r^+ & d\theta_r^- & d\varphi_r^+ & d\varphi_r^- \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} d\theta_r^+ \\ d\theta_r^- \\ d\varphi_r^+ \\ d\varphi_r^- \end{array} &
\left(\begin{array}{cc|c}
E^+(p,q) & 0 & \\
0 & E^-(p,q) & 0 \\
\hline
\multicolumn{2}{c|}{0} & \text{positive}
\end{array}\right)
\end{array}
$$

ここで、$E^+(p,q) \cong E^-(p, p-q)$ である事がわかる。

又、dihedral group D_p が isometry として作用している事より、$E^+(p,q)$ の固有値 $\{\alpha_u^+\}_{u=0}^{p-1}$ は次で与えられるのがわかる。

(i) p : odd の時　$\tau = 2\pi/p$ とすると

$$\alpha_u^+ = \sum_{r=1}^{p-1}\left\{1 + \cot r\tau \cdot \cot rq\tau + (\cot r\tau - \cot rq\tau)^2\right\}\left\{\frac{\cos ur\tau - \cos(1+q)r\tau}{\sin r\tau \cdot \sin rq\tau}\right\}$$

(ii) p: even の時　$\tau_0 = \pi/p$ とすると

$$\alpha_u^+ = \sum_{r=1}^{p-1} \left\{ 1 + \cot r\tau_0 \cdot \cot rq\tau_0 + (\cot r\tau_0 - \cot rq\tau_0)^2 \right\} \left\{ \frac{\cos 2ur\tau_0 - \cos(1+q)r\tau_0}{\sin r\tau_0 \cdot \sin rq\tau_0} \right\}$$

$p \leq 5$ の時の d^2e の $d\theta_r^{\pm}$ 方向の固有値は次の様になる。

$(p.q)$	固有値
$(2,1)$	$2, 2, 0, 0$
$(3,1)$	$8, 8, 16/3, 0, 0, 0$
(4.1)	$32, 18, 18, 10, 0, 0, 0, -6$
(5.1)	$72, 72, 32, 32, 16, 0, 0, 0, -16, -16$
(5.2)	$24, 24, 24, 24, 16, 16, 0, 0, 0, 0$

従って $l(2,1)$, $l(3,1)$, $l(5,2)$ は安定であるが，$l(4,1)$ $l(5,1)$ は不安定である。又，$p \geqq 6$ の時は全ての $l(p,q)$ は不安定であり，$\dim(\text{negative space}) < \frac{1}{4} \dim \mathcal{L}_p$ が成立する様である。$l(p,q)$ が amphicheiral の時は各成分一本づつの変動に関しては安定である事がわかる。

<u>Case 2</u>　$(\theta_r^-, \varphi_r^-) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$　$(r=1.2)$ の場合

この時 $de = \frac{1}{(A_+-1)^2} dA_+$ であり，d^2e は 3 個の 2 次形式の直和 $E(\theta^+, \varphi^+) + E(\theta^-) + E(\varphi^-)$ に分解する。各成分は次で与えられる。

$$E(\theta^+,\varphi^+) = \frac{4}{(1-A_+)^2}\, d^2A_+ + \frac{8}{(1-A_+)^3}\,(dA_+)^2$$

$$E(\theta^-) = \frac{4(2-A_+-A_+^2)}{(1-A_+)^3}\,(d\theta_1^- - d\theta_2^-)^2$$

$$E(\varphi^-) = \frac{4(2-A_+-A_+^2)}{(1-A_+)^3}\,(d\varphi_1^- - d\varphi_2^-)^2$$

ここで de は $d\theta_r^+, d\varphi_r^+$ $(r=1,2)$ のみの一次結合であり、$E(\theta^-)$, $E(\varphi^-)$ は positive form である事に注意されたい。従って任意の(multiple) Hopf link は Hopf fibration を崩す方向の変動に関しては、安定な特異点である。よって Hopf link が harmonic であるかどうか、又安定であるかどうかという問題は、対応する S^2 上の point configuration の問題に置き換えられる。

付記　津田塾大学の福原真二氏も同様の発想を以前から持っておられ、本論とは異なる方向から knot の標準的位置の研究をされています([2])。

References

[1] G. Burde: Verschringungsinvarianten von Knoten und Verkettungen mit zwei Brücken, Math. Z. 145 (1975) 235-242.

[2] S. Fukuhara: Lecture at Tsuda college, 1986

[3] H. Gluck and F.W. Warner: Great circle fibrations of the three sphere, Duke Math. J. 50 (1983) 107-132.

[4] F. Hirzebruch and D. Zagier: The Atiyah-Singer theorem and elementary number theory, Math. Lect. Nore Series 3, Publish or Perish Inc.

[5] R.S. Palais: The principle of symmetric criticality, Commun. Math. Phys. 69 (1979) 19-30.

[6] P. Scott: The geometry of three manifolds, Bull. London Math. Soc. 15 (1983) 401-487.

[7] O.Ya. Viro: Topological problems concerning lines and points of three-dimensional space, Soviet Math. Dokl. 32 (1985) 528-531.