数理解析研究所講究録
第626巻 1987年 142-156

Vector bundles over quaternionic Kähler manifolds

大阪大学 理学部 D.2 新田貴士 (Takashi Nitta)

quaternionic Kähler manifold とはその holonomy 群が Sp(n)・Sp(1) の部分群に還元する Riemannian manifold を言う。この論説においては、quaternionic Kähler manifold 上の vector bundle にある種の connection を定義してその性質を調べるのが目的である。以下に従って述べる。

§1. 定義
§2. 問題とその背景
§3. 結果
§4. 注意

§1. 定義

$4n$次元の Riemannian manifold が quaternionic Kähler とはその holonomy 群が $Sp(n)\cdot Sp(1)$ の部分群に還元し、かつ $n=1$ の場合は Riemannian manifold として Einstein, self-dual の場合をいう。即ち M の tangent bundle TM の frame bundle が fibre $Sp(n)\cdot Sp(1)$ の部分群なる principal bundle P に還元する。

そこで $Sp(n)\cdot Sp(1)$ の説明を少ししておこう。$\mathbb{H}$を四元数体とする。$\tilde{\rho}$を $Sp(n)\times Sp(1)$ の $\mathbb{R}^{4n}(\simeq \mathbb{H}^n)$への自然な表現とする。つまり$\tilde{\rho}$は次で定義されている。

$$\begin{array}{ccccccc}
\tilde{\rho}: Sp(n)\times Sp(1) & \longrightarrow & SO(4n) & \text{on } \mathbb{R}^{4n}(\simeq \mathbb{H}^n) & & & \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \\
(h_1, h_2) & \longmapsto & \tilde{\rho}(h_1,h_2): & \mathbb{H}^n & \longrightarrow & \mathbb{H}^n & \\
 & & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\
 & & & h & \longmapsto & h_1 h h_2^{-1} & .
\end{array}$$

この時 $\tilde{\rho}(-id,-id)=\tilde{\rho}(id,id)$ でしかも

$$\operatorname{Ker}\tilde{\rho} = \{(id,id),(-id,-id)\} \simeq \mathbb{Z}_2$$

となり準同型定理より $\underset{N-2}{\operatorname{Im}\tilde{\rho}} = Sp(n)\times Sp(1)/\mathbb{Z}_2$

である。 $\mathrm{Im}\,\tilde{\rho}$ (= Image of $\tilde{\rho}$) を $Sp(n)\cdot Sp(1)$ と書いた。$\tilde{\rho}$から決る $Sp(n)\cdot Sp(1)$ の $\mathbb{R}^{4n}$ ($\simeq \mathbb{H}^n$) への表現を ρ とする。ρを調べよう。 そのためにまずρを複素化して調べる。ρの複素化$\rho^{\mathbb{C}}$は $Sp(n)\times Sp(1)$ の $(\mathbb{R}^{4n})^{\mathbb{C}}$ ($\simeq (\mathbb{H}^n)^{\mathbb{C}}$) への表現$\tilde{\rho}^{\mathbb{C}}$からきている。 $Sp(n)\times Sp(1)$ の表現が $Sp(n)\cdot Sp(1)$ の表現におちるかどうかは、$\mathbb{Z}_2$ ($\simeq \{(id, id), (-id, -id)\}$) で不変かどうかだけが問題だから 以下では、めんどうなので同じ記号（〜をつけない）で書くことにする。 $\rho^{\mathbb{C}}$ は $Sp(n)\cdot Sp(1)$ の $(\mathbb{H}^n)^{\mathbb{C}}$への自然な表現である。

$(\mathbb{H}^n)^{\mathbb{C}} = (\mathbb{H}^n \otimes_{\mathbb{H}} \mathbb{H})^{\mathbb{C}} = \mathbb{H}^n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}$ であることに注意する。そこで ρ_n (resp. ρ_1) を $Sp(n)$ (resp. $Sp(1)$) の $\mathbb{C}^{2n}$ ($\simeq \mathbb{H}^n$) (resp. $\mathbb{C}^2$ ($\simeq \mathbb{H}$)) への自然な表現, 即ち、

$$\rho_n : Sp(n) \hookrightarrow SU(2n) \quad \text{on } \mathbb{C}^{2n} \simeq \mathbb{H}^n$$

$$(\text{resp. } \rho_1 : Sp(1) \hookrightarrow SU(2) \quad \text{on } \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{H})$$

とすると、上のことから

$$\rho^{\mathbb{C}} = \rho_n \otimes \rho_1$$

となる。 従って、

$$TM = P \times_{\substack{\rho \\ \shortparallel \\ (\rho_n\otimes\rho_1)_{real}}} (\mathbb{R}^{4n}) \quad , \quad TM^{\mathbb{C}} = P \times_{\substack{\rho^{\mathbb{C}} \\ \shortparallel \\ \rho_n\otimes\rho_1}} (\mathbb{C}^{4n}) \ ,$$

$$T^*M = P \times_{\substack{\rho^* \\ \shortparallel \\ (\rho_n^*\otimes\rho_1^*)_{real}}} (\mathbb{R}^{4n}) \quad , \quad T^*M^{\mathbb{C}} = P \times_{\substack{\rho^{*\mathbb{C}} \\ \shortparallel \\ \rho_n^*\otimes\rho_1^*}} (\mathbb{C}^{4n}) \ ,$$

ここで $(\quad)_{real}$ は表現の real form を表わした。

quaternionic Kähler manifold は twistor space と呼ばれる complex manifold を $S^2 (= \mathbb{P}^1\mathbb{C})$-bundle として持つことが知られている。 ρ_1' を $Sp(1) (\simeq SU(2))$ の $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ への自然な作用とします。すると、$\rho_1'(-id) = \rho_1'(id)$ より、この作用は $Sp(n)\cdot Sp(1)$ の $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ への作用に自然に拡張できる。 つまり、$Sp(n)$ の方は動かさずに $Sp(1)$ の方を ρ_1' で作用させる。 その $Sp(n)\cdot Sp(1)$ の $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ への作用を ρ_1'' と書いておきます。 quaternionic Kähler manifold M の twistor space Z とは、

$$Z = P \times_{\rho_1''} \mathbb{P}^1\mathbb{C} \qquad \text{である。}$$

Salamon [S] によって Z には様々の構造が入る事が知られている。 例えば、Z には自然に complex structure が入る。 fibre $\mathbb{P}^1\mathbb{C} = S^2$ の anti-podal map が Z 上に

$\tau : Z \longrightarrow Z \quad (\tau^2 = id)$ なる map を定める。更に M の Riemannian manifold としての scalar curvature が正の時に Z は自然に Kähler manifold になる。

§2. 問題とその背景

以下では、次の問題を考える。
"quaternionic Kähler manifold 上の vector bundle に canonical な connection を定義してその性質を調べる。"

問題の意味を説明するために上の canonical とはどういうことかを例で説明する。

例1. N を complex manifold, F を N 上の C^∞-Hermitian vector bundle とする。∇ を F 上の Hermitian connection とする時、∇ が (1,0)- connection とは、その curvature R^∇ が End F valued type-(1,1) form である時, 即ち

$$R^\nabla \in \Gamma(N, \mathrm{End}\,F \otimes \Lambda^{1,1} T^*N)$$

をいう。その時、(1,0)- connection ∇ を用いて F 上に complex structure が入ることが知られている。その意味で (1,0)- connection は complex manifold 上の Hermitian vector bundle に canonical な connection である。

例2. 例1の場合に加えて、N を Kähler manifold とする。即ち、Kähler form が存在し、Kähler form をかけるという

$$L : \Lambda^p T^*N \longrightarrow \Lambda^{p+2} T^*N$$

なる operator が存在する。通常の様に L の adjoint を

$$\Lambda : \Lambda^{p+2} T^*N \longrightarrow \Lambda^p T^*N$$

と書く。その時 ∇((1,0)- connection) が Einstein - Hermitian connection とは、ある定数 c が存在して

$$\sqrt{-1}\,(id \otimes \Lambda) R^\nabla = c\, id_F \in \mathrm{End}\, F$$

の時をいう。Einstein- Hermitian connection は代数幾何の stable vector bundle と深い関係があることが知られている。そういう意味で Kähler manifold 上の Hermitian vector bundle には Einstein- Hermitian connection が <u>canonical</u> な connection である。

例3. N' を oriented 4次元 Riemannian manifold とする。その時 $*$ (star operator) が存在し $\Lambda^2 T^*N'$ に $*^2 = id$ を満たして作用する。$*$ の eigen value $+1$ なる eigen space を Λ_+ とし、eigen value -1 なる eigen space を Λ_- とすると、

$$\Lambda^2 T^* N' = \Lambda_+ + \Lambda_-$$

となる。$\Gamma(N', \Lambda_+)$ の元を self-dual form, $\Gamma(N', \Lambda_-)$ の元を anti-self-dual form という。そこで F' を N' 上の metric を持つ vector bundle, ∇' を F' 上の metric connection とする時、∇' が self-dual (resp. anti-self-dual) とは、その curvature $R^{\nabla'}$ が End F'-valued self-dual form (resp. anti-self-dual form) の時をいう。すると self-dual connection, anti-self-dual connection 共に Yang-Mills connection になる。そういう意味で self-dual connection, anti-self-dual connection は oriented 4次元 Riemannian manifold 上の vector bundle に <u>canonical</u> な connection である。

§3. 結果

§2の例でもわかる様に、本質的なのは curvature の形である。 そこで quaternionic Kähler manifold の 2 form の 分解から始める。

$$\Lambda^2 T^*M = P \times_{\Lambda^2\rho^*} \Lambda^2 \mathbb{R}^{4n} .$$

複素化すると

$$\Lambda^2 T^*M^{\mathbb{C}} = P \times_{\Lambda^2\rho^{*\mathbb{C}}} \Lambda^2 \mathbb{C}^{4n} .$$

そこで、 $\Lambda^2 \rho^{*\mathbb{C}} = \Lambda^2 (\rho_n^* \otimes \rho_1^*)$

$$= \Lambda^2 \rho_n^* \otimes S^2 \rho_1^* + S^2 \rho_n^* \otimes \Lambda^2 \rho_1^* .$$

ω_n (resp. ω_1) を $\mathbb{C}^{2n}$ (resp. $\mathbb{C}^2$) 上の symplectic form とする。 即ち $\mathbb{C}^{2n}$ (resp. $\mathbb{C}^2$) 上の $Sp(n)$ (resp. $Sp(1)$) 不変なる2 form である。

$\omega_n \in \Lambda^2 \rho_n^*$ かつ $\mathbb{C}\omega_1 = \Lambda^2 \rho_1^*$ より

$$\wedge^2 \mathfrak{p}_n^* = \mathbb{C}\omega_n + \wedge_0^2 \mathfrak{p}_n^*$$ と直交分解すると、

$$\wedge^2 \mathfrak{p}^{*\mathbb{C}} = \omega_n \otimes S^2\mathfrak{p}_1^* + \wedge_0^2 \mathfrak{p}_n^* \otimes S^2\mathfrak{p}_1^* + S^2\mathfrak{p}_n^* \otimes \omega_1$$

となる。ところが各々の表現を調べてみると、3つ共 real form をもつことがわかる。従って、

$$\wedge^2 \mathfrak{p}^* = (\omega_n \otimes S^2\mathfrak{p}_1^*)_{real} + (\wedge_0^2 \mathfrak{p}_n^* \otimes S^2\mathfrak{p}_1^*)_{real} + (S^2\mathfrak{p}_n^* \otimes \omega_1)_{real}$$

となる。この分解に応じて $\wedge^2 T^*M$ は3つの subbundles に分解する。各々 A_2', A_2'', B_2 と書くと

$$\wedge^2 T^*M = A_2' + A_2'' + B_2 .$$

例えば、$n = 1$ の時は $A_2'' = \{0\}$ で $A_2' = \wedge_+$, $B_2 = \wedge_-$ となる。そこで E を quaternionic Kähler manifold M 上の vector bundle (体は $\mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$) とする。∇ を E 上の G- connection (G は compact group で その Lie algebra を $\mathfrak{g}$ と書く) とする時、∇ が A_2' (resp. B_2) - connection とは、その curvature R^∇ が $\mathfrak{g}_E$-valued A_2' (resp. B_2) - form の時をいう。ここで $\mathfrak{g}_E$ は adjoint bundle ($\subset$ End E)

である。例えば、$n=1$ の時は A_2'-connection (resp. B_2-connection) は self-dual connection (resp. anti-self-dual connection) と一致する。

すると自然な疑問として、A_2'-connection, B_2-connection は Yang-Mills connection だろうか という事が浮かんでくる。それに対して次の Theorem が成り立つ。

<u>Theorem 1.</u> A_2'-connection, B_2-connection 共に Yang-Mills connection である。

更に、B_2-connection を用いて vector bundle valued の elliptic complex が存在する。まず form の分解から行う。$\Lambda^i(\rho_n^*\otimes\rho_1^*) = \Lambda^i\rho_n^*\otimes S^i\rho_1^* + (\Lambda^i\rho_n^*\otimes S^i\rho_1^*)^\perp$ と分解し、2つの部分共 real form を持つことに注意すると、

$$\Lambda^i\rho^* = (\Lambda^i\rho_n^*\otimes S^i\rho_1^*)_{real} + ((\Lambda^i\rho_n^*\otimes S^i\rho_1^*)^\perp)_{real}$$

となる。この分解に応じて

$$\Lambda^i T^*M = A_i + B_i$$ と分解する。

N - 10

$\Lambda^i T^* M$ の A_i 成分への projection を pr_i と書く。

<u>Theorem 2.</u>　E を M 上の vector bundle で B_2-G-connection ∇ をもつとする。その時、次の sequence は elliptic complex である。

$$0 \to \mathcal{O}(E) \xrightarrow{d^\nabla} \mathcal{O}(E \otimes T^*M) \xrightarrow{d_1} \mathcal{O}(E \otimes A_2) \xrightarrow{d_2} \cdots \xrightarrow{d_{2n-1}} \mathcal{O}(E \otimes A_{2n}) \quad 0$$

ここで $d_i := (id \otimes pr_{i+1}) \circ d^\nabla$ とし，$\mathcal{O}(\ \ )$ で germ のつくる sheaf を表わす。

この elliptic complex を用いて B_2-G-connection の moduli space の次元を調べられる。E を Theorem 2 の様に M 上の vector bundle で B_2-G-connection ∇ をもつとする。即ち、E の frame bundle は fibre G なる M 上の principal bundle Q に還元される。
そこで、

$$G_Q := Q \times_{inner} G \quad , \quad \mathfrak{g}_Q := Q \times_{Ad} \mathfrak{g}$$

とする。E の connection ∇ から $\mathfrak{g}_Q$ に自然に connection ∇' が入る。$\Gamma(M, G_Q)$ は gauge group と呼ばれ、

$\{$E 上の B_2-G-connection$\}$

に connection の引き戻しとして作用する。

$$\{E \text{上の } B_2\text{-}G\text{-connection}\} / \Gamma(M, G_Q)$$

を 同値類という意味で

$$[\{E \text{上の } B_2\text{-}G\text{-connection}\}]$$

と書く。

<u>Theorem 3.</u> G を semisimple, ∇ を irreducible B_2-G-connection とする。その時, ∇ の infinitesimal deformation ((i.e.) $T_\nabla[\{E \text{上の } B_2\text{-}G\text{-connection}\}]$) は、次の complex の 1'st cohomology H^1 の subspace である。

$$0 \to \mathfrak{A}(\mathfrak{g}_Q) \xrightarrow{d^{\nabla'}} \mathfrak{A}(\mathfrak{g}_Q \otimes T^*M) \xrightarrow{d_1'} \mathfrak{A}(\mathfrak{g}_Q \otimes A_2) \xrightarrow{d_2'} \cdots \xrightarrow{d_{2n-1}'} \mathfrak{A}(\mathfrak{g}_Q \otimes A_{2n}) \to 0,$$

ここで $d_i' := (id \otimes pr_{i+1}) \circ d^{\nabla'}$ である。

更に、次の 1:1 対応がある。 $p: Z \to M$ を projection とする。

Theorem 4.

$\{(E, \nabla_E)$: M上の Hermitian vector bundle E with Hermitian B_2-connection $\nabla_E\}$

$\downarrow p^*$ 1:1

$\{(F, \nabla_F)$: Z上の holomorphic Hermitian vector bundle F with Hermitian (1,0)-connection ∇_F s.t.

(i) F は $p: Z \to M$ の fibre 上 trivial ,

(ii) connection ∇_F は τ で不変 $\}$.

ここで τ は section 1 で定義した $\tau: Z \to Z$ である。

Corollary 5. 特に (M, g) の scalar curvature が正の時（この時は twistor space Z は Kähler manifold になる事を section 1 で注意した），Theorem 4 の対応は次のようになる。

$\{(E, \nabla_E)$: M上の Hermitian vector bundle E with Hermitian B_2-connection $\nabla_E\}$

$\downarrow p^*$ 1:1

$\{(F, \nabla_F)$: Z上の holomorphic Hermitian vector bundle F with Einstein-Hermitian connection ∇_F s.t. (i) (ii) $\}$.

§4. 注意

この section では、M は scalar curvature 正で compact とする。E を M 上の Hermitian vector bundle とすると corollary 5 より

P^*{Hermitian B_2-connection on E}
= {Einstein Hermitian connection on P^*E
s.t. (i) (ii)}

であった。右辺の { } の中の connection は条件が2つついているので1つづつ取り除いていくと、

{Einstein Hermitian connection on P^*E s.t. (i) (ii)}
$\cap$
{Einstein Hermitian connection on P^*E s.t. (i)}
$\cap$
{Einstein Hermitian connection on P^*E} となる。

今, Hermitian connection を考えているので、E の frame bundle は fibre $U(r)$ ($r := \mathrm{rank}(E)$) なる principal bundle Q に還元する。Q を Z 上に持ち上げて

P^*Q とし P^*Q から $U(r)_{P^*Q}$ を

$$U(r)_{P^*Q} := P^*Q \times_{inner} U(r)$$

としてつくる。$\Gamma(Z, U(r)_{P^*Q})$ の作用で、上の3つの { } を割って moduli space とする。即ち、

$$[\{\text{Einstein Hermitian connection on } P^*E \text{ s.t. (i) (ii)}\}]$$
$$\cap_1$$
$$[\{\text{Einstein Hermitian connection on } P^*E \text{ s.t. (i)}\}]$$
$$\cap_2$$
$$[\{\text{Einstein Hermitian connection on } P^*E\}]$$ となる。

Itoh, Kim によって最後の [{ }] は特異点を持つ Kähler manifold になる事が知られている。そこで、$\cap_2$ は Kähler submanifold に、$\cap_1$ は totally real submanifold になる。

reference

[S] S. M. Salamon: Quaternionic Kähler manifolds. Inv. Math., 67, 143-171 (1982).