数理解析研究所講究録
第625巻 1987年 167-175

ある種の平面有向ネットワーク上の多品種流問題について

京大 数理工学科　永持　仁 (Hiroshi Nagamochi)
茨木　俊秀 (Toshihide Ibaraki)
長谷川　利治 (Toshiharu Hasegawa)

多品種流の実行可能性問題は，K種のフローを，指定された節点間に与えられた量だけ流し得るか否かを判定する問題であり，交通網や通信網の流量制御問題，およびVLSIの配線問題等を含み，実用上重要である。この多品種流の実行可能性の判定問題は，線形計画問題として定式化でき，従って多項式時間で解ける(5),(7)。実用的には，主に単体法に基づくコードが利用されている。しかし，現実の問題は，非常に大規模な線形計画問題になることが多く，より効率の高い解法としてグラフ論的アルゴリズムの開発が望まれている。ところが，そのようなアルゴリズムの知られている問題は，無向ネットワークのかなり特殊なクラスに限られている。この理由の一つは，単一品種流問題における完全単模性や最大流－最小カットの定理が，一般の多品種流問題に対しては成立しないためと考えられる。

無向ネットワークの２品種流問題では，最大流－最小カットの定理が成立し，それに対するグラフ論的解法が開発された(2)。岡村とSeymourは，各品種のソースとシンクが，無向平面グラフの外周上に位置するとき，最大流－最小カットの定理が，K品種流に対しても成

立することを示し[11]，それに基づいたグラフ論的アルゴリズムも知られている[9]。この他にも，無向ネットワークにおいては最大流一最小カットの定理が成立するクラスが幾つか知られている[12],[6]。これに対し，有向ネットワークにおいては，2品種流に対してさえも最大流一最小カットの定理が成立しない問題例が存在し[10]，グラフ論的アルゴリズムを持つ問題のクラスは，殆ど知られていない。唯一の例外は文献(1)の結果であるが，これは，有向平面ネットワークの外周上の左半分側に各品種のソース，右半分側に各品種のシンクが位置し，対応するソースとシンクは上から左右同じ順序に出現しているという極めて特殊な有向ネットワークのみを対象としている。

最近，我々は，ある種の平面有向ネットワークのクラスCB (capacity balanced networks)およびクラスCS(capacity semi-balanced networks)に対し，多項式時間のグラフ論的アルゴリズムを与えた[9]。クラスCSはある種の多品種多段生産計画問題[3]を特殊な場合として含む実用上重要なクラスである。

＜CBネットワーク＞

多品種流問題 $N=(G,P,g,c)$ を考える。ただし，

$G=(V,A)$：節点集合 V と有向枝の集合 A を持つ有向グラフ。

$a(x,y)$：節点 x から節点 y へ向かう有向枝。

$OUT(x)$：始点が x である有向枝の集合。

$IN(x)$：終点が x である有向枝の集合。

$P=\{(s^k,t^k)\mid k=1,2,...,K\}$。$K$ は品種数。各品種 k は，ソース s^k とシンク t^k を一つずつ持つ。 $S=\{s^k\mid k=1,2,...,K\}$, $T=\{t^k\mid k=1,2,...,K\}$ とおく。

$g:\{1,2,...,K\}\rightarrow Z^+$（正整数の集合）。$g^k=g(k)$ と記す。g^k は品種 k の

供給量(=需要量)。

$c: A \to Z^+$は容量関数。

$f(a,k)$を枝aを通る品種kの流量とすると，次の(1),(2)を満たす $f(a,k), a \in A, k=1,2,...,K$が存在するとき実行可能であると言う。流量保存則　全ての$x \in V, k=1,...,K$ に対し

$$\sum_{a \in OUT(x)} f(a,k) - \sum_{b \in IN(x)} f(b,k) = \begin{cases} g^k & (x=s^k\text{のとき}) \\ 0 & (x \neq s^k, x \neq t^k\text{のとき}) \\ -g^k & (x=t^k\text{のとき}) \end{cases} \quad (1)$$

容量制約　全ての$a \in A$に対し

$$0 \leq f(a,k),\ k=1,2,...,K,$$

$$\sum_{k=1}^{K} f(a,k) \leq c(a), \quad (2)$$

$IN(x)=\phi$である節点xを発散節点，$OUT(x)=\phi$である節点xを集結節点と言う。以後，次の条件を満たす$N=(G,P,g,c)$を考え，CBネットワークと呼ぶ。

[仮定1] (1) $G=(V,A)$は，有向閉路を持たず，(無向グラフとみなすとき)二重連結な平面グラフである。Gは平面に描かれており，次の記法を用いる。 B:Gの外周。V_B:B上の節点集合。A_B:両端点がB上にある枝集合。Gが二重連結であることから，A_Bの枝の作る(無向)閉路(つまり外周)は初等的(同じ節点を二度以上通らない)である。

(2)全ての発散節点，集結節点はV_B上に含まれる。

(3)$T \subset V_B$。(以下の議論は$S \subset V_B$という仮定におきかえても同様に進めることができる。)

(4)全ての節点$x \in V$において　$\Delta c(x)=0$。ただし，

$$\Delta c(x) = \sum_{a \in OUT(x)} c(a) + \sum_{t^k=x} g^k - \sum_{b \in IN(x)} c(b) - \sum_{s^k=x} g^k。\ \square$$

節点集合Xは,V-XからXへの枝が存在しないとき,発散集合と言う。同様に,XからV-Xへの枝が存在しないならば，集結集合と言う。節点集合Xの作るGの部分グラフが連結であるとき，Xは連結と言う。$\Pi(x,y)$をxからyへの有向パスの集合とし，$\Pi(x,y)\neq\phi$のとき，xはyに到達可能と言い，$\pi\in\Pi(x,y)$に対し，$A(\pi)$をπ上の枝集合とする。平面上に描かれたGの任意の初等的(無向)閉路は,平面を二つの領域に分ける。これらの領域の一方がGの枝を含まないとき，その閉路は窓と呼ばれる。特に，外周Bも窓である。節点xに接続している2本の枝a,bが,外周以外のある一つの窓に含まれているとき,近接していると言う。節点xのIN(x)を近接グループに分割し，$IN_i(x), i=1, 2, ..., i_x$と記す。同様に，OUT(x)を$OUT_j(x), j=1,2,...,j_x$に分割する。すなわち，各$IN_i(x)=\{a_1, a_2, ..., a_m\}$において$a_{k-1}$と$a_k (k=2, 3, ..., m)$は近接し，$IN_i(x)$はそのような性質を持つ極大集合である。OUT(x)についても同様。

[補題1] Gは仮定2.1の条件(1)~(3)を満たすとする。Gの各節点xに対し，その枝集合$IN_i(x) (i=1, ..., i_x)$，$OUT_j(x)$ $(i=1, ..., j_x)$は，Vの一つの分割$X_i^+(i=1, ..., i_x), X_j^-(j=1, ..., j_x), X_0=\{x\}$を定義し，次の性質を持つ。$X_i^+$は連結な発散集合であり，$IN_i(x)$の全ての枝の始点を含み，$X_j^-$は連結な集結集合であり，$OUT_j(x)$の全ての枝の終点を含む。□

＜アルゴリズムASSIGN＞

CBネットワークGを解くアルゴリズムASSIGNの概要を示す。Gは閉路を持たないから，次のように各節点にlevelを定義できる。発散節点xに対してはlevel(x)=0とし，発散節点以外の節点xに対しては，全ての発散節点からxへの(枝の本数を基準にした)有向最短路を考え，有限長の最短路の中で最長の路の長さをlevel(x)とする。次に，

xの各$OUT_j(x)$において，枝が時計回りに$a_1, a_2, ..., a_m$と並んでいるとき，$i<j$に対しa_iはa_jの左側に位置すると言う。また，$OUT_j(x)$に対し補題1において定められたX_j^-を考え，$X_j^- \cap V_B$に含まれるシンクの左右関係を次のようにきめる。外周BのうちX_j^-に含まれる部分の初等的パスを時計回りに見るとき，シンクt^{k1}の後にシンクt^{k2}を訪れるならば，t^{k1}はt^{k2}の左側にあると言う。このとき品種k1は品種k2の左側にあるとも言う。$t^{k1}=t^{k2}$のとき，$k1<k2$ならば品種k1は品種k2の左側にあると言う。CBネットワークは全ての節点で容量バランスが取れていることから，任意の実行可能解において全ての枝は飽和している。アルゴリズムASSIGNはこの性質を利用して，levelの非減少順に節点xを選び，$OUT(x)$の枝のフローを容量いっぱいまで決定するという手順を反復する。ある節点xを選んだとき，$level(y)<level(x)$なる全ての節点yの$OUT(y)$上のフローは既に決定しているので，$IN(x)$上のフローは既に定まっている。$K_j(x)$をxから$OUT_j(x)$の枝を通って到達できるシンク$t^k(\neq x)$の品種kの集合とする。仮定1(3)より明らかに$\{t^k | k \in K_j(x)\} \subset X_j^- \cap V_B$であり，補題1より，$K_j(x)$ $(j=1, ..., j_x)$は互いに素である。各jに対し，ASSIGNは$K_j(x)$内の品種を左から順に選び，$OUT_j(x)$の枝にやはり左から順に容量いっぱいまで割り付る。

[定理1] CBネットワーク$N=(G=(V,A),P,g,c)$が実行可能ならば整数性を満たす解が存在する。手続きASSIGNはNの実行可能性を判定し，実行可能ならば標準形の実行可能解を与える。ASSIGNに必要な計算時間と記憶領域は，ともに$O(K|V|)$である。□

CBネットワークに対するASSIGNと標準的な単体法の計算速度を比較するために，問題の規模$L=K|A|$が30から600程度のランダムに生成したネットワークの問題例に対し計算実験を行なった。(4) その結果によると，ASSIGNが常に圧倒的に速く，およそ$0.009\times L^2$倍もの速度

が得られている。

＜CSネットワーク＞

容量がバランスしていない，つまり$\Delta c(x)\neq 0$である節点xを含むネットワークに対しては，ASSIGNでは正しく動作しない。しかし，バランスの取れていない節点において，容量の残りをダミーフローdに割り付け，K+1品種流問題を考えることで，CBネットワークに変換できる場合がある。

［定義1］ ネットワークNに対して，ダミーフローdのソースとシンクを次のように置く。$\Delta c(x)>0$なる節点xそれぞれに，ダミーソースs_x^dを置き，このソースの供給量g_x^dを$\Delta c(x)$とする。さらに，$\Delta c(x)<0$なる節点xそれぞれに，ダミーシンクt_x^dを置き，その需要量g_x^dを$-\Delta c(x)\,(>0)$とする。これらg_x^dをまとめてg^dと記し，さらに，S^dを全てのs_x^dの集合，T^dを全てのt_x^dの集合，また$P^d=(S^d,T^d)$とする。ダミーフローを含めたK+1品種に対し，式(1)の流量保存則と式(2)の容量制約式を課したK+1品種問題のネットワークを$N^d=(G,P,P^d,g,g^d,c)$と記す。□

新しいネットワークN^dは容量バランスしているが，品種dのソースとシンクは一般に多数存在し，1対1対応していない。また，仮定1の(3)も成立しない。このためN^dをそのままASSIGNによって解くことはできない。しかし，N^dにおいて，ある実行可能解fが，ある$\pi\in\Pi(s_x^d,t_y^d)$に対し$(0<)e\leq f(a,d), a\in A(\pi)$を満たすことが判れば，xからyへの流量eのダミーフローを新しい品種のフローに置き換えることができる。この変換を繰返し，ダミーフローの全てを新しい品種に置き換えることができ，しかも得られたネットワークがCBであれば，その実行可能性をASSIGNによって判定できる。このような変換が可能なクラスとして次のCSネットワーク(capacity semi-balanced networks)を考える。

[定義2] 多品種流問題のネットワーク$N=(G,P,g,c)$は，次の性質が成立するときCSネットワークであると言う。

(1)Nは仮定1(1)~(3)を満たす。

(2)$S^d=\{x \mid \Delta c(x)>0\}$，$T^d=\{x \mid \Delta c(x)<0\}$とするとき，ある初等的カットCによって分けられたXとV-Xに対し，$S^d \subset X \cap V_B$かつ$T^d \subset (V-X) \cap V_B$。 □

CUネットワークを解くアルゴリズムMATEの概要を示す。MATEは，$S^d \cup T^d \neq \phi$である限り，外周B上で隣接する$s_x{}^d \in S^d$，$t_y{}^d \in T^d$に対し，新しいK+1番目の品種を以下のように構成する。

$e:=\min\{g_x{}^d, g_y{}^d\}$, $g^{K+1}:=e$,

$s^{K+1}:=s_x{}^d$, $t^{K+1}:=t_y{}^d$,

$S:=S \cup \{s^{K+1}\}$, $T:=T \cup \{t^{K+1}\}$, $P:=P \cup \{(s^{K+1}, t^{K+1})\}$,

$g_x{}^d:=g_x{}^d-e$, $g_y{}^d:=g_y{}^d-e$,

もし，$g_x{}^d=0$なら $S^d:=S^d-\{s_x{}^d\}$,

もし，$g_y{}^d=0$なら $T^d:=T^d-\{t_y{}^d\}$ 。

[定理2] 定義2のCSネットワーク$N=(G,P,g,c)$が実行可能ならば整数性を満たす解が存在する。また，手続きMATEとASSGINは実行可能性を正しく判断する。計算に必要な計算時間と記憶領域はともに$O((K+|V|)|V|)$である。□

容量バランスの導入により，多品種流問題がグラフ論的に効率良く解ける有向ネットワークのクラスとしてCBネットワークおよびCSネットワークが得られた。今後の課題として，この手法の適用可能な範囲の拡張とその限界，および得られたクラスに対する最大流-最小カット性など明らかにすることなどが考えられる。現在，若干の拡張が成功しており，別途報告する予定である。

文　　献

(1) Diaz,H and de Ghellinck,G.:"Multi-commodity maximum flow in planar networks (The D-algorithm approach)", CORE discussion paper No.7212, Center for Operations Reserch and Econometrics, Louvain-la-Neuve, Belgium (1972).

(2) Hu,T.C.:"Integer Programming and Network flows", Addison Wesley, Reading, Mass. (1969).

(3) Ibaraki,T., Hosono,M., Ishii,Y. and Hasegawa, T.: "Heuristic algorithms for multi-item multi-stage production scheduling based on the network flow concept", International Seminar on Operations Research and Systems, Kyoto University, pp.227-240 (1985).

(4) 伊藤大雄:"ある種の多品種流問題の解法に対する性能評価",卒業論文,京都大学工学部数理工学科,(1985).

(5) Karmarkar,N.:"A new polynomial-time algorithm for linear programming", Proceeding of 16th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, Washington D.C. (1984).

(6) Karzanov,A.V.:"Families of cuts with the MFMC-property", Combinatorica 5(4) pp.325-335 (1985).

(7) Khachiyan,L.G.:"A polynomial algorithm in linear programming", Dokl. Akad. Nauk SSSR 244:5, pp.1093-1096 (1979)[Engilsh trasl., Soviet Math. Dokl. 20:1, pp.191-194(1979)].

(8) 松本, 西関, 斉藤:"平面グラフの多種フローを求める多項式アルゴリズム",信学論(A),J65-A,12,pp.1205-1212(昭57-12)

(9)永持，茨木，長谷川:"ある種の平面有向ネットワーク上の多品種流問題について",信学論(A),J70-A,2,pp.228-238(昭62-2)

(10)永持，茨木，長谷川:"平面有向ネットワークのクラスCUに対する多品種流問題",京都大学工学部数理工学科,Technical Report #86012 (1986)

(11) Okamura,H. and Seymour,P.D.:"Multicommodity flows in planar graphs", Journal of Combinatorial Theory, Series B, 31, pp.75-81 (1981).

(12) Okamura,H.:"Multicommodity flows in planar graphs", Discr. Appl.Math., 6, pp.55-62(1983).