数理解析研究所講究録
第 626 巻 1987 年 115-141

調和写像のエネルギー評価と Liouville型定理への応用

京大数理研　竹腰見昭（Kensho Takegoshi）

Introduction.

この論説は二つの節から成っており，第一節ではある特別なexhaustion functionを持った非コンパクトケーラー多様体から他のケーラー多様体への調和写像のエネルギーを下から評価する事を試みる．ただ調和写像の場合にはtarget の多様体のケーラー計量の曲率に制限が付く．けれども多重調和写像の場合に限るとtargetの多様体のケーラー計量の曲率には無関係に評価できる．これらの評価は，調和写像の場合には調和写像の解析性を示すのに用いられたBedford & Tayler [1] [2] と Siu [9] による積分公式から導かれ，多重調和写像の場合には Donnelly と Xavier [3] による積分公式から導かれる。その評価は今迄知られている評価式より幾分詳しくその精緻さを用いて第二節では，非正或いは漸近的に平坦な曲率を持つ多様体上で，調和関数，正則写像，強多重劣調和

関数に対してLiouville型定理が成立する事を述べる。その手法はこの方面でよく使われて来たMoser [7]の2階の楕円型作用素の議論とは全く異なり，結果として必らずしもMoserの手法が適用出来ない多様体上でもLiouville型定理が成立する事を確認出来る．

第一節　調和写像のエネルギー評価

(M, ds_M^2)を$m \geq 1$次元非コンパクトケーラー多様体とし，$\Phi: M \longrightarrow [0, \infty)$をM上の連続なexhaustion function i.e. 任意の$r \geq 0$に対して$M(r) = \{\Phi < r\}$はMで相対コンパクトとする．今$f: (M, ds_M^2) \longrightarrow (N, ds_N^2)$をケーラー多様体$(N, ds_N^2)$への可微分写像とする．$(g_{i\bar{j}})$及び$(h_{\alpha\bar{\beta}})$により$ds_M^2$及び$ds_N^2$の計量テンソルを表わす事にする．$f$の$M(r)$上のエネルギー$E(f, r)$は

$$E(f, r) = \int_{M(r)} e(f)\, dv_M$$

$$e(f) = e'(f) + e''(f)$$

$$e'(f) = g^{\bar{j}i} h_{\alpha\bar{\beta}}(f) f_i^\alpha \overline{f_j^\beta}, \quad e''(f) = g^{\bar{j}i} h_{\alpha\bar{\beta}}(f) f_{\bar{j}}^\alpha \overline{f_{\bar{i}}^\beta}$$

で定義される．

定義1.1. ケーラー多様体間の可微分写像$f: (M, ds_M^2) \to (N, ds_N^2)$が

$$\mathrm{Trace}_{ds_M^2} \nabla^{1,0} \bar{\partial} f = 0$$

を満たす時，f は調和であると言う．また

$$\nabla^{1,0}\bar{\partial} f = 0$$

を満たす時，f は多重調和であると言う。

ここに $\nabla^{1,0}$ はバンドル $TM \otimes f^{-1}TN$ 上の ds_M^2，$f^* ds_N^2$ によって定まる接続に関する $(1,0)$ 型の共変微分を表わす．特にケーラー多様体間の多重調和写像は調和であり，正則写像は多重調和である。

我々の目的は，f が調和或いは多重調和の時 $E(f,r)$ の増大度を評価する事である。我々は Φ に関して更に次の仮定を置く。

(1.2)　$\Psi := \Phi^2$ は M 上 C^∞ 級であり，Φ は $M \setminus M(r_*)$ 上高々非退化な臨界点しか持たない．

次に (1.2) を満たす Φ と Ψ に関して ds_M^2 に依存して決まる次の二つの定数を定義する。但し以降 M の複素次元は 2 次元以上とする。

(1.3)　$$c_1 := \inf_{x \in M} \sum_{i=2}^{m} \varepsilon_i(x) \quad , \quad c_2 := \sup_{x \in M \setminus M[0]} |\partial \Phi|^2(x)$$

ここで $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \cdots \geq \varepsilon_m$ は Ψ の Levi 型式 $\partial\bar{\partial}\Psi$ の ds_M^2 に関する固有値であり，$M[0] = \{\Phi = 0\}$ である。定数 c_1, c_2 は必らずしも有限とは限らないが，以下 c_1, c_2 は有限と仮定する。エネルギー評価の結果を述べる前にもう少し準備が必要であ

る。

$*$でもって$d\sigma_M^2$に関する星型作用素を表わす。$*$は$C^{p,q}(M)$から$C^{m-q,m-p}(M)$への$*\circ * = (-1)^{p+q}$を満たす実線型作用素である。(s,t)型微分形式vに対して線型作用素$e: C^{p,q}(M) \longrightarrow C^{p+s,q+t}(M)$が$e(v)u = v \wedge u$により定義される。$e(v)^* := *e(v)*$とおくと，$e(v)^*$は$C^{p,q}(M)$から$C^{p-s,p-t}(M)$への線型作用素となる。

Φは$M \setminus M[0]$上可微分であり，$r \geq r_0 = r_* + 1$なるrに対して$\partial M(r) = \{\Phi = r\}$は実$2m-1$次元可微分多様体の部分と有限個の点より成る (cf. (1.2))．$\partial M(r)$の実$2m-1$次元可微分多様体の部分の体積要素dS_rを

$$dv_M = d\Phi / |d\Phi| \wedge dS_r$$

により定義する。以下

$$\omega_r := dS_r / |d\Phi|$$

とおく。

さて可微分写像$f: (M, d\sigma_M^2) \longrightarrow (N, d\sigma_N^2)$に対して，次の関数$B(f,r)$を考える。$r \geq r_0$の時

$$(1.4) \qquad B(f,r) = \frac{1}{c_2} \int_{\partial M(r)} \{ |e(\partial\Phi)^* \partial f|^2 + |e(\bar\partial\Phi)^* \bar\partial f|^2 \} \omega_r$$

ここで$\partial f \in C^{1,0}(M, f^{-1}TN^{1,0})$，$\bar\partial f \in C^{0,1}(M, f^{-1}TN^{1,0})$

であり，従って $e(\partial\Phi)^*\partial f$，$e(\bar\partial\Phi)^*\bar\partial f \in C^{0,0}(M, f^{-1}TN^{1,0})$ である。$|e(\partial\Phi)^*\partial f|$ は $h_{\alpha\bar\beta}$ に関するその長さを表わす。$|e(\bar\partial\Phi)^*\bar\partial f|$ も同様。(1.4) の積分領域は $\partial M(r)$ の実 $2m-1$ 次可微分多様体の部分であり，Schwarz の不等式により $\{\cdot\}\omega_r \leqq e(f)\,|\partial\Phi|\,dS_r$ であるから，$B(f,r)$ の値は有限に定まる．従って Stokes の定理を用いて $B(f,r)$ の右辺を $M(r)$ 上の積分に書き直せば $B(f,r)$ が r について連続な関数である事が判る。

さて我々の調和写像に関するエネルギー評価は次のように述べられる。

定理1.5. (M, ds_M^2) を $m \geqq 2$ 次元ケーラー多様体とし，Φ を (1.2) を満たす exhaustion function で (1.3) で定められた c_1, c_2 が $0 < c_1, c_2 < +\infty$ を満たすとする。

(i) $f : (M, ds_M^2) \to (N, ds_N^2)$ をケーラー多様体 (N, ds_N^2) への非定数多重調和写像とすると，$E(f,r)/r^\mu$ $(\mu = c_1/c_2)$ は r に関して広義単調増加であって，$r > r_0$ に対して評価式

$$e^{x_f(r)} \leqq C_f\, E(f,r)/r^\mu \tag{1.6}$$

が成立する。ここで $C_f > 0$ は r に依存しない定数であり x_f は次で定義される。

$$(1.7) \qquad \chi_f(r) := \int_{r_0}^{r} \frac{B(f,t)}{E(f,t)}\, dt$$

(ii) ds_M^2の基本形式ω_Mが$\omega_M = \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\Phi$ i.e. Φは強多重劣調和，と書かれ，ケーラー多様体(N, ds_N^2)のリーマン曲率がSiuの意味でstrongly semi-negative (cf. [9] 後述)であれば，非定数調和写像 $f:(M, ds_M^2) \longrightarrow (N, ds_N^2)$に対して(i)の主張が成立する。但しこの時 $\mu = m-1/c_2$.

ここにケーラー計量ds_N^2のリーマン曲率$R^N_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}$が

$$R^N_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}\,(A^\alpha\overline{B^\beta} - C^\alpha\overline{D^\beta})\overline{(A^\gamma\overline{B^\delta} - C^\gamma\overline{D^\delta})} \geq 0$$

を任意の複素数A^α, B^β, C^γ, D^δに対して満たす時，Siuの意味でstrongly semi-negativeと呼ばれる。但し$R^N_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} = \partial_\gamma\partial_{\bar{\delta}}h_{\alpha\bar{\beta}} - h^{\bar{\mu}\lambda}\partial_\alpha h_{\gamma\bar{\mu}}\partial_{\bar{\beta}}h_{\lambda\bar{\delta}}$である。例えば$\mathbb{C}^m$，複素トーラス，$\mathbb{C}^m$上の有界対称領域にはこのような性質を満たすケーラー計量が存在する。従って特に(ii)においてfが調和関数の場合には$(N, ds_N^2) = (\mathbb{C}, dz d\bar{z})$として$f$のエネルギー評価を得る。

定理1.5を示すのには次の二つの積分公式が用いられる。

命題1.8. (M, ds_M^2) を $m \geqq 2$ 次元ケーラー多様体とし Φ を(1.2)を満たす exhaustion function とする。$f:(M, ds_M^2) \to (N, ds_N^2)$ をケーラー多様体 (N, ds_N^2) への可微分写像とする。任意の $r \geqq r_0$ に対して

(i)

(1.9)
$$\int_{M(r)} \{ 2[\mathrm{Trace}_{ds_M^2}\mathcal{L}(\Phi)\cdot e(f) - \langle \mathcal{L}(\Phi)(\partial f), \partial f\rangle - \langle \mathcal{L}(\Phi)(\bar\partial f), \bar\partial f\rangle]$$
$$+ \langle e(\partial\Phi)^* \partial f, D_{1,0}^* \partial f\rangle + \langle D_{0,1}^* \bar\partial f, e(\bar\partial\Phi)^* \bar\partial f\rangle$$
$$+ \langle e(\bar\partial\Phi)\partial f, D_{0,1}\partial f\rangle + \langle D_{1,0}\bar\partial f, e(\partial\Phi)\bar\partial f\rangle \} dv_M$$
$$= 2r\int_{\partial M(r)} [|\partial\Phi|^2 e(f) - |e(\partial\Phi)^*\partial f|^2 - |e(\bar\partial\Phi)^*\bar\partial f|^2]\,\omega_r$$

ここに $D_{1,0}^* = -*D_{0,1}*$, $D_{0,1}^* = -*D_{1,0}*$, $\mathcal{L}(\Phi)(\partial f) = g^{\bar i k}\Phi_{j\bar i} f^\alpha_k \in C^{1,0}(M, f^{-1}TN^{1,0})$, $\mathcal{L}(\Phi)(\bar\partial f) = g^{\bar k i}\Phi_{i\bar j} f^\alpha_{\bar k} \in C^{0,1}(M, f^{-1}TN^{1,0})$.

(ii) もし $\omega_M = \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\Phi$ ならば

(1.10)
$$\int_{M(r)} \eta_r \langle h_N, D_{1,0}\partial f \wedge \bar D_{1,0}\partial\bar f\rangle \wedge \omega_M^{m-2}$$
$$= c_m \{ \int_{M(r)} \eta_r \langle R^N, \bar\partial f\wedge\partial\bar f\wedge\partial f\wedge\overline{\partial f}\rangle\wedge\omega_M^{m-2}$$
$$+ r\int_{\partial M(r)} |\bar\partial_b f|^2\omega_r - (m-1)\int_{M(r)} e''(f)\,dv_M \}$$

ここに $\eta_r = \Phi - r^2$, $\langle h_N, D_{1,0}\bar\partial f \wedge \bar{D}_{1,0}\partial \bar f \rangle$ は h_N と $D_{1,0}\bar\partial f \wedge \bar{D}_{1,0}\partial \bar f$ との縮約, $c_m = (m-2)!\,2^m$

$\langle R^N, \bar\partial f \wedge \partial \bar f \wedge \partial f \wedge \bar\partial \bar f \rangle$

$$= \sum_{i<j} R^N_{\alpha\bar\beta\gamma\bar\delta}(f)\,(f^\alpha_{\bar i}\,\overline{f^\beta_{\bar j}} - f^\alpha_{\bar j}\,\overline{f^\beta_{\bar i}})\,\overline{(f^\delta_{\bar i}\,\overline{f^\gamma_{\bar j}} - f^\delta_{\bar j}\,\overline{f^\gamma_{\bar i}})}$$

$$|\bar\partial_b f|^2 = 2\sum_{i<j} h_{\alpha\bar\beta}(f)\,(\Phi_{\bar i} f^{\alpha j} - \Phi_{\bar j} f^{\alpha i})\,\overline{(\Phi_{\bar i} f^{\beta j} - \Phi_{\bar j} f^{\beta i})}\,.$$

積分公式 (1.9), (1.10) より次の補題が従う。

補題 1.11. (i) 定理 1.5, (i) の状況の下, $f:(M, ds_M^2) \to (N, ds_N^2)$ を非定数多重調和写像とすると次の評価式が成立する。

$$(1.12) \qquad r\frac{\partial}{\partial r}E(f,r) - \mu E(f,r) \geqq r B(f,r)$$

$$(1.13) \qquad \frac{\mu}{r} + \frac{B(f,r)}{E(f,r)} \leqq \frac{\partial}{\partial r}\log E(f,r)$$

但し $\mu = c_1/c_2$, r は $r \geqq r_0$ なる任意の非退化値.

(ii) 定理 1.5, (ii) の状況の下, $f:(M, ds_M^2) \longrightarrow (N, ds_N^2)$ を非定数調和写像とすると (1.12), (1.13) が成立する。

証明. (i). f の多重調和性より, f は

$$D_{0,1}\partial f = D_{1,0}^*\partial f = D_{1,0}\bar\partial f = D_{0,1}^*\bar\partial f = 0$$

を満たす (cf. [11])。任意の点 $x \in M$, $y = f(x) \in N$ のまわりの局所座標を $g_{i\bar j}(x) = \delta_{ij}$, $h_{\alpha\bar\beta}(y) = \delta_{\alpha\beta}$, $\Phi_{i\bar j}(x) = \varepsilon_i \delta_{ij}$

を満たすように取ると，$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \cdots \geq \varepsilon_m$ の時

$$\mathrm{Trace}_{ds_M^2}\mathcal{L}(\Phi)\cdot e(f) - \langle \mathcal{L}(\Phi)(\partial f), \partial f \rangle - \langle \mathcal{L}(\Phi)(\bar\partial f), \bar\partial f \rangle$$
$$\geq \left(\sum_{i=2}^{m} \varepsilon_i\right) e(f)$$

が成立する。この二つの事実と(1.9)より(1.12)が従う。

(1.13)は $E(f, r) > 0$ より (1.12)の両辺を $rE(f, r)$ で割る事により得られる。

(ii) $M(r)$ 上 $\gamma_r < 0$ と f の調和性より(1.10)の左辺は非負である事が判る(cf. [9] Proposition 3)．右辺の第一項は $\gamma_r < 0$ と曲率の仮定から非正である。一方任意の点 $x \in M$ において $g_{i\bar j}(x) = \delta_{ij}$, $h_{\alpha\bar\beta}(f(x)) = \delta_{\alpha\beta}$ とできるから

$$|\bar\partial_b f|^2 = 2\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i<j}|\Phi_i f_j^\alpha - \Phi_j f_i^\alpha|^2 \quad (n = \dim_{\mathbb{C}} N)$$

従って Laglange の等式

$$\left(\sum_i |\Phi_i|^2\right)\left(\sum_{\alpha, j}|f_j^\alpha|^2\right) = \sum_\alpha\sum_{i<j}|\Phi_i f_j^\alpha - \Phi_j f_i^\alpha|^2 + \sum_\alpha\left|\sum_j \Phi_j f_j^\alpha\right|^2$$

と $|\partial\Phi|^2 = 2\sum_i|\Phi_i|^2$ より

$$|\bar\partial_b f|^2 = |\partial\Phi|^2 e''(f) - |e(\bar\partial\Phi)^* \bar\partial f|^2$$

を得る。$\bar f$ に関して(1.10)を用いれば，ケーラー性より $D_{1,0}\bar\partial \bar f \wedge \overline{D_{1,0}\partial \bar f} = D_{1,0}\bar\partial f \wedge \overline{D_{1,0}\partial f}$ が成立するから ∂f に関して同様の事が成立する。両者をたして(1.12)が従い，(1.13)が従う。

証明終了

定理1.5の証明． (ii)の証明は(i)と全く同様だから(i)のみを示す。$E(f, r)/r^{\mu}$ の単調増加性は，(1.12)と臨界値が孤立している事から従う．評価式(1.6)は(1.13)をr_0からrまで積分してexpnentialと合成すれば得られる。

証明終了

さて定理1.5の条件を満たすΦを持ち定数μを決定できるケーラー多様体の典型的例を二つ揚げておく。

例1． $A \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ を$m \geq 2$次元連結閉部分多様体とし，A上のケーラー計量ds_A^2を$\mathbb{C}^n$上のユークリッド計量ds_e^2のA上への制限として定義する．Φを$\mathbb{C}^n$上の距離関数$\|z\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|z^i|^2}$の$A$への制限とする。$z^i = w^i - a^i$ ， $a = (a^1, \ldots, a^n) \in A$と$\mathbb{C}^n$の座標を取り直しておけば$\Phi$は$A$上高々非退化な臨界値しかもたず$\Psi = \Phi^2$は$A$上$C^\infty$級のexhaustion functionである。しかも$\omega_A = \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\Psi$となっているから，$c_1 = m-1$ ($\varepsilon_i = 1$ ， $1 \leq i \leq m$)， $c_2 = 1/2$ である。故に$\mu = 2m-2$．

例2．(M, ds_M^2)を$m \geq 2$次元完備ケーラー多様体でpole $o \in M$ i.e. $\exp_o : T_oM \longrightarrow M$が可微分同相写像を与える，を持つと仮定する。$\Phi$として$o$からの距離関数を考えると，$\Phi$はexhaustionであり$|\partial\Phi|^2 = 1/2$ on Mが判る。しかもこの時ds_M^2のradial curvature ((M, ds_M^2)の断面曲率関数をgradΦを含む実平面に制限して得られる曲率．従って測

地球の球面の tangential 方向については何も言っていない。)

が M 上非正であると $\Phi = \varphi^2$ は M 上の C^∞ 級強多重劣調和関数となり，$c_1 = m-1$ が成立する（cf. [5] Proposition 1.17）．従って $\mu = 2m-2$．更にこの場合 $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\Phi$ から導かれるケーラー計量を考えても $c_1 = m-1$ （$\varepsilon_i = 1$, $1 \leqq i \leqq m$），$c_2 = 1/2$ が確められる。従ってこの場合も $\mu = 2m-2$ を得る。

例 1, 2において，正則写像に関して，$E(f, r)/r^{2m-2}$ の単調増加性は容易に確められる（Stokes の定理と $\partial\bar{\partial}\log\Phi = \partial\bar{\partial}\Phi/r^2$ on $\partial M(r)$ を用いればよい）．しかし評価式 (1.6), (1.12), (1.13) は知られていなかった．第二節で述べられる Liouville 型定理を示すのにこれらの式は重要な役割を果たす。

第二節　調和写像に関する Liouville 型定理

この節では第一節で得られたエネルギー評価を利用して得られる Liouville 型定理についてその背景をも交えながら概説する。ここで述べられる結果はもっと一般的な状況でも成立するのだが，煩雑さを避ける為に第一節の最後で述べた二つの例にそくして述べる事にする。

まず例 1 の m 次元連結閉部分多様体 $(A, ds_A^2) \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, ds_e^2)$ を考える。そこで次の量を考える．

$$n(A, r) := \mathrm{Vol}(B(r) \cap A)/r^{2m}$$

ここで $B(r)=\{\|z\|<r\}$ であり $\mathrm{Vol}(B(r)\cap A)$ は $B(r)\cap A$ の ds_A^2 に関する体積である。この時 $n(A,r)$ は任意の A に対して広義単調増加関数である（$\mathrm{Vol}(B(r)\cap A)\sim\int_{B(r)\cap A}\bigwedge^m dd^c\|z\|^2$ に注意せよ）。更に次の量を考える。

$$N(A,r):=\int_\alpha^r n(A,t)\,d\log t \qquad (\alpha=\inf_{x\in A}\Phi(x)+1)$$

この時次が成立する。

(2.1) $A\hookrightarrow\mathbb{C}^n$ がアフィン代数的である為の必要十分条件は $N(A,r)=O(\log r)$（$\Leftrightarrow n(A,r)=O(1)$，$n(A,r)$ の単調増加性より従う）である。

なおここで $n(A,r)$ の他に $N(A,r)$ を考える訳は $A\hookrightarrow\mathbb{C}^n$ が $\mathbb{C}^n$ 上の正則関数の零点として定義されている時などは $n(A,r)$ より $N(A,r)$ の方が上からも下からも評価し易い事（値分布論で言う，第一主要定理が使える）に帰因する。

今 $(A,ds_A^2)\hookrightarrow(\mathbb{C}^n,ds_e^2)$ をアフィン代数的とすると次のような Liouville 型定理が成立する事が知られている。

定理2.2. $(A,ds_A^2)\hookrightarrow(\mathbb{C}^n,ds_e^2)$ がアフィン代数的の時次の主張 α), β), γ) が成立する。

α) A 上には有界非定数調和関数は存在しない

β) $f: A\to N$ を既約かつ被約なコンパクト解析空間への正則写像とし，$L\to N$ を N 上の very ample 正則直線束とする。

もし集合 $E_f(L)=\{\sigma\in\mathbb{P}(\Gamma(N,L)):\mathrm{Im}f\cap\mathrm{supp}(\sigma)=\phi\}$ が $\mathbb{P}(\Gamma(N,L))$ で正の測度を持てば f は定数写像である

γ) $f:A\to N$ を複素多様体 N への正則写像とする。もし N に C^∞ かつ有界な強多重劣調和関数が存在すれば f は定数写像である。特に A 上には C^∞ かつ有界な強多重劣調和関数は存在しない

なお注意として A がアフィン代数的の場合，γ) において"C^∞ かつ有界な強多重劣調和関数"を"有界な多重劣調和関数"としても主張が成立する。更に A 上には次の性質を持つ C^∞ exhaustion function Φ が存在する。

(2.3) $\quad \overset{m}{\wedge}\,\partial\bar\partial\log\Phi\equiv 0\ ,\ \partial\bar\partial\Phi\geq 0$ かつ $\partial\bar\partial\Phi>0$ a.e.

例えば $A=\mathbb{C}^m$ の時，$\Phi=\|z\|^2$ がそれに当たる．(2.3) を満たす Φ を求めようと思えば，A が $\mathbb{C}^m$ 上の分岐被覆 $\pi:A\to\mathbb{C}^m$（π は固有）として実現できる事を見，$\mathbb{C}^m$ 上の $\|z\|^2$ を π で持ち上げればよい。

さて与えられた $(A,ds_A^2)\hookrightarrow(\mathbb{C}^n,ds_e^2)$ に対して $N(A,r)$ 或いは $n(A,r)$ を考える時その増大度が最低の時 A はアフィン代数的であった．では A がアフィン代数的でない時定理2.2で述べられた主張 α)，β)，γ) は $N(A,r)$ 或いは $n(A,r)$ が r 位の程度で増大する時まで保たれるだろうか。この方面に

関して今迄に知られている結果として，次の Sibony と Wong [8] による結果がある。まず $N(A,r)$ は A が特異点を持つ時にも定義できる量である事に注意して，

定理 2.4. $A \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ を $m \geq 1$ 次元既約な解析的閉部分空間とする。この時

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{N(A,r)}{(\log r)^2} < +\infty$$

ならば A 上には有界非定数正則関数は存在しない。

第一節におけるエネルギー評価の応用として A が非特異である時次の定理を示す事が出来る。

定理 2.5. $(A, d\sigma_A^2) \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, d\sigma_e^2)$ を $m \geq 2$ 次元連結閉部分多様体とする。この時

$$(*) \qquad \lim_{r\to\infty} \frac{N(A,r)}{(\log r)^2 \log\log r} < +\infty$$

ならば定理 2.2 の主張 α), β), γ) が成立する。

なお蛇足ながら (*) は $\liminf_{r\to\infty} N(A,r)/(\log r)^2(\log\log r)^\rho < +\infty$, $0 \leq \rho < 1$ でもよい。(*) を満たす $A \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ でアフィン代数的でないものを構成する事はできる。

さて $L_1(r) = \log r$, $L_{j+1}(r) = L_j(\log r)$ $(j \geq 1)$ とし $g_n(r) := \prod_{j=1}^{n} L_j(r)$ とおく時，次は成立するだろうか。

$(2.6)_j$ $(A, ds_A^2) \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, ds_e^2)$ を定理2.5と同様とする。この時

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(A,r)}{\log r \, g_j(r)} < +\infty$$

ならば定理2.2の主張α), β), γ) が成立するか?

我々は $j=2$ 迄確めた事になるが、一般の場合何故その証明が困難かというと、$\Phi = \|z\|_A$ が非退化とは言え臨界点を持つ為 $E(f,r)/r^{2m-2}$ の下からのより良い評価を得にくい事に帰因する。Φが無限遠で臨界点をもたずしかも $|d\Phi|$ が下に有界の時には $(2.6)_j$ を任意の $j \geq 1$ に対して確認できるが、そのような $(A, ds_A^2) \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, ds_e^2)$ でアフィン代数的なものを構成するのは大変難しく思われる(少なくとも筆者は知らない)。

さて定理2.5の証明を概説しよう。α), β), γ) とも本質的に全く同じ論法((β), (γ) の場合も下の(2.7), (2.8)式を示せばよい)で示されるのでここではα)についてのみ述べる。M上に非定数有界調和関数 f が存在したとして矛盾を導こう。ケーラー性より f は実数値関数としてよい。まず次の評価式が成立する。$r \geq r_0$ なる任意の非臨界値 r に対して

$$(2.7) \qquad E(f,r)^2 \leq c_1 \frac{\partial}{\partial r} \mathrm{Vol}(B(r)\cap A)\, B(f,r)$$

$$(2.8) \qquad \int_{r_0}^{r} \frac{E(f,t)}{t^{2m-1}}\, dt \leq c_2\, N(A,r).$$

(2.7) は $2E(f,r) = \|df\|^2_{B(r)\cap A}$ より部分積分をすれば f の調和性から $\partial B(r)\cap A$ 上の積分のみが残り，それに f の有界性と Schwarz の不等式を用いて得られる。(2.8) を得るには次の Greene と Wu (cf. [4] pp 273–274) による公式を用いる。

$$\frac{\partial}{\partial r}\int_{\partial B(r)\cap A} f^2 |d\Phi|^2 \omega_r = \int_{\partial B(r)\cap A} f^2(-\Delta\Phi)\omega_r + \int_{B(r)\cap A}(-\Delta f^2)\, dv_M$$

の両辺に r^{2m-1} を掛けて r_0 から r まで積分する。部分積分により，$\int_{\partial B(r)\cap A} f^2 |d\Phi|^2 \omega_r$ の絶対連続性，$-\Delta\Phi = (-\Delta\Phi^2 - 2|d\Phi|^2)/2\Phi$，$-\Delta f^2 = 4e(f)$，$\int_{B(r)\cap A}(-\Delta\Phi^2)\, dv_M = 2r\int_{\partial B(r)\cap A}|d\Phi|^2\omega_r$，$-\Delta\Phi^2 = 4m$ を用いれば (2.8) を得る。

仮定より $r \geqq r_0$ ならば ($r_0 \gg 0$ として)

$$n(A,r) \leqq c_3 \log r \log\log r \tag{2.9}$$

としてよい。(1.12)，(2.7)，(2.9) を用いると用いて次を示す事が出来る。

$$\int_{2r_0}^{r} \frac{dt}{t\, n(A,t)} \leqq c_3\, E(f,r)/r^{2m-2} \tag{2.10}$$

$$\left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{E(f,t)}{t^{2m-1} g(t)}\, dt\right)^2 \leqq c_4 \left(c_5 + \int_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t\, g(t)}\right) \times\left(\frac{E(f,r_2)}{r_2^{2m-2}} - \frac{E(f,r_1)}{r_1^{2m-2}}\right) \tag{2.11}$$

但し $r_2 > r_1 > r_0$ かつ $g(r) = \log r \cdot \log\log r$.

$r_{n+1} = \exp(\log r_n)^3$ を満たす数列 $\{r_n\}_{n\geq 1}$, $r_0 < r_1 < \cdots < r_n < \cdots$ を取る。 $\int_{r_n}^{r_{n+1}} dt/tg(t) = \log 3$ であるから (2.11) と $E(f,r)/r^{2m-2}$ の単調増加性より次を得る。

$$(2.12)\quad \left(\frac{E(f,r_n)}{r_n^{2m-2}}\right)^2 \leqq K\left(\frac{E(f,r_{n+1})}{r_{n+1}^{2m-2}} - \frac{E(f,r_n)}{r_n^{2m-2}}\right) \quad (n \geqq 1)$$

但し $K = c_4(c_5 + \log 3)/(\log 3)^2$

(2.9), (2.10) より $r_1 > r_0$ を

$$(2.13)\quad 3K < \frac{E(f,r_1)}{r_1^{2m-2}}$$

を満たすように取る。 $a_n = E(f,r_n)/r_n^{2m-2}$ とおくと (2.12) と (2.13) より 次を得る。

(i) $3K < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$

(ii) $a_n^2 \leqq K(a_{n+1} - a_n) \quad (n \geqq 1)$

従って次を得る。

$$(2.14)\quad \left(\sum_{i=1}^{n-1} 3^{2^i}\right) K \leqq a_n \quad (n \geqq 2)$$

一方 (2.8), (2.9) より $r > r_1$ ならば

$$(2.15)\quad E(f,r)/r^{2m-2} \leqq K' \log\log r$$

としてよい。 $r_n = \exp(\log r_1)^{3^{n-1}}$ $(n \geqq 1)$ であるから (2.15) より次が従う。

$$(2.16)\quad a_n \leqq K' \log r_1\ 3^{n-1} \quad (n \geqq 2)$$

(2.14) と (2.16) より矛盾を得る。

これで定理2.5の証明は終了するのだが，前に述べた $|\partial\Phi|$ が下に有界の場合の証明方針も説明しておく。後に述べる例2の場合の結果 (cf. 定理 2.27) もこの場合と全く同じ方針で証明される。

十分大きな $r_0 \gg 0$ が存在して $A \setminus B(r_0) \cap A$ 上 $|\partial\Phi| \geqq c > 0$ なる c が存在したと仮定する。この時 $(2.6)_j$ $(j \geqq 1)$ が成立する事を見よう。定理2.5の証明と同様に α のみを背理法で示す。我々は (2.7), (2.8)式から出発できる。今 $r \geqq r_0$ なる r に対して

$$n(A, r) \leqq c_6 \, g_j(r) \tag{2.17}$$

としてよい。

$$\int_{B(r) \cap A} (-\Delta\Phi) \, dv_M = 2r \int_{\partial B(r) \cap A} |\partial\Phi|^2 \omega_r, \quad -\Delta\Phi = 4m,$$

$|\partial\Phi| \geqq c > 0$ より次を得る。

$$\frac{\partial}{\partial r} V(r) \leqq c_7 \, V(r)/r \qquad (r \geqq r_0) \tag{2.18}$$

(2.7), (2.17), (2.18) より次を得る。

$$\frac{c_7 \, E(t, r)}{r^{2m-1} g_j(r)} \leqq \frac{B(t, r)}{E(t, r)} \qquad (r \geqq r_0) \tag{2.19}$$

定理1.5, (1.6) と (2.19) より次を得る。

$$(2.20) \qquad \frac{c_8 e^{\chi_f(r)}}{r g_j(r)} \leqq \frac{B(f,r)}{E(f,r)} \qquad (r \geqq r_0)$$

(2.20)の両辺をr_0からrまで積分すれば，(1.7)より

$$(2.21) \qquad c_8 \int_{r_0}^{r} \frac{e^{\chi_f(t)}}{t g_j(t)} dt \leqq \chi_f(r)$$

を得る。一方(2.8)と(2.17)より

$$E(f,r)/r^{2m-2} \leqq c_9\, g_j(2r)$$

だから(2.21)と(1.6)より次を得る。

$$(2.22) \qquad \chi_f(r) \leqq \log g_j(2r) + O(1) \qquad (r \geqq r_0)$$

ところで(2.21)において$\chi_f(r)$を繰り返し下から評価する事により

$$\lim_{r\to\infty} \chi_f(r) / \log g_j(2r) = \infty$$

を得る。これは(2.22)に矛盾する。

以上で$(2.6)_j$が$|\partial \Phi| \geqq c > 0$という条件の下示された。

さて例2で述べた$m \geqq 1$次元完備ケーラー多様体(M, ds^2_M)でpole $o \in M$を持つ場合には，$\Phi(x) = d(o, x)$に対して$|\partial\Phi|^2 = 1/2$が成立する。しかもΦは完備性によりMをexhaustする。poleを持つという条件 i.e. $\exp_o : T_oM \longrightarrow M$が可微分同相写像，はたとえそれが一点であってもかなり強い条件である。

けれどもこのような多様体上では比較的（幾何学的）関数論が展開し易い。

$m=1$ の時次の結果が知られている（cf. [5] Propositions 7.5, 7.6）.

定理2.23.（M, ds_M^2）を実2次元完備リーマン多様体で pole $o \in M$ を持つと仮定する。$\Phi(x) = d(o, x)$ とおく。ds_M^2 の断面曲率はM上至る所非正とする。

(i) 断面曲率Kがあるコンパクト集合の外で

$$K(z) \leqq -\frac{1+\varepsilon}{\Phi(z)^2 \log \Phi(z)} \qquad (\varepsilon > 0)$$

を満たすならば，Mは単位円板の複素構造を持つ。

(ii) Mのあるコンパクト集合の外で

$$K(z) \geqq -\frac{1}{\Phi(z)^2 \log \Phi(z)}$$

を満たすならば，Mは複素平面の複素構造を持つ。

$m \geqq 2$ の時には定理2.23のように美しい結果は知られていないが次の事実は知られている（cf. [5] P56 Theorem C P99 Theorem F）.

定理2.24.（M, ds_M^2）を $m \geqq 2$ 次元完備ケーラー多様体

で pole $o \in M$ を持つとする。 $\Phi(x) = d(o, x)$ とおく。

非負連続関数 k_1, k_2 を

$$-k_1(r) := \min\{0,\ \text{radial curvature at } x \text{ with } \Phi(x)=r\}$$

$$k_2(r) := \max\{0,\qquad \text{〃} \qquad\}$$

で定める時次が成立する。

(i) $\int_0^\infty s\,k_1(s)\,ds < +\infty$ かつ $\int_0^\infty s\,k_2(s)\,ds \leqq 1$ ならば $\exp_o : T_oM \longrightarrow M$ は quasi-isometry を与える i.e. 任意の $X \in T_oM$ に対して

$$(2.25)\qquad c_1|X|_{ds^2_{M,o}} \leqq |d\exp_o X|_{ds^2_M,\,\exp_o X} \leqq c_2|X|_{ds^2_{M,o}}$$

を満たす $c_1, c_2 > 0$ が存在する.

(ii) $k_2(r) \equiv 0$ かつ M のあるコンパクト集合の外で

$$-k_1(r) \leqq -\frac{1+\varepsilon}{r^2 \log r} \qquad (\varepsilon > 0)$$

ならば M 上には C^∞ かつ有界な強多重劣調和関数で M を exhaust するものが存在する

(i)において k_i の例としては $k_i(r) \leqq \varepsilon(\delta)/(r+2)^2(\log(r+2))^{1+\delta}$ ($\varepsilon(\delta) = \delta(\log 2)^\delta$) 等の場合がある。しかし右辺の分母を $(r+2)^2\log(r+2)$ で置き換え $k_i(r) \sim \varepsilon/(r+2)^2\log(r+2)$

とは出来ない。つまり (ii) の場合 $k_2(r)\equiv 0$ かつ M のあるコンパクト集合の外で $-1/r^2\log r \sim -k_1(r)$ としても定理2.23におけるような (ii) との差が出て来るかどうかは定理2.24からは判らない。なお (ii) において Φ^2 はM上強多重劣調和となっている。また (2.25) は $\mathrm{Vol}(B(r),\omega_M^m)/r^{2m}=O(1)$ を意味している。

さて定理2.24の (ii) の場合M上でどのようなLiouville型定理が成立するかと言うと，Moser [7] の結果から次の事実が判る。

定理2.26.　(M,ω_M^m) を定理2.24，(ii) の仮定を満たすものとする。この時M上には正値非定数調和関数は存在しない。特にM上には非定数有界調和関数は存在しない。

この結果は性質 (2.25) $=\omega_M^m$ に関するラプラシアンの一様楕円性から導かれるのであって，この一様楕円性が言えないとMoserの理論は使えない。一方定理2.24の (ii) の仮定を満たす (M,ω_M^m) は $\mathbb{C}^m$ に双正則かどうかは判らないが（実際に $\mathbb{C}^m$ に双正則又は双正則的に等長になる場合が知られている [6] [10]）十分 $\mathbb{C}^m$ に近いと考えられるから，その他にも関数論的に $\mathbb{C}^m$ に近い性質を持つのではないかと考えられる。この点に関して次の定理が成立する。

定理2.27. (M, ω_M^2) を $m \geqq 2$ 次元完備ケーラー多様体で pole $o \in M$ をもつとする。この時次の(i), (ii)のいずれかの仮定の下で，Φ^2 ($\Phi(x) = d(o, x)$) はM上強多重劣調和であって，定理2.2の主張 α), β), γ) が成立する．但しα)における調和性は $\partial\bar\partial\Phi^2$ より導かれるケーラー計量に関する調和性である．

(i) 任意の $x \in M$ に対して

$$|\text{radial curvature at } x| \leqq \frac{\varepsilon}{(\Phi(x)+\eta)^2 \log(\Phi(x)+\eta)}$$

但し $\eta > e$ で ε は次元 m と η に依存して決まる1より十分小さい正定数

(ii) radial curvature はM上至る所非正でコンパクト集合の外では

$$-\frac{\varepsilon}{\Phi(x)^2 \log \Phi(x)} \leqq \text{radial curvature at } x$$

が成立。但し ε は m に依存して決まる1より十分小さい正定数である。

ここでα)における調和性が $\partial\bar\partial\Phi^2$ より導かれるケーラー計量に係るものであるという点は気持ちが良くないけれど，定理2.24, (ii) と定理2.27の(ii)を合わせれば $m \geqq 2$ の

場合でも$(0<\varepsilon\ll1)$ならばC^∞かつ有界な強多重劣調和関数の存在，非存在に関しては判別できた事になる。この定理の証明は与えられたケーラー計量ではなく，$\partial\bar\partial\Phi^2$から導かれるケーラー計量を考える事によりなされ，原理的には$(2\text{-}6)_j$の証明と同じ方法による。また条件(i)或いは(ii)は$\wedge^m\partial\bar\partial\log\Phi^2$が無限遠で0に収束する事を意味しかつその速度を指定している事に他ならない。つまり(2.3)のような$\wedge^m\partial\bar\partial\log\Phi^2\equiv0$という条件は強すぎると思われるので，そのかわりに無限遠で$\wedge^m\partial\bar\partial\log\Phi^2\to0$という条件に置き換えている訳である．ちなみに$\partial\bar\partial\Phi^2$から導かれるケーラー計量に関する$M(r)$の体積$V(r)$に関して(i)，(ii)いずれの場合にも$V(r)/r^{2m}=O((\log r)^{\varepsilon'})$ （ε'は(i)，(ii)のεに依存した1より十分小さな正定数）が成立している。 従って定理2.27も基本的には定理2.5と同じ考え方に従っている事になる。

さて最後に定理2.27から予想される少し無責任な予想を述べてこの論説を終える事にする。なおこの論説の詳細はいずれ論文として発表する予定である。

予想．(M, ds_M^2)を$m\geqq2$次元完備ケーラー多様体としpole $o\in M$を持つとする。$\Phi(x)=d(o,x)$とおく。次のいずれかの仮定の下でMは$\mathbb{C}^m$に双正則であるか？

(cf. [5] [6] [10])

(ii) 任意の点 $x \in M$ で

$$|\text{Sectional curvature at } x| \leqq \frac{\varepsilon}{(\Phi(x)+\gamma)^2 \log(\Phi(x)+\gamma)}$$

が $\gamma > 1$, $0 < \varepsilon \ll 1$ に対して成立する

(iii) Sectional curvature は M 上致る所非正で あるコンパクト集合の外で

$$-\frac{\varepsilon}{\Phi(x)^2 \log \Phi(x)} \leqq \text{Sectionl curvature at } x$$

が $0 < \varepsilon \ll 1$ に対して成立する。

参 考 文 献

[1] Bedford, E., Taylor, B. A., Variational properties of the complex Monge-Ampère equation I., Dirichlet princeple, Duke Math. J. 45 (1978), 375-403.

[2] Bedford, E., Taylor, B. A., Two applications of a nonlinear integral formula to analytic functions, Indiana Univ. Math. J. 29 (1980), 463-465.

[3] Donnelly, H., Xavier, F., On the differential form spectrum of negatively curved Riemannian manifolds, Amer. J. Math. 106 (1984), 169-185

[4] Greene, R. E., Wu, H., Integrals of subharmonic functions on manifolds of non-negative curvature, Invent. Math. 27 (1974), 265-298.

[5] Greene, R. E., Wu, H., Function theory on manifolds which possesses a pole, Lecture Notes in Math. 697, Springer Verlag, 1979.

[6] Mok, N., Siu, Y. T., Yau, S. T., The Poincaré-Lelong equation on complete Kähler manifolds, Comp. Math. 44 (1981), 183-218.

[7] Moser, J., On Harnack's theorem for elliptic differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 577-591.

[8] Sibony, N., Wong, P. M., Some remarks on the Casorati-Weierstraß theorem, Ann. Polonici Math. 39 (1981), 165-174.

[9] Siu, Y. T., The complex analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds, Ann. of. Math. 112 (1980), 225-264.

[10] Siu, Y. T., Yau, S. T., Complete Kähler manifolds with non-positive curvature of faster than quadratic decay, Ann. of Math. 105 (1977), 225-264.

[11] Takegoshi, K., A non-existence theorem for pluriharmonic maps of finite energy, Math. Z., 192 (1986), 21-27.