数理解析研究所講究録
第626巻 1987年 8-29

完備負曲率多様体上の調和関数とHardy空間

東北大理　新井 仁之 (Hitoshi Arai)

M. T. Anderson, D. Sullivan, R. Schoen は、単位円板上の調和関数に関するいくつかの結果を、断面曲率 K_M が $-b^2 \leqq K_M \leqq -a^2$ $(a>0, b>0$ 定数) となっている n 次元完備単連結 Riemann 多様体 (M, g) に一般化した ([1], [2], [3])。とりわけ、Anderson - Schoen [3] では、単位円板上の調和関数の境界値に関する Helgrotz の定理と Fatou の定理が M 上に一般化された。この二つの定理は、古典解析学では非常に重要な役割を果している。実際、単位円板上の調和関数及び正則関数に関する問題は、これらの定理を介して、しばしば、単位円周上の可測関数や測度の解析に帰着され、単位円周上の特異積分作用素ならびに関数空間を用いて解明されることが多い。このことから考えて、Anderson - Schoen [3] の結果は、多様体 M 上の調和関数の研究に、M の理想境界である sphere at infinity $S(\infty)$ 上の解析が利用できる可能性を示していると思

われる。

本稿の目標は、Mの sphere at infinity $S(\infty)$ 上の解析学を展開することである。とりわけ、$S(\infty)$ 上の被覆定理や、Poisson核の評価、及び H^p、BMOなどの関数空間について得られた結果を述べる。

まず、§1〜§4 において、M上の調和関数に関する Anderson, Sullivan, Schoen の結果を紹介し、次に、§5〜§8 において、$S(\infty)$ 上の解析に関して得た結果を述べる。

以下、本稿を通して、(M, g) は n 次元完備単連結 Riemann 多様体で、その断面曲率 K_M は、$-b^2 \leq K_M \leq -a^2$ $(a>0, b>0;$ 定数$)$ をみたしているものとする。また Δ_M を (M, g) に関する Laplace-Beltrami 作用素とする。

§1 Sphere at infinity (Eberlein - O'Neill [4]).

$\mathcal{G} := \{ \gamma : (-\infty, \infty) \to M \mid \gamma$ は測地線で、$g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)) = 1, \ \forall t \}$

とおく。ただし、ここで、$\dot\gamma(t)$ は γ の t における接ベクトルである。$\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{G}$ に対して、

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \sup_{t \geq 0} \operatorname{dist}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) < +\infty$$

と定義する。$\sim$ は、asymptotic relation と呼ばれる同値関係になる。そこで、$S(\infty) := \mathcal{G}/\sim$ なる集合を考える。これが、sphere at infinity である。$S(\infty)$ は、単位円板 D に対する単位

円周 S に相当するものである。

$\bar{M} = M \cup S(\infty)$ とおく。$\bar{M}$ には、次に述べる cone topology が導入され、それによって、$\bar{M}$ は M のコンパクト化になる。これは、丁度、D に S を加えた $D \cup S$ が D のコンパクト化になっているという事実に対応している。

— cone topology —

$p \in M$ に対し、$S_p := \{ v \in T_pM : \|v\| := \sqrt{g_p(v,v)} = 1 \}$ とおく。そして、$v \in S_p$, $0 < \delta < 2\pi$ に対して、

$$C_p(v,\delta) := \{ x \in \bar{M} : \measuredangle_p(v,x) < \delta \}$$

とおく。ただし、ここで、$\measuredangle_p(v,x)$ は、p と x を結ぶ唯一つの unit speed の測地線 γ_{px} の p での接ベクトル $\dot{\gamma}_{px}(0)$ とベクトル v との点 p における角度を表わす記号である。

また、$v \in S_p$, $0 < \delta < 2\pi$, $r > 0$ に対して、

$$T_p(v,\delta,r) := C_p(v,\delta) - B_p(r)$$

($B_p(r) := \{ q \in M : dist(p,q) < r \}$) とおく。$T_p(v,\delta,r)$ は truncated cone と呼ばれるもので、cone topology は、この truncated cone を使って定義される：

<u>定理 (Eberlein - O'Neill [4]).</u> $\mathcal{B}_p := \{ T_p(v,\delta,r) : v \in S_p, 0 < \delta < 2\pi, r > 0 \} \cup \{ B_q(r) : q \in M, r > 0 \}$ とおく。このとき、$\mathcal{B}_p$ は $\bar{M}$ のある位相 $\mathcal{O}_p$ の局所基底を与え、この位相 $\mathcal{O}_p$ により、$\bar{M}$ はコンパクト空間になる。

この $\mathcal{O}_p$ を cone topology という。

Cone topology のおもな性質は次の通りである([4]):

(1) $\mathcal{O}_p \approx \mathcal{O}_q$ $(p \neq q)$ $\approx$: 同相。

(2) $(\bar{M}, \mathcal{O}_p)$ は $\{z \in \mathbb{R}^n : |z| \leq 1\}$ と同相.

(3) $(S(\infty), \mathcal{O}_p|_{S(\infty)})$ は、$\{z \in \mathbb{R}^n : |z| = 1\}$ と同相.

(4) $(M, \mathcal{O}_p|_M)$ は M の initial topology と一致している。

((5) (Cartan-Hadamard) M は $\mathbb{R}^n$ と微分同型).

§2. Sphere at infinity の regularity (Anderson [1], Sullivan [2]).

$S(\infty)$ の regularity は、1983年に M. T. Anderson [1] 及び D. Sullivan [2] により(異なった方法で)証明された:

定理 ([1], [2]; [3]). $\forall f \in C(S(\infty)), \exists_1 \tilde{f} \in C(\bar{M}) \cap C^2(M)$:

$$\Delta_M \tilde{f}(x) = 0 \quad (x \in M) \quad \& \quad \tilde{f}(y) = f(y) \quad (y \in S(\infty))$$

この定理から調和測度と Poisson 核の定義が与えられる:

$x \in M$ をとり固定する。$f \in C(S(\infty))$ に対して、$\varphi_x(f) := \tilde{f}(x)$ とする。φ_x は $C(S(\infty))$ 上の連続線形汎関数になる(連続性は、[1, Prop. 1.1] より従う)。また、$\varphi_x(1) = 1 = \|\varphi_x\|$ であるから、Riesz-角谷の定理より、$S(\infty)$ 上の正値 Borel 測度 ω^x で、$\varphi_x(f) = \int f d\omega^x$ $(f \in C(S(\infty)))$ なるものが唯一つ存在する。この ω^x

が x と D に関する調和測度である。

さて、$x, y \in M$ $(x \neq y)$ と、$x, y \in \Omega$ なる領域で、コンパクトな閉包 $\overline{\Omega} \subset M$ をもつものをとる。このとき、Δ_M は、$\overline{\Omega}$ 上で一様楕円であるから、Interior Harnack inequality ([5]) より、

$$\exists C > 0, \ \forall U \subset S(\infty) \ (\text{Borel 集合}) : \ \omega^x(U) \leq C \omega^y(U)$$

が得られる。($\because$ $\omega^{\cdot}(U)$ は M 上の正値調和関数 cf. [1, Th 4.1])。すなわち、Radon-Nikodym の定理により、

$$\exists_1 K_y(x, \cdot) \in L^1(S(\infty), \omega^y) : \quad d\omega^x = K_y(x, \cdot) d\omega^y$$

となる。$K_y(x, \cdot)$ が Poisson 核と呼ばれる関数である。

M 上の調和関数の解析においては、調和測度 ω^x や Poisson 核の評価を行うことが本質的である。このための最も強力な定理が、次に述べる Comparison principle である。

§3. The Comparison Principle (Anderson-Schoen [3]).

古くから知られ、しばしば用いられる不等式の一つに、Interior Harnack inequality がある。これは、二つの正値調和関数の値を比較する不等式である。しかし、この不等式は、よく知られているように、境界の近くでは、その精度が非常に悪くなる。これに対し、L. Caffarelli らは、[6] において、二つのある種の正値調和関数は、その比の値を比較するのであれば、境界の近くでも、精度を悪くすることなく比較できる

ことを、$\mathbb{R}^n$ の Laplacian (or 一様楕円型作用素) に対して証明した。Δ_M は一様楕円でないので、この結果ないしはその証明方法は、われわれの設定では使えない。しかし、Anderson-Schoen [3] は、この結果が、ある意味で、M 上でも成立することを証明した。それが、次にあげる comparison principle である：

<u>定理 (The Comparison Principle ; [3]).</u>　$o \in M$, $v_0 \in S_0$ とする。u, v を $\overline{C_o(v_0, \frac{\pi}{4})}$ 上で連続な $C_o(v_0, \frac{\pi}{4})$ 上の調和関数で、

$$u\Big|_{\overline{C_o(v_0,\frac{\pi}{4})} \cap S(\infty)} = v\Big|_{\overline{C_o(v_0,\frac{\pi}{4})} \cap S(\infty)} = 0$$

であるとする。このとき、

$$\frac{1}{C_1}\frac{u(o')}{v(o')} \leqq \frac{u(x)}{v(x)} \leqq C_1 \frac{u(o')}{v(o')} \qquad (x \in T_o(v_0, \tfrac{\pi}{8}, 1))$$

が成立する。ただし、$o' = \exp_o(v_0)$ であり、C_1 は n, a, b にのみ依存した定数である。

ユークリッド空間とそれに関する Laplacian $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ の解析学で示されているように、comparison principle からは多くの結果が得られる (cf. [6])。その証明方法を形式的にくり返すことにより、M 上で次のことが得られる ([3])：

(1) kernel function の存在と一意性 ([3, Cor. 5.3]).

(2) $K_y(x, \cdot) \in C^\alpha(S(\infty))$, $\overset{\exists}{0<\alpha<1}$ ([3, Cor. 6.4]).

(3)（Helgrotz の定理の一般化 ―Martin の表現定理）; u を M 上の正値調和関数とすると、$S(\infty)$ 上の有限な正値 Borel 測度 μ_y で、 $u(x)=\int K_y(x,Q)\,d\mu_y(Q)$ $(x\in M)$ が $y\in M$ を決めるごとに一意的に存在する。

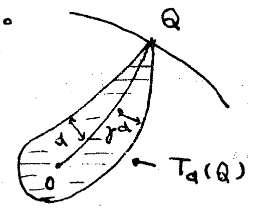
§4. Non-tangential behavior (Anderson-Schoen [3]).

以下、本稿を通して、$0\in M$ を任意にとり固定した点とし、$\omega=\omega^0$, $K(\cdot,\cdot)=K_0(\cdot,\cdot)$ と表わすことにする。

$\gamma:[0,+\infty)\to M$ を $\gamma(0)=0$ なる unit speed の測地線とし、$Q:=\gamma(+\infty)\in S(\infty)$ とおく。このとき、

$$T_d(Q):=\{x\in M:\ dist(x,\gamma)<d\}\qquad(d>0)$$

とし、これを Q での nontangential cone という。



$\Omega\subset M$ なる領域が、Q での nontangential domain とは、

(i) $\bar{\Omega}\cap S(\infty)=\{Q\}$

(ii) Q の $\bar{M}$ でのある近傍 V において、$\Omega\cap V\subset T_d(Q)$ $({}^{\exists}d>0)$

をみたすものである。

定義（Anderson-Schoen [3]）. M 上の関数 u が、$Q\in S(\infty)$ で nontangential limit L をもつとは、Q でのすべての non-tangential domain Ω に対して、$\lim\limits_{\substack{x\to Q\\ x\in\Omega}} u(x)=L$ をみたすことである。

M上の調和関数が、どのような条件のもとに、nontangential limit をもつか、という問題は、解析学では、興味ある問題であり、ユークリッド空間の場合には、P. Fatou, I. Privalov, A. Calderon, L. Carleson, E. Stein らにより詳細な研究がなされた(cf. [7])。M上でのこの種の研究は、Anderson-Schoen [3] によりはじめられた。Anderson-Schoen の結果は、次のものである：

<u>定理 (Anderson-Schoen [3])</u>　u を M 上の正値調和関数とする。このとき、ω-a.e. の点 $Q \in S(\infty)$ に対して、u の nontangential limit が存在する。さらに、limit function f — すなわち $f(Q) = \lim_{\substack{x \to Q \\ x \in T_\alpha(Q)}} u(x)$ (ω-a.e. Q)— は、u を表現する $S(\infty)$ 上の測度 μ の絶対連続な部分である。

この定理の Anderson-Schoen [3] による証明は、$S(\infty)$ 上の解析学を展開するためのヒントになるものを多く含んでいるため、その証明の outline を述べておく： まず nontangential maximal function と Hardy-Littlewood maximal function が導入される。

1° f を M 上の関数とし、

$$f^*(Q) := \sup\{|f(z)| : z \in T_\alpha(Q)\} \qquad (Q \in S(\infty))$$

と定める。f^*を f の nontangential maximal function という。

2° $Q \in S(\infty)$, $t>0$ に対し、$\Delta(Q,t) := C_0(\dot{\gamma}_{0Q}(0), \frac{\pi}{4}) \cap S(\infty)$ とおく。ただし、γ_{0Q} は $\gamma_{0Q}(0)=0$, $\gamma_{0Q}(+\infty)=Q$ なる unit speed をもつ測地線である。$S(\infty)$ 上の Borel 測度 ν に対して、

$$M_\nu(Q) := \sup_{t>0} \frac{|\nu|(\Delta(Q,t))}{\omega(\Delta(Q,t))} \qquad (|\nu| \text{ は } \nu \text{ の全変動})$$

とおく。これが ν の Hardy - Littlewood の maximal function である。特に、$f \in L^1(S(\infty),\omega)$ に対しては、$M_f(Q) := M_{f\omega}(Q)$ $= \sup_{t>0} \frac{1}{\omega(\Delta(Q,t))} \int_{\Delta(Q,t)} |f| d\omega$ とおく。

この二つの maximal function を使って、次のような証明が続く：

Step 1. $S(\infty)$ 上の有限 Borel 測度 μ と $u(x) := \int K(x,Q) d\mu(Q)$ $(x \in M)$ に対して、$u^*(Q) \leqq C_1 M_\mu(Q)$ $(\forall Q \in S(\infty))$; C_1 は n, a, b にのみ依存した定数。

Step 2 $\omega\{Q \in S(\infty) : M_\mu(Q) > \lambda\} \leqq \frac{C_2}{\lambda} \|\mu\|$ $(\lambda > 0)$ (C_2 は n, a, b にのみ依存した定数)。

Step 3 $d\mu = f d\omega + d\nu$ (Lebesgue 分解)

Step 4 $\Omega_f(Q) := \overline{\lim_{\substack{x \to Q \\ x \in T_\alpha(Q)}}} u_a(x) - \underline{\lim_{\substack{x \to Q \\ x \in T_\alpha(Q)}}} u_a(x)$ とおく。ただし

$u_a(x) = \int f(Q) K(x,Q) d\omega(Q)$. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g \in C(S(\infty))$: $\|f+g\|_{L^1(\omega)} < \varepsilon^2$.

$\Omega_g \equiv 0$ より、$\Omega_f = \Omega_{f+g} \leqq 2u_a^* \leqq 2C_1 M_{u_a}$ (by Step 1)。従って

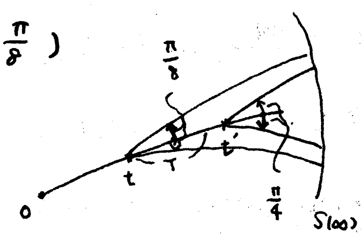
Step 2 より、 $\omega\{\theta : \Omega_f(\theta) > \varepsilon\} \leq \frac{C_2}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{2C_1}\|f+g\|_{L^1} \leq C_3\varepsilon$ となるから $\Omega_f = 0$ a.e.

Step 5. $u_s(x) = \int_{S(\infty)} K(x,\theta)\,d\nu(\theta)$ は non-tangencial limit 0 をもつ。

このように、Step 1, Step 2 が非常に重要な部分である。特に、Step 2 のタイプの不等式は、Hardy-Littlewood maximal theorem といい、古典解析学では、中心的な役割を果たすものである (cf. [7])。Hardy-Littlewood maximal theorem は、すでに、抽象化されていて、doubling condition という条件のもとで証明するメカニズムが知られている ([8])。Anderson-Schoen の証明は、$S(\infty)$ 上の測度 ω が、"ある種の doubling condition" を満たすことを証明し、それをもとに、上述のメカニズムを利用したものである。その"ある種の doubling condition"とは、次のものである：

γ を $\gamma(0)=0$ なる unit speed の測地線とする。$T>0$ を

$$t' \geq t+T \Rightarrow C_{\gamma(t')}\left(\dot\gamma(t'), \frac{\pi}{4}\right) \subset C_{\gamma(t)}\left(\dot\gamma(t), \frac{\pi}{8}\right)$$



となるようにとる。ただし、T は、γ に依存しない定数としてとる。

(実際、M が定曲率ならば、このような T がとれることは、cosine rule を使えば容易にわかることであるし、$-b^2 \leq K_M \leq -a^2$

であれば、Rauch の比較定理を使えばよい)。

さて、この $T>0$ に対して、

$t_0=0,\ t_{\pm1}=\pm T,\ t_{\pm2}=\pm 2T,\ \cdots$

とし、$\Delta_i(Q):=C_{\gamma_{0,Q}(t_i)}(\gamma_{0,Q}(t_i),\frac{\pi}{4})\cap S(\infty)\ (i\in\mathbb{Z})$ とおく。このとき、

命題 (Anderson-Schoen [3]).

$\exists K>0,\ \forall Q\in S(\infty),\ \forall i\in\mathbb{Z}:\ \omega(\Delta_{i-1}(Q))\leq K\omega(\Delta_i(Q))$

このことを [3] では、doubling condition と呼んでいる。

(注) 本来の doubling condition とは quasi-metric space (X,ρ) とその上の測度 μ が、$\exists K>0,\ \forall x\in X,\ \forall r>0:\ \mu(B(x,2r))\leqq K\mu(B(x,r))$; 但し $B(x,s)=\{y\in X:\ \rho(x,y)<s\}\ (s>0)$ を満たすという条件である (cf. [8]; [9]).

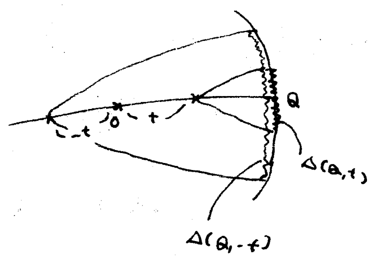
§5. Sphere at infinity 上の調和解析.

まず、sphere at infinity 上の調和解析を展開する。これは、球面上の調和解析の一般化に相当する。ところで、球面上の調和解析は Coifman, Weiss により、doubling condition をみたす測度をもつ quasi-metric space にまで一般化されている ([8], [9])。この§では sphere at infinity 上の調和解析のために、Coifman-Weiss の設定から quasi-metric を取り除くことを試みる。

最初に、前§の最後で述べた Anderson-Schoen による doubling condition がもう少し拡張された形で成立することを示しておく:

<u>補題1</u> $\Delta(Q,t) := C_{\gamma_{0Q}(t)}(\dot{\gamma}_{0Q}(t), \frac{\pi}{4})$ ($Q\in S(\infty)$, $t\in\mathbb{R}$) とおく。

このとき、



$\exists C_1>0,\ \forall Q\in S(\infty),\ \forall t\in\mathbb{R}$:

$$\omega(\Delta(Q,t-1)) \leqq C_1\,\omega(\Delta(Q,t))$$

Anderson-Schoen [3, p.456] に着目することにより、$S(\infty)$ を次のように抽象化する:

W を Hausdorff 空間とし、μ を W 上の正値Borel測度とする。(W,μ) が 各 $Q\in W$, $t\in\mathbb{R}$ に対して次の条件 (1)~(4) をみたす Q の開近傍 $\Delta_t(Q)$ をもつとき、$(W,\mu;\{\Delta_t(Q)\})$ を(便宜上) generalized sphere at infinity と呼ぶことにする:

(1) $W = \lim_{t\to-\infty}\Delta_t(Q) \supset \Delta_r(Q) \supset\supset \Delta_{r+s}(Q) \supset \lim_{t\to+\infty}\Delta_t(Q) = \{Q\}$, $Q\in W, r\in\mathbb{R}, s>0$. ただし、ここで $A\supset\supset B$ は B の閉包 $\bar{B}$ が $A\supset\bar{B}$ となることを意味する。

(2) $\exists k>0,\ \forall Q\in W\ \forall R\in W,\ \forall r\in\mathbb{R}$:

$$\Delta_r(Q)\cap\Delta_r(R)\neq\phi \ \Rightarrow\ \Delta_{r-k}(Q)\supset\Delta_r(Q)$$

(3) $0<\mu(\Delta_r(Q))<+\infty$, $\forall Q\in W$, $\forall r>0$.

(4) $\exists C>0,\ \forall Q\in W,\ \forall r\in\mathbb{R}$: $\mu(\Delta_{r-1}(Q)) \leqq C\mu(\Delta_r(Q))$

<u>例1</u>：$(S(\infty), \omega ; \{\Delta(Q,t)\})$ は generalized sphere at infinity である。ただし、$\Delta(Q,t)$ は補題1で定めたものとする。

<u>例2</u>　(X, ρ, μ) が Coifman-Weiss [9] の意味での space of homogeneous type ならば、$(X, \mu ; \{\Delta_t(Q)\})$ （ただし、$\Delta_t(Q) := \{y \in X : \rho(y, Q) < e^{-t}\}$）は、generalized sphere at infinity である。たとえば、次のものがそれにあたる：

(i) $X :=$ "R^n 内の Lipschitz 領域の境界"，$\rho :=$ ユークリッド距離，$\mu :=$ 調和測度．

(ii) $X :=$ "compact Riemann 多様体"，$\rho :=$ "Riemann 計量から導入される距離関数"，$\mu :=$ "Riemann 計量から導入される M 上の測度"

(iii) $X :=$ "$Ric \geq 0$ なる完備 Riemann 多様体"，ρ, μ は (ii) と同じ定義によるもの．

Anderson-Schoen [3] は、sphere at infinity $S(\infty)$ と調和測度 ω、及び §4 で述べた $\Delta_i(Q)$ $(Q \in S(\infty), i \in Z)$ が Vitali の被覆定理（のアナロジー）をみたすことを指摘している。じつは、われわれの設定 — すなわち generalized sphere at infinity — においても、Vitali 型の被覆定理は成立している。さらに、Generalized sphere at infinity の設定のもとで、Whitney 型の被覆定理も証明できる。このことから、Coifman-Weiss [9] によ

って導入された Atomic Hardy space の理論のほとんどすべての部分が、より一般の $(W, \mu, \{\Delta_t(\Omega)\})$ に一般化できることもわかる：

— Atom と BMO —

Atom は、特異積分作用素の連続性の研究をするために、R. Coifman により導入されたものであるが、われわれは、$S(\infty)$ 上の解析を行うために、この atom の考え方を利用する。以下、この § では、$(W, \mu, \{\Delta_t(\Omega)\})$ は generalized sphere at infinity であるとする。

$0<p\leqq 1$ とする。$a\in L^1(W,\mu)$ が p-atom とは、

$$\exists \Delta_t(\Omega) : \quad \mathrm{supp}(a)\subset \Delta_t(\Omega), \quad \|a\|_\infty^p \leqq \frac{1}{\mu(\Delta_t(\Omega))} \quad \& \quad \int_{\Delta_t(\Omega)} a\,d\mu = 0$$

をみたすことである。特に、$\mu(W)<+\infty$ のときは、$a(x)\equiv \mu(W)^{-1/p}$ も 1 つの p-atom とみなすことにする。

このとき、atomic Hardy space $H^1_{at}(\mu)$ の定義は次のようになる：

$$H^1_{at} := \left\{ f\in L^1(W,\mu) : \ \|f\|_{H^1_{at}} := \inf\left\{ \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j| : \ f=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j a_j \text{ a.e.}, \ \lambda_j\in\mathbb{R}, \ a_j ; \text{1-atom} \right\} < +\infty \right\}$$

ところで、1961年、F. John, L. Nirenberg ([13]) は、$\mathbb{R}^n$ 上に BMO 空間を定義した。BMO とは Bounded Mean Oscillation の略である。$(W, \mu; \{\Delta_t(\Omega)\})$ の設定のもとでは、BMO を次のように定義す

ることが自然であろう： $f\in L^1(W,\mu)$ に対して、

$$\|f\|_{BMO} := \sup\left\{ \frac{1}{\mu(\Delta_t(Q))}\int_{\Delta_t(Q)} \left| f(\xi) - \frac{1}{\mu(\Delta_t(Q))}\int_{\Delta_t(Q)} f\,d\mu \right| d\mu(\xi) ; t\in\mathbb{R},\right.$$

$\left. Q\in W \right\}$，とおく、$BMO := \{f\in L^1(W,\mu) : \|f\|_{BMO} < +\infty\}$。

この§での主要定理は、H^1-BMO 双対性が、$(W,\mu;\{\Delta_t(Q)\})$ 上でも成立するということである：

定理1. H^1_{at} の共役空間は、次の意味で、BMOに同型である： 任意の $h=\sum\lambda_j a_j\in H^1_{at}$ と任意の $l\in BMO$ に対して、$\langle h,l\rangle := \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\int a_j l\,d\mu$ は、H^1_{at} 上の well-defined な連続線形汎関数であり、そのノルムは、$\|l\|_{BMO}$ と同値である。また、H^1_{at} 上のすべての連続線形汎関数は、上述の形をしている。

注意. 定理1は、Coifman-Weiss [9, Theorem B] の $(W,\mu;\{\Delta_t(Q)\})$ への一般化である。この他にも、Coifman-Weiss の atom 理論の多くが一般化できるが、ここでは省略する。

§6. Nontangential maximal function について.

Nontangential domain 及び nontangential maximal function は §4で Anderson-Schoen [3] によるものを紹介した。しかし、§5の atom 理論や後述の Brown 運動との関連をつけようとす

る場合、nontangential domain を $C_p(v,\delta)$ から定義しておく方が都合がよい。本稿では、次のような定義を与える：

$p\in M$, $Q\in S(\infty)$, $\delta>0$ に対して、

$$C(p,Q,\delta) := \{x\in\overline{M} : \measuredangle_p(\dot{\gamma}_{p,Q}(0),\ \dot{\gamma}_{p,x}(0))<\delta\}$$

とおく。ただし、$\gamma_{p,y}$ $(y\in\overline{M})$ とは、$\gamma_{p,y}(0)=p$, $\exists t\in(0,\infty] : \gamma_{p,y}(t)=y$ なる unit speed の測地線である。

$Q\in S(\infty)$ に対して、Q を頂点とする Stoltz 領域（のアナロジー）を

$$\Gamma(Q) := \{x\in M : Q\in C(x,\gamma_{0,x}(+\infty),\tfrac{\pi}{4})\cap S(\infty)\}$$

と定義する。そして、関数 u の Γ に関する nontangential maximal function u^{**} を

$$u^{**}(Q) := \sup\{|u(x)| : x\in\Gamma(Q)\}$$

により定める。

まず、9頁 Step 1 の不等式が u^{**} に対しても成立することを示す。そのために、次のような Poisson 核の評価をしておく：

<u>補題2</u>　$\exists C_3>0$, $\exists t_0>0$, $\forall x\in M$:

$$\sup\{K(x,Q) : Q\in\Delta^{(j)}\setminus\Delta^{(j-1)}\}\leq C_3\frac{e^{-j}}{\omega(\Delta^{(j)})}$$

ただし、$\Delta^{(j)}=\Delta(\gamma_{0,x}(+\infty),\ r-jt_0)$, $j=0,1,\cdots j_0$; j_0 は、$\Delta^{(j)}\ni 0$ なる最大の j であり、$r=dist(0,x)$。

この評価と[6, Theorem 4.3]の証明の修正を用いて、9頁 Step 1の μ と u に対して、

$u^{**}(Q) \leqq C_3 M_\mu(Q) \quad \forall Q \in S(\infty)$; C_3 は n, a, b にのみ依存した定数を証明することができる。これより、8頁の定理(Anderson-Schoen [3])において、nontangential limit をそれぞれの意味での nontangential limit — すなわち $f(Q) = \lim_{\substack{x \to Q \\ x \in \Gamma(Q)}} u(x)$ — でおきかえた結果が成り立つことがわかる。

単位円板の場合のアナロジーにより、$S(\infty)$ 上の Hardy 空間を次のように定義する：

$$H^p\,(=H^p(S(\infty),\omega)) := \{ f \in L^1(S(\infty),\omega) : \|f\|_{H^p} := \|N(f)\|_{L^p(S(\infty),\omega)} < \infty \} ,$$

ただし、ここで、$N(f)(Q) := PI[f]^{**}(Q)$; $PI[f](x) := \int K(x,Q) f(Q)\, d\omega(Q)$ (i.e. Poisson 積分)である。

上述の不等式より、$N(f) \leqq C_3 M_f$ となり、容易に、

$$\|f\|_{L^p} \leqq \|N(f)\|_{L^p} \leqq C_4 \|M_f\|_{L^p} \leqq C_5 \|f\|_{L^p} \qquad (1 < p \leqq \infty)$$

が証明できる。ただし C_4, C_5 は n, a, b にのみ依存した定数である。従って、$H^p = L^p$ $(1<p\leqq\infty)$ となる。一方、古典的結果から類推して、$H^1 = H^1_{at}$ になることが予想される。しかし、この証明に古典的理論でのアイデアを利用することは、種々の理由から極めて困難である。そこで、本稿では、この証明のために

Brown 運動及び martingale 理論を用いる。

§7. Brownian maximal function

本稿で使う確率論の記号は、Ikeda-Watanabe [11] 及び D. Sullivan [2] に従う。$\{P_x\}_{x\in M}$ を Δ_M-diffusion とし、$P=P_0$, $E[\ ]=E_0[\ ]$ とする。また、$\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_t(\overline{W}(M))$ とし、$E[\cdot\,|\,\mathcal{F}_t]=E_0[\cdot\,|\,\mathcal{F}_t]$ とする。$w\in\overline{W}(M)$ に対して、$X_t(w):=w(t)$ $(0\leqq t)$ とおき、$f\in L^1(S(\infty),\omega)$ に対して、$Mf_t:=PI[f](X_t)$ $(0\leq t<\infty)$ とおく。Sullivan [2] より、$Mf_\infty=\lim\limits_{t\to+\infty}Mf_t=f(X_\infty)$ a.s. となり、さらに、Mf_t は $(\mathcal{F}_t)$-martingale になる。確率論的 H^p, BMO を次のようにして定義する：

$$H^p_{pr}:=\{f\in L^1(S(\infty),\omega):\ \|f\|_{H^p_{pr}}:=(E[\sup_t|Mf_t|^p])^{1/p}<\infty\},$$

$$BMO_{pr}:=\{f\in L^1(S(\infty),\omega):\ \|f\|_{BMO_{pr}}:=\sup_t\|E[|Mf_\infty-Mf_t|\,|\,\mathcal{F}_t]\|_{L^\infty(P)}<\infty\}.$$

このとき、古典的な場合と同じような証明により、

補題 3 $H^p\subset H^p_{pr}$, $BMO\subset BMO_{pr}$

を得る。なお、古典的な場合については、P. Meyer [12] を参照。補題 3 の逆向きの inclusion もある条件のもとに成立するが、それは後述する。

§8 H^1 と H^1_{at} 及び H^1_{pr}.

次の定理が成立する.

<u>定理２</u> (1) $\exists C>0,\ \forall f\in L^2(\omega):\ \|f\|_{H^1_{at}} \leqq C\|f\|_{H^1}$

(2) M が、

(条件C) $\forall Q\in S(\infty)\ \forall t>0\ \forall z\in C(\gamma_{0,Q}(t), Q, \frac{\pi}{4}):\ \Delta(\gamma_{0,z}(+\infty), t)\cap \overline{C(\gamma_{0,Q}(t), Q, \frac{\pi}{4})} \neq \phi$

をみたすとき、(1)の逆向きの不等式が成立する。従って、$H^1 = H^1_{at}$ である

(3) $\exists C'>0\ \forall f\in H^1\ \forall g\in BMO:\ \|f\|_{H^1_{pr}} \leqq C'\|f\|_{H^1},\ \|g\|_{BMO_{pr}} \leqq C'\|g\|_{BMO}$

(4) (条件C) があれば (3)の逆向きの不等式が成立する。従って、$H^1_{pr} = H^1$, $BMO_{pr} = BMO$.

(注) たとえば、M が 0 で rotationally symmetric ならば(条件 C) はみたされている.

(証明のアウトライン) 以下、$C_1, C_2, \cdots$ は n, a, k にのみ依存した定数とする. $f\in L^2$, $g\in BMO$ に対して、

$$\left|\int fg\,d\omega\right| = |E[Mf_\infty Mg_\infty]| \leqq C_1\|f\|_{H^1_{pr}}\|g\|_{BMO_{pr}} \quad \text{(martingale 理論)}$$
$$\leqq C_2\|f\|_{H^1}\|g\|_{BMO} \quad \text{(補題 3)}.$$

これと定理 1 より (1) が従う。

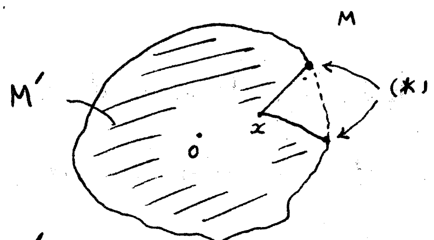
次に、atom のノルム評価を行う。その際、Anderson–Schoen [3] による不等式 $|K(x,Q_0)-K(x,Q_1)| \leqq C_x \angle(Q_0,Q_1)^{\alpha}$ を利用すれば、

良いように思われるが、そのためには、"C_x"の評価が必要である。しかし、C_xは、topologicalに出てくる定数であるので、C_xを評価するためには、別の方法で $K(\cdot,\cdot)$ の評価を行う必要がある。そのため、まず、次の補題を証明しておく：

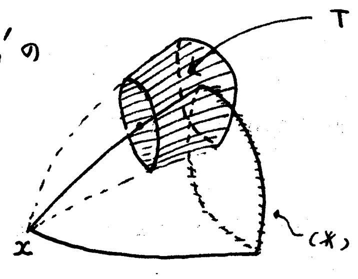
<u>補題4</u>　$\forall x \in M$ をとり、$M' := M \setminus C(x, \gamma_{0,x}(+\infty), \frac{\pi}{4})$ とおく。$\partial M'$をM'の$\overline{M}$での境界とする。このとき、

$$\forall f \in C(\partial M'),\ \exists_1 u \in C(\overline{M'}) \cap C^2(M') : \Delta_M u = 0 \text{ on } M'$$
$$\& \quad u|_{\partial M'} = f$$

が成立する。



これは、本質的には、*Perron method* により証明できる。実際、$\overline{M'} \cap M$ では、classicalな方法でbarrierを作れるし、$(\overline{M'} \cap S(\infty))$の内部では、Anderson [1] のconvex setの構成が利用できる。問題は角の部分(*)であるが、このときは、barrierの定義を若干変更すればよい。— すなわち、[1, Def 1.2] の(3)の部分を、"あるtruncated cone T (軸はxと角に含まれる点を結ぶ測地線)の外部と$\partial M'$の共通部分では $\leqq -\eta$" とすればよい —。次の補題5が"C_x"の評価に相当するものである：



補題５．次をみたすような $r_0>0$ が存在する：　任意の $N\in\mathbb{N}$ と任意の $r\,(>Nr_0+1)$ 及び、次の(i),(ii)を満たす任意の数列 $\{m_j\}$ をとる。

(i)　$0=m_0<m_1<\cdots<m_k<r-1$

(ii)　$m_{j+1}-m_j\geqq r_0$

このとき、$\forall Q_0\in S(\infty)$，$\forall Q_1\in\Delta(Q_0,r)$，$\forall x\in M\setminus C(r_{0,Q_0}(r-m_j),Q_0,\frac{\pi}{4})$：

$$|K(x,Q_0)-K(x,Q_1)|\leqq C_3K(x,Q_0)2^{-j}$$

が成立する。（C_3 は，n,a,b にのみ依存した定数）。

補題５は、Poisson 核 K の評価を、$M\setminus C(r_{0,Q_0}(r-m_j),Q_0,\frac{\pi}{4})$ の Poisson 核 ― その存在は、補題４で保障されている ― の評価に帰着させる方法によって証明できる。（その証明は省略する）

補題４、補題５は、(条件c) とは無関係に成立するものである。(条件c) は、補題５を atom の評価に適用する際に必要になるものである。実際、補題５と (条件c) より、比較的容易に $\|a\|_{H^1}\leqq C_4$　($\forall a$；1-atom) が得られる。(2)は以上の事の直接の結果であり、(3)は補題３により、また(4)は(2)から得られる。■

（以上の résumé として

H. Arai, Harmonic analysis on negatively curved manifolds I, submitted.

がありますが、詳細は他の結果も合わせて別に発表する予定です。）

References

[1] M. T. Anderson, The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature, J. Diff. Geo. 18 (1983), 701-702.

[2] D. Sullivan, The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifolds, J. Diff. Geo. 18 (1983), 723-732.

[3] M. T. Anderson and R. Schoen, Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature, Ann. of Math. 121 (1985), 429-461.

[4] P. Eberlein and B. O'Neill, Visibility manifolds, Pacific J. Math. 46 (1973), 45-109.

[5] D. Gilberg and N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, 1983.

[6] L.Caffarelli et al, Boundary behavior of nonnegative solutions of ellip-tic operators in divergence form, Indiana U.M.J. 30 (1981), 621-640 .

[7] D. S. Jerison and C. Kenig, Boundary behavior of harmonic functions in nontangentially accessible domains, Adv. in Math. 46 (1982), 80-147.

[8] R. R. Coifman and G. Weiss, Analyse Harmonique Non-commutative sur Certains Espaces Homogenes, Lect. Notes in Math. Springer, 242, 1971.

[9] R. R. Coifman and G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, Bull. Amer. Math. SOc. 83 (1977), 569-645.

[10] C. Fefferman and E. M. Stein, H^p spaces of several variables, Acta Math. 129 (1972), 137-193.

[11] N. Ikeda and S. Watanabe, Stochastic Differntial Equations and Diffusion Processes, North Holland/Kohdansya, 1981.

[12] P. A. Meyer, Le dual de $H^1(R^\nu)$; demonstrations probabilistes, Lect. Notes in Math. 581 (1977), 132-195.

[13] F. John and L. Nirenberg, On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure. Appl. Math. 14 (1961), 415-426.