数理解析研究所講究録
第626巻 1987年 157-183

極小曲面のガウス写像の除外値の個数について

金沢大理　藤本坦孝 (Hirotaka Fujimoto)

§1　序

$\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面 M に対し、M の Gauss 写像とは、定義により、M の各点 p に、M の p での単位法線ベクトル $G(p)$ を対応させる写像 $G: M \to S^2$ である。M を自然に Riemann 面とみなすとき、G と立体射影 $\pi: S^2 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ $(= P^1(\mathbb{C}))$ との合成の共役 $g = \overline{\pi \cdot G}$ は、M 上の有理型関数となる。便宜上、以下では、g を M の Gauss 写像と呼ぶことにする。

1961年、R. Osserman が、非平坦完備極小曲面の Gauss 写像 g は、対数容量正の集合を除外し得ないことを示した ([10])。その後、F. Xavier は、この様な写像 g の除外値は高々 6個であることを証明した ([14])。また、最近筆者は、この様な写像 g の除外値の個数は、高々 4 であることを証明することができた ([8])。Gauss 写像が丁度 4個の値を除外する $\mathbb{R}^3$ 内の完備極小曲面の例は、古くから知られている ([11], [12])。従って、除外値の個数 4 は、これ以下に下げ

られない。筆者はまた，Gauss 写像が5個以上の値を除外する極小曲面について，Gauss 曲率に対する一つの評価式を与えた（[8]）。ここでは，有理型関数の値分布論における defect と類似の性質をもつ，新しい型の modified defect を定義し，modified defect relation を与えて，上述の結果の精密化を導く。

次節で，三種類の modified defect の定義を与え，それ等の間の関係や基本的性質を述べ，§3で主結果を説明し，§4以降で，それらの証明を与える。

§2　Modified defect の定義とその基本的性質

開 Riemann 面 M，及び非定数正則写像 $f : M \to P^1(\mathbb{C})$ を考える。共通零点をもたぬ M 上の正則関数 f_0，f_1 を取り $f = (f_0 : f_1)$ と表示する。以下，この様な f の表示を，f の既約表示と呼ぶ。各点 $\alpha \in P^1(\mathbb{C})$ に対し，$|a^0|^2 + |a^1|^2 = 1$ をみたす a^0，a^1 を取り，$\alpha = (a^0 : a^1)$ と表示し，$F_\alpha := a^1 f_0 - a^0 f_1$ とおく。また，$\|f\| = (|f_0|^2 + |f_1|^2)^{1/2}$ とおく。

定義 2.1. 写像 f に対する値 α の S-defect を，

$$\delta_f^S(\alpha) := 1 - \inf\{\eta\,;\, \eta \text{ は条件 } (*)_S \text{ をみたす非負実数}\}$$

によって定義する。ここで，条件 $(*)_S$ とは，$[-\infty, \infty)$ に値をもつ M 上の劣調和連続関数 $u\ (\not\equiv -\infty)$ で条件

(D1) $e^u \leqq \|F\|^\eta$,

(D2) 各点 $\zeta \in f^{-1}(\alpha)$ に対し

$$\lim_{z \to \zeta} (u(z) - \log|z-\zeta|) \in [-\infty, \infty)$$

が存在する。ここで z は ζ の近傍での正則局所座標を表す。

をみたす様なものが取れることを意味する。

注意. S-defect は、論文 [6], [7] で non-integrated defect と呼んだものと一致する。

定義 2.2. f に対する α の H-defect を

$$\delta_f^H(\alpha) := 1 - \inf\{\eta\,;\ \eta \text{ は条件 } (*)_H \text{ をみたす非負実数}\}$$

によって定義する。ここで、条件 $(*)_H$ とは、M 上の $[-\infty, \infty)$ に値をもつ連続関数 u で、条件 (D1), (D2) をみたし、$f^{-1}(\alpha)$ 以外で調和なものが存在することを意味する。

定義 2.3. f に対する α の O-defect を次で定義する。

$$\delta_f^O(\alpha) := 1 - \inf\{\tfrac{1}{m}\,;\ F_\alpha \text{ が } < m \text{ 位の零点をもたない}\}.$$

容易にわかる様に、S-defect, H-defect, O-defect いずれも、f の既約表示や、α の表示の仕方によらない。

明らかに、$(*)_H$ をみたす η は $(*)_S$ もみたす。また、F_α が m より小さい位数の零点をもたぬとき、$\eta = 1/m$ は $(*)_H$ をみたす。実際、関数 $u = (1/m)\log|F_\alpha|$ を取れば、$M \setminus f^{-1}(\alpha)$ 上調和であり、条件 (D1), (D2) をみたす。従って、

(2.4) $\quad 0 \leqq \delta_f^O(\alpha) \leqq \delta_f^H(\alpha) \leqq \delta_f^S(\alpha) \leqq 1.$

これらは、Nevanlinna defect と似た次の性質をもつ。

命題 2.5. (i) 丁度 $f^{-1}(\alpha)$ 上で零である様な有界正則関数 g が存在するとき、$\delta_f^H(\alpha) = \delta_f^S(\alpha) = 1$.

(ii) F_α が m より低い位数の零点をもたないとき、

$$\delta_f^S(\alpha) \geq \delta_f^H(\alpha) \geq \delta_f^O(\alpha) \geq 1 - \frac{1}{m}.$$

特に、$f^{-1}(\alpha) = \phi$ のとき、$\delta_f^O(\alpha) = 1$.

証明、(ii) は O-defect の定義から明らかである。(i) は、関数 $u = \log\left(|g| / \sup_{z\in M}|g(z)|\right)$ が、$M \setminus f^{-1}(\alpha)$ 上で調和であり $\eta = 0$ として条件 (D1), (D2) をみたすことによる。

ここで、$M = \mathbf{C}$ の場合に modified defect と Nevanlinna defect との間の関係をみておこう。必要なら座標をずらし、$f(0) \neq \alpha$ とする。有理型関数の値分布論において、f の位数関数及び $f^{-1}(\alpha)$ の個数関数は、それぞれ

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\| f(re^{i\theta})\| d\theta - \log\|f(0)\|$$

$$N_f^\alpha(r) = \int_0^r \#\left(f^{-1}(\alpha) \cap \{z : |z| \leq t\}\right) \frac{dt}{t}$$

で与えられる。ここで $\#A$ によって A の元の個数を表す。(重複度を観慮しない場合の) Nevanlinna defect は、

$$\delta_f(\alpha) := 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N_f^\alpha(r)}{T_f(r)}$$

と定義される。このとき、次の関係式が成り立つ。

(2.6) $0 \leqq \delta_f^S(\alpha) \leqq \delta_f(\alpha)$.

証明. 条件 (D1), (D2) をみたす実数 η, 及び劣調和連続関数 $u\ (\not\equiv -\infty)$ を取る. ここで $u(0) \neq -\infty$ としてよい。$f^{-1}(\alpha)$ の各点で1位の零点をもち他で零でない M上の正則関数 g を取れば, (D2)により $v := u - \log|g|$ は M全体で劣調和である. 各正数 r に対し, (D1)の両辺の対数を, $\{z; |z| = r\}$ 上で平均を取り, Jensen の公式を適用すれば,

$$
\begin{aligned}
\eta\left(T_f(r) + \log\|f(0)\|\right) &= \eta \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\|f\|(re^{i\theta})\,d\theta \\
&\geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(re^{i\theta})|\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(re^{i\theta})\,d\theta \\
&\geqq N_f^{\alpha}(r) + \log|g(0)| + v(0).
\end{aligned}
$$

従って,

$$
1 - \eta \leqq 1 - \frac{N_f^{\alpha}(r)}{T_f(r)} + \frac{\mathrm{const}}{T_f(r)}.
$$

$r \to \infty$ とし, η に関して下限を取れば, 求める結果を得る。

Nevanlinna 理論により, 次の defect relation が成り立つ。

定理 2.7([4]). 非定数正則写像 $f: \mathbb{C} \longrightarrow P^1(\mathbb{C})$, および, 任意有限個の相異なる値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ に対し,

$$
\sum_{j=1}^{q} \delta_f(\alpha_j) \leqq 2.
$$

系 2.8. 定理 2.7 と同じ仮定のもとに $\sum_{j=1}^{q} \delta_f^S(\alpha_j) \leqq 2$.

この事実は，後に主結果の証明の中で使われる．後節で，この事実の直接証明を与える（§5 末）．

§3　主な結果

$\mathbb{R}^3$ 内の（有向連結）非平坦極小曲面 $x=(x_1, x_2, x_3): M \to \mathbb{R}^3$ を考える．M に，$\mathbb{R}^3$ から誘導された計量 ds^2 をいれ，M の各点の近傍で正の等温座標 (u, v) を取り $z = u + \sqrt{-1}\,v$ を正則局所座標に選べば，M は Riemann 面とみなされ，各 x_i は M 上の調和関数である．局所座標近傍内で $\phi_i = \frac{\partial x_i}{\partial z}$ $(i=1,2,3)$ とおけば，§1 で述べた意味の Gauss 写像 $g: M \to P^1(\mathbb{C})$ $(= \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ は，$g = (\phi_1 - \sqrt{-1}\,\phi_2 : \phi_3)$ $(= \phi_3 / (\phi_1 - \sqrt{-1}\,\phi_2))$ で与えられる（[12]）．仮定から g は非定数正則写像である．M が完備のとき，次の modified defect relation が成り立つ．

定理 I．$x: M \to \mathbb{R}^3$ を非平坦完備極小曲面とし，g をその Gauss 写像とするとき，相異なる値 $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ に対し，

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_g^H(\alpha_j) \leqq 4.$$

命題 2.5 によって，任意の $\alpha_j \notin g(M)$ に対し，$\delta_g^H(\alpha_j) = 1$．従って，定理 I より直ちに次の系が導かれる．

系 3.1．$\mathbb{R}^3$ 内の非平坦完備極小曲面の Gauss 写像 g に対し，つねに $\#(P^1(\mathbb{C}) - g(M)) \leqq 4$.

必ずしも完備でない非平坦極小曲面 $x: M \to \mathbb{R}^3$ を考える．

Mの各点 p に対し，Mの p でのGauss曲率を $K(p)$ で表す。また，p からMの境界までの距離を $d(p)$ で表す。即ち，

$$d(p) := \inf\{\,p \text{ から } M \text{ の境界に近づく連続曲線の長さ}\,\}$$

ここで，連続曲線 $\Gamma : z = \gamma(t)\ (a \leqq t < b)$ がMの境界に近づくとは，どんなコンパクト集合Kに対しても，t が b に十分近いとき，$\gamma(t) \notin K$ となることを意味する。

定理 II．$x : M \to \mathbb{R}^3$ を非平坦極小曲面とし，g をそのGauss写像とする。相異なる値 $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ に対し

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_g^0(\alpha_j) > 4$$

が成り立つとき，α_j 及び $\delta_g^0(\alpha_j)$ のみに依存する定数Cで，

$$|K(p)| \leqq \frac{C}{d(p)^2} \quad (p \in M)$$

をみたすものが存在する。

次に，$\mathbb{R}^4$ 内の完備極小曲面 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) : M \to \mathbb{R}^4$ を考える。よく知られている様に，$\mathbb{R}^4$ 内の原点を含む2次元有向平面の全体は，自然に，$P^3(\mathbb{C})$ 内の二次曲面

$$Q_2(\mathbb{C}) := \{\,(w_1 : w_2 : w_3 : w_4)\,;\ w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = 0\,\}$$

と同一視できる。MのGauss写像は，各点 $p \in M$ に，Mの p での有向接平面に対応する点 $G(p) \in Q_2(\mathbb{C})$ を対応させる写像 $G : M \to Q_2(\mathbb{C})$ として定義される。一方，$Q_2(\mathbb{C})$ は，$P^1(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C})$ に双正則である。従って，Gは二つの写像 g_k：

$M \to P^1(\mathbb{C})$ $(k=1,2)$ の組 $g=(g_1, g_2)$ と同一視される．各点の局所座標近傍内で $\phi_i = \frac{\partial x_i}{\partial z}$ $(i=1,\dots,4)$ とおくとき，$g_1 = (\phi_1 - \sqrt{-1}\phi_2 : \phi_3 + \sqrt{-1}\phi_4)$，$g_2 = (\phi_1 - \sqrt{-1}\phi_2 : -\phi_3 + \sqrt{-1}\phi_4)$ が成り立つ（［9］）．各 $g_k : M \to P^1(\mathbb{C})$ は正則である．

定理 III．$x : M \to \mathbb{R}^4$ を完備極小曲面とし，$g=(g_1, g_2) : M \to P^1(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C})$ をその Gauss 写像とする．

(i) $g_1 \not\equiv \mathrm{const}$ かつ $g_2 \not\equiv \mathrm{const}$ のとき，任意の相異なる値 $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1q_1} \in P^1(\mathbb{C})$，及び相異なる値 $\alpha_{21}, \dots, \alpha_{2q_2} \in P^1(\mathbb{C})$ に対し，次の不等式のいずれかが成り立つ．

(a) $$\sum_{i=1}^{q_1} \delta_{g_1}^H (\alpha_{1i}) \leqq 2,$$

(b) $$\sum_{j=1}^{q_2} \delta_{g_2}^H (\alpha_{2j}) \leqq 2,$$

(c) $$\frac{1}{\sum_{i=1}^{q_1} \delta_{g_1}^H (\alpha_{1i}) - 2} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{q_2} \delta_{g_2}^H (\alpha_{2j}) - 2} \geqq 1.$$

(ii) g_1 又は g_2 のいずれか一方，例えば g_2 が定数で，他方が非定数のとき，任意の相異なる $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ に対し

$$\sum_{i=1}^{q_1} \delta_{g_1}^H (\alpha_i) \leqq 3.$$

定理 III は，論文［6］，定理 6.3 を精密にしたものである．

§4. Cowen - Griffiths の不等式

$\mathbb{C}$ 内の開円板 $\Delta_R = \{z ; |z| < R\}$ から $P^1(\mathbb{C})$ への非定数正則写像 f，及び相異なる値 $\alpha_j = (a_0^j : a_1^j) \in P^1(\mathbb{C})$ $(1 \leqq j \leqq q)$

を考える．ここで，$|a_j^0|^2+|a_j^1|^2=1$．f の Δ_R 上での既約表示 $f=(f_0:f_1)$ を取り，$\|f\|^2:=(|f_0|^2+|f_1|^2)^{1/2}$，$W(f_0,f_1):=f_0f_1'-f_0'f_1$，$F_j:=a_j^1f_0-a_j^0f_1$ $(1\leq j\leq q)$ とおく．

定理 4.1. 任意の正数 ε に対し

$$\Delta\log\left(\frac{\|f\|^2}{\prod_{j=1}^{q}\log\frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}}\right)\geq C\,\frac{\|f\|^{2q-4}\,|W(f_0,f_1)|^2}{\prod_{j=1}^{q}|F_j|^2\log^2\frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}}$$

をみたす，α_j のみによってきまる正定数 C，及び ε のみによってきまる正定数 μ が存在する．

これは，[4] における結果を書きかえたものである．

補題 4.2. 任意の正数 ε に対し，正数 $\mu_0(\varepsilon)$ を適当に取れば，任意の $\mu\geq\mu_0(\varepsilon)$ について

$$\Delta\log\left(\frac{1}{\log\frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}}\right)\geq\frac{4\,|W(f_0,f_1)|^2}{\|f\|^2|F_j|^2\log^2\frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}}-\varepsilon\,\Delta\log\|f\|^2.$$

証明．$\varphi_j=|F_j|^2/\|f\|^2$ とおく．このとき，

$$\left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}\right|^2=\frac{1}{\|f\|^8}\left|F_j'\bar{F}_j\|f\|^2-|F_j|^2(f_0'\bar{f}_0+f_1'\bar{f}_1)\right|^2$$

$$=\frac{|F_j|^2}{\|f\|^8}\cdot|W(f_0,f_1)|^2\,|a_j^0\bar{f}_0+a_j^1\bar{f}_1|^2$$

$$=\frac{|F_j|^2}{\|f\|^8}\,|W(f_0,f_1)|^2\left((|a_j^0|^2+|a_j^1|^2)(|f_0|^2+|f_1|^2)-|a_j^1f_0-a_j^0f_1|^2\right)$$

$$=(\varphi_j-\varphi_j^2)\frac{|W(f_0,f_1)|^2}{\|f\|^4},$$

一方，

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}\log\|f\|^2=\frac{(|f_0'|^2+|f_1'|^2)(|f_0|^2+|f_1|^2)-|f_0\bar f_0'+f_1\bar f_1'|^2}{\|f\|^4}=\frac{|W(f_0,f_1)|^2}{\|f\|^4}$$

が成り立つ。従って、

$$\Delta\log\frac{1}{\log\frac{\mu}{\varphi_j}}=4\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\log\frac{\mu}{\varphi_j}}\frac{\partial}{\partial\bar z}\log\varphi_j\right)$$

$$=\frac{4}{\log\frac{\mu}{\varphi_j}}\frac{\partial^2\log\varphi_j}{\partial z\partial\bar z}+\frac{4}{\varphi_j^2\log^2\frac{\mu}{\varphi_j}}\left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}\right|^2$$

$$=-\frac{4}{\log\frac{\mu}{\varphi_j}}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}\log\|f\|^2+\frac{4(\varphi_j-\varphi_j^2)}{\varphi_j^2\log^2\frac{\mu}{\varphi_j}}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}\log\|f\|^2$$

$$=\frac{4}{\varphi_j^2\log^2\frac{\mu}{\varphi_j}}\frac{|W(f_0,f_1)|^2}{\|f\|^4}-4\left(\frac{1}{\log^2\frac{\mu}{\varphi_j}}+\frac{1}{\log\frac{\mu}{\varphi_j}}\right)\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}\log\|f\|^2.$$

つねに $\varphi_j\leqq 1$ が成り立つ故，$(1/\log^2\mu_0(\varepsilon))+(1/\log\mu_0(\varepsilon))<\varepsilon$ をみたす $\mu_0(\varepsilon)$ を取れば，求める条件をみたす。

定理 4.1 の証明。与えられた正数 ε に対し，$\mu\geqq\mu_0(\varepsilon/q)$ をみたす μ を取る。補題 4.2 によって，

$$\Delta\log\frac{\|f\|^\varepsilon}{\prod_{j=1}^{q}\log\frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}}$$

$$\geqq\varepsilon\Delta\log\|f\|^2+\sum_{j=1}^{q}\left(\frac{4|W(f_0,f_1)|^2}{\|f\|^2|F_j|^2\log^2\frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}}-\frac{\varepsilon}{q}\Delta\log\|f\|^2\right)$$

$$=\frac{4|W(f_0,f_1)|^2}{\|f\|^4}\sum_{j=1}^{q}\frac{\|f\|^2}{|F_j|^2\log^2\frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}}.$$

一方，相異なる添字 i, j $(1\leqq i<j\leqq q)$ に対し，f_0, f_1 が F_i と F_j の一次結合で書けることから，$\|f\|\leqq C_{ij}\max(|F_i|, |F_j|)$

をみたす α_i, α_j のみによってきまる定数 C_{ij} が存在する。

$$C_0 := \max_{1\leq i<j\leq q} C_{ij}, \quad M := \max\left\{ \frac{x}{\log^2 \mu x} : 0 < x \leqq C_0 \right\}$$

とおく。

そこで、点 $z \in \Delta_R$ を任意に取り

$$|F_{j_1}(z)| \leqq |F_{j_2}(z)| \leqq \cdots \leqq |F_{j_q}(z)|$$

が成り立つ様に $j_1, j_2, \cdots, j_q$ をきめる。このとき $l=2,\cdots,q$ に対し、$\|f(z)\| \leqq C_0 |F_{j_l}(z)|$ が成り立つ。従って、

$$\frac{\|f\|^2}{|F_j|^2 \log^2 \frac{\mu\|f\|^2}{|F_{j_l}|^2}} \leqq M \quad (l = 2, 3, \cdots, q).$$

これより、点 z で

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{\|f\|^2}{|F_j|^2 \log^2 \frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}} \geqq \frac{\|f\|^2}{|F_{j_1}|^2 \log^2 \frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}}$$

$$\geqq \frac{1}{M^{q-1}} \left(\prod_{l=2}^{q} \frac{\|f\|^2}{|F_{j_l}|^2 \log^2 \frac{\mu\|f\|^2}{|F_{j_l}|^2}} \right) \frac{\|f\|^2}{|F_{j_1}|^2 \log^2 \frac{\mu\|f\|^2}{|F_{j_1}|^2}}$$

$$= \frac{\|f\|^{2q}}{M^{q-1} \prod_{j=1}^{q} |F_j|^2 \log^2 \frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}}.$$

この最右辺は、j_l の選ばれ方によらない。従って、最左辺 $\geqq$ 最右辺 は Δ_R 全体で成り立つ。これを最初に得た式に代入すれば、定理 4.1 が成り立つことがわかる。

§5. Main Lemma.

非定数正則写像 $f:\Delta_R\to P^1(\mathbb{C})$, 及び相異なる値 $\alpha_1,\cdots,\alpha_q\in P^1(\mathbb{C})$に対し, $\|f\|$, $W(f_0,f_1)$, F_j 等, 前節の記号をそのまゝ踏襲する.

M 上の劣調和連続関数 $u_1,\cdots,u_q$ $(-\infty\leq u_j<\infty,\ u_j\not\equiv-\infty)$,及び正定数 $\eta_1,\cdots,\eta_q$ で, 条件

(C 1) $\quad\gamma:=q-2-(\eta_1+\cdots+\eta_q)>0$,

(C 2) $\quad e^{u_j}\leq\|f\|^{\eta_j}\qquad(1\leq j\leq q)$,

(C 3) 各点 $\zeta\in f^{-1}(\alpha_j)$ $(1\leq j\leq q)$ に対し

$$\lim_{z\to\zeta}\,(u_j(z)-\log|z-\zeta|)\in[-\infty,+\infty)$$

が存在する.

をみたすものを考える.

補題 5.1. 上述の u_j, η_j 及び γ に対し, 正定数 C, μ (>1) を適当に選べば, 関数

$$v:=C\frac{\|f\|^{\gamma}\,e^{u_1+\cdots+u_q}\,|W(f_0,f_1)|}{\prod_{j=1}^{q}|F_j|\,\log\frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}}$$

は, Δ_R 上の実数値連続関数であり, 超関数の意味で $\Delta\log v\geq v^2$ をみたす.

証明. v は, $\bigcup_{j=1}^{q}f^{-1}(\alpha_j)$ 以外では明らかに連続である. 或 i に対し $F_i(\zeta)=0$ をみたす点 ζ の近傍 U 上で考える. i と異なる j に対しては, U_j 上 $F_j(z)\neq0$ としてよい。また, 必要なら添字をいれかえ, U 上 $f_0(z)\neq0$ としてよい.

$\chi_i = W(f_0, f_1)/F_i$ とおく．有理型関数 $g = f_1/f_0$ を用いて，$\chi_i = \dfrac{f_0}{a_i^0}\dfrac{g'}{a_i - g}$ と書きなおせるゆえ，χ_i は ζ で1位の極をもつ．従って

$$\frac{e^{u_1+\cdots+u_g}|W(f_0,f_1)|}{\prod_{j=1}^{g}|F_j|} = |z-\zeta||\chi_i| e^{u_i - \log|z-\zeta|} \cdot \frac{e^{u_1+\cdots+u_{i-1}+u_{i+1}+\cdots+u_g}}{\prod_{j\neq i}|F_j|}$$

は ζ の近傍で有界である．これより $\lim_{z\to\zeta} v(z) = 0$ が導かれ，v は Δ_R 上で連続である．

そこで，定数 C，μ を，C^2，μ が定理4.1の条件をみたす様に取る．このとき，条件（C1），（C2）によって，

$$\begin{aligned}\Delta \log v &\geq \Delta \log \frac{\|f\|^{\gamma}}{\prod_{j=1}^{g} \log \frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}} \\ &\geq C^2 \frac{\|f\|^{2\gamma-4}|W(f_0,f_1)|^2}{\prod_{j=1}^{g}|F_j|^2 \log^2 \frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}} \\ &\geq C^2 \frac{\|f\|^{2\gamma} e^{2(u_1+\cdots+u_g)}|W(f_0,f_1)|^2}{\prod_{j=1}^{g}|F_j|^2 \log^2\frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}} \\ &= v^2.\end{aligned}$$

補題 5.2. 上述の u_j，η_j 及び γ に対し，正定数 C，μ を適当に選べば，

$$\frac{\|f\|^{\gamma} e^{u_1+\cdots+u_g}|W(f_0,f_1)|}{\prod_{j=1}^{g}|F_j| \log\frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}} \leq C \frac{2R}{R^2 - |z|^2}$$

が成り立つ．

証明は，補題5.1に，次の一般化されたSchwarzの補題を適用することにより直ちに得られる。

Schwarzの補題（[1]）．vをΔ_R上の非負値劣調和連続関数とする。Δ_R上で，超関数の意味で$\Delta \log v \geqq v^2$が成り立つとき，

$$v(z) \leqq \lambda_R(z) := \frac{2R}{R^2-|z|^2} \qquad (z \in \Delta_R).$$

証明．$\lambda_r(z)$はrに関して連続ゆえ，任意の$r\ (<R)$に対し$\Delta_r = \{z ; |z|<r\}$上で，$\eta_r(z) = \dfrac{v(z)}{\lambda_r(z)} \leqq 1$を示せば十分である。$\lim_{z \to \partial\Delta_r} \eta_r(z) = 0$ゆえ，$\eta_r(z)$は$\Delta_r$内の一点$z_0$で最大値を取る。$\eta_r(z_0) \leqq 1$をいえばよい。これを否定する。このとき$z_0$の或る近傍$U$上で$\eta_r(z) > 1$，従って$v > \lambda_r$である。従って，$U$上で超関数の意味で

$$\Delta \log \eta_r = \Delta \log v - \Delta \log \lambda_r \geqq v^2 - \lambda_r^2 > 0$$

が成り立ち，$\log \eta_r$は劣調和である。$z_0 \in U$で最大値を取ることから，最大値の原理により$\log \eta_r \equiv \mathrm{const}$．上の不等式に矛盾する。よって求める結果を得る。

Main Lemma．関数$u_1, \ldots, u_q$及び定数$\eta_1, \cdots, \eta_q$は条件（C1），（C2）をみたすものとする。このとき，$0 < \delta q < \gamma$をみたす任意のδに対し，η_j，α_j及びδのみによってきまる定数C_0を適当に選んで

$$\|f\|^{\gamma-q\delta}\frac{e^{u_1+\cdots+u_q}|W(f_0,f_1)|}{|F_1F_2\cdots F_q|^{1-\delta}}\leqq C_0\frac{2R}{R^2-|z|^2}$$

が成り立つ様にできる。

証明．与えられた δ に対し $\tilde{C}:=\sup_{0<x\leqq 1}x^{\delta}\log(\mu/x^2)$ とおく。補題5.2で選んだ定数 C，μ に対し，

$$\|f\|^{\gamma-q\delta}\frac{e^{u_1+\cdots+u_q}|W(f_0,f_1)|}{|F_1F_2\cdots F_q|^{1-\delta}}$$

$$=\frac{\|f\|^{\gamma}e^{u_1+\cdots+u_q}|W(f_0,f_1)|}{|F_1F_2\cdots F_q|}\prod_{j=1}^{q}\left(\frac{|F_j|}{\|f\|}\right)^{\delta}$$

$$\leqq \tilde{C}^{q}\frac{\|f\|^{\gamma}e^{u_1+\cdots+u_q}|W(f_0,f_1)|}{\prod_{j=1}^{q}|F_j|\log\frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}}$$

$$\leqq C\tilde{C}^{q}\frac{2R}{R^2-|z|^2}.$$

$C_0:=C\tilde{C}^{q}$ とおけば，求める不等式が成り立つ。

ここで，Main Lemma の応用による系2.8の直接証明を与える。

系2.8の証明．必要なら座標をずらせて，$u_j(0)\neq-\infty$, $f(0)\neq\alpha_j$ $(1\leqq j\leqq q)$，かつ $W(f_0,f_1)(0)\neq 0$ と仮定してよい。系2.8の結論を否定する。このとき，条件(C1)をみたす定数 η_j 及び(C2)，(C3)をみたす $\mathbb{C}$ 上の劣調和連続関数 u_j が存在する。任意正数 R，及び $\gamma>q\delta>0$ をみたす δ を取り，写像 $f|\Delta_R:\Delta_R\to P^1(\mathbb{C})$ に Main Lemma を適用し，結論の式に $z=0$ を代入すれば，R が，α_j，$\delta_f^S(\alpha_j)$ 及び f，u_j，F_j，

$W(f_0, f_1)$ の原点での値のみによる定数でおさえられる。これは R の任意性に反する。よって系 2.8 を得る。

§ 6. 定理 I の証明.

$x = (x_1, x_2, x_3) : M \to \mathbb{R}^3$ を非平坦極小曲面とし、$g : M \to P^1(\mathbb{C})$ をその Gauss 写像とする。本節の目的は定理 I の証明にあるが、論法の一部を次節でも利用する為、しばらく完備性を仮定しない。M の普遍被覆面 $\varpi : \tilde{M} \to M$ に対し、$\tilde{x} := x \cdot \varpi : \tilde{M} \to \mathbb{R}^3$ も非平坦極小曲面であり、その Gauss 写像は $\tilde{g} = g \cdot \varpi$ で与えられる。また、g に対する modified defect は、$\tilde{g}$ に対するものを越えない。従って、定理 I, II の証明には、$\tilde{M} = M$ と仮定してよい。$\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面はコンパクトであり得ないから、Koebe の一意化定理により、M は $\mathbb{C}$ 又は $\mathbb{C}$ 内の単位円板に双正則である。$\mathbb{C}$ に双正則な場合は、系 2.8 によって定理 I は正しい。また定理 II はこの場合を除外してよい。以下、M は単位円板に双正則であると仮定する。

Gauss 写像 g の既約表示 $g = (g_0 : g_1)$ を取り、$\|g\| = (|g_0|^2 + |g_1|^2)^{1/2}$ とおく。計算によって容易に確かめられる様に、$\mathbb{R}^3$ から誘導される M の計量は、$f = \frac{\partial x_1}{\partial z} - \sqrt{-1}\frac{\partial x_2}{\partial z}$, $g = \frac{g_1}{g_0}$ とおくとき、

$$ds^2 = |f|^2 (1 + |g|^2)^2 |dz|^2$$

で与えられる ([12])。$h = f / g_0^2$ とおけば、

$$ds^2 = |h|^2 \|g\|^4 |dz|^2$$

と書きなおされ，hは零点をもたぬM上の正則関数である。

そこで，$P^1(\mathbb{C})$内の相異なる値$\alpha_1, \ldots, \alpha_q$に対し

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_g^H(\alpha_j) > 4$$

と仮定する。このとき，H-defectの定義により，

$$\gamma := q - 2 - (\eta_1 + \cdots + \eta_q) > 2$$

をみたす非負実数η_j，及び$f^{-1}(\alpha_j)$以外で調和なM上の連続関数u_j $(1 \leqq j \leqq q)$で，写像gに対し§5の条件(C2)，(C3)をみたすものが存在する。

(6.1) $$\frac{\gamma - 2}{q} > \delta > \frac{\gamma - 2}{q + 2}$$

をみたすδを取り，$p = \dfrac{2}{\gamma - q\delta}$とおく。このとき，

(6.2) $$0 < p < 1, \quad \frac{\delta p}{1 - p} > 1.$$

M内の開集合$M' := M \setminus \{F_1 F_2 \cdots F_q W(g_0, g_1) = 0\}$上の関数

(6.3) $$v := |h|^{\frac{1}{1-p}} \left(\frac{|F_1 F_2 \cdots F_q|^{1-\delta}}{e^{u_1 + \cdots + u_q} |W(g_0, g_1)|} \right)^{\frac{p}{1-p}}$$

を考える。ここで，F_jは，写像g及び値$\alpha_1, \ldots, \alpha_q$に対し§4の最初に定義した様な関数を表す。仮定により，M'の普遍被覆$\varpi: \tilde{M}' \to M'$に対し，$\log v \circ \varpi$は$\tilde{M}'$上の調和関数である。$\log v \circ \varpi$に共役な調和関数$w$を取れば，$\psi = e^{\log v \circ \varpi + iw}$は$\tilde{M}'$上正則であり，$|\psi| = v \circ \varpi$をみたす。一点$o \in M'$を

取る．M'を$\mathbb{C}$内の部分領域とみて，0を原点としてよい．$\tilde{M}'$の各点$\tilde{p}$は，0と$\varpi(\tilde{p})$を結ぶM'内の連続曲線$\gamma_{\tilde{p}}$のホモトピー類と1対1に対応する．定数曲線0に対応する$\tilde{M}'$の点を$\tilde{0}$で表す．そこで，$\tilde{M}'$上の正則関数Fを

$$w = F(\tilde{p}) = \int_{\gamma_{\tilde{p}}} \varphi(z)\,dz$$

によって定義する．Fは，$F(0)=0$，$dF(\tilde{p}) \neq 0 \ (\tilde{p} \in \tilde{M}')$をみたす．従って，$\tilde{0}$の或開近傍$U$を，開円板$\Delta_R$上へ双正則にうつす．この様な$R$の中で最大のものを取り$\Phi := \varpi \circ (F|_U)^{-1}$ $: \Delta_R \longrightarrow M'$とおく．ここで$R = \infty$ではあり得ない．実際，$M'$は$\mathbb{C}$内の有界領域と双正則ゆえ，$\Phi$は$\Delta_R$上の有界正則関数とみなされ，$R = \infty$とするとLiouvilleの定理に矛盾する．

そこで，$\partial\Delta_R$の各点aに対し，0とaを結ぶ線分L_a，及びそのΦによる像

$$\Gamma_a : z = \Phi(ta) \qquad 0 \leqq t < 1$$

を考える．或点$a_0 \in \partial\Delta_R$に対し，Γ_{a_0}はMの境界に近づく事を示そう．これを否定する．このとき，各点$a \in \partial\Delta_R$に対し，$\zeta_0 := \lim_{\nu \to \infty} \Phi(t_\nu a) \in M$が存在する様な1に収束する数列$\{t_\nu\}$ $(0 < t_\nu < 1)$が取れる．$\zeta_0 \notin M'$とする．或iに対し$F_i(\zeta_0) = 0$のときは，補題5.1の証明の中で示したことから$\liminf_{z \to \zeta_0} |(F_1 F_2 \cdots F_g)(z)|^{\frac{\delta p}{1-p}} v(z) > 0$が成り立つ．また，$W(g_0, g_1)(\zeta_0) = 0$のときは，$\liminf_{z \to \zeta_0} |W(g_0, g_1)|^{\frac{p}{1-p}} v > 0$.

いずれの場合でも、ζ_0 の近傍で、

$$v \geqq \frac{C}{|z-\zeta_0|^{\delta p/(1-p)}}$$

が成り立つ様な正数 C が存在する。(6.2) に注意すれば、

$$R=\int_{L_a}|dw|=\int_{\Gamma_a}\left|\frac{dw}{dz}\right||dz|=\int_{\Gamma_a}v(z)|dz|\geqq C\int_{\Gamma_a}\frac{|dz|}{|z-\zeta_0|^{\delta p/(1-p)}}=\infty$$

となり、矛盾に逢着する。従って、$\zeta_0\in M'$。M' 内で相対コンパクトな ζ_0 の単連結開近傍 V を取る。v は $\bar{V}$ 上の正値連続実数ゆえ、$C':=\min_{z\in\bar{V}}v(z)>0$。もし $\Phi(ta)\notin V$ をみたす 1 にいくらでも近い t が存在すれば、Γ_a は、ζ_0 の近傍と ∂V の間を無限回往復し、

$$R=\int_{\Gamma_a}v(z)|dz|\geqq C'\int_{\Gamma_a}|dz|=\infty$$

となってしまう。従って或 $t_0\,(<1)$ に対し $\Phi(ta)\in V$ $(t_0<t<1)$ である。この議論は、V を ζ_0 の任意の開近傍で置き換えても有効である。これより $\lim_{t\to1-0}\Phi(ta)=\zeta_0$ が成り立つ。そこで、$\varpi^{-1}(V)$ の $\{(F|U)^{-1}(ta):t_0<t<1\}$ を含む連結成分 $\tilde{V}$ を取れば、$\varpi|\tilde{V}:\tilde{V}\to V$ は同相写像ゆえ、

$$\lim_{t\to1-0}(F|U)^{-1}(ta)=\tilde{p}_0\in\tilde{M}'$$

が存在する。他方、F は $\tilde{p}_0$ の或開近傍を a の開近傍上に双正則にうつす。これより、$(F|U)^{-1}$ は $\partial\Delta_R$ の任意の点の近傍に解析接続されることがわかる。結局 $\bar{\Delta}_R$ の近傍に接続さ

れる。これから容易にわかる様に、F は $\overline{U}$ の或閉近傍を Δ_R の閉近傍上に双正則にうつす。これは R の取り方に反す。従って、M の境界に近づく様な Γ_{a_0} が少くとも一つ存在する。

写像 $z=\Phi(w)$ は到る所で局所同相写像であり、M' 上の計量 ds^2 の Φ によるひきもどしは、

$$\Phi^*(ds^2) = |h\circ\Phi|^2 \, \|g\circ\Phi\|^4 \left|\frac{dz}{dw}\right|^2 |dw|^2$$

で与えられる。他方、$w=F(z)$ の定義より、

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|^{1-p} = \frac{|h|\,|F_1F_2\cdots F_q|^{(1-\delta)p}}{\left(e^{u_1+\cdots+u_q}\,|W(g_0,g_1)|\right)^p}$$

が成り立つ。$f=g\circ\Phi$, $f_0=g_0\circ\Phi$, $f_1=g_1\circ\Phi$ とおき、$u_j\circ\Phi$, $F_j\circ\Phi$ を略して u_j, F_j で表せば、$W(f_0,f_1)=(W(g_0,g_1)\circ\Phi)\frac{dz}{dw}$ より

$$\left|\frac{dz}{dw}\right| = \frac{\left(e^{u_1+\cdots+u_q}\,|W(f_0,f_1)|\right)^p}{|h|\,|F_1F_2\cdots F_q|^{(1-\delta)p}}$$

が得られる。従って、

$$(6.4)\qquad \Phi^*ds^2 = \left(\frac{\|f\|^2\left(e^{u_1+\cdots+u_q}\,|W(f_0,f_1)|\right)^p}{|F_1F_2\cdots F_q|^{(1-\delta)p}}\right)^2 |dw|^2.$$

ここで、写像 $f:\Delta_R\to P^1(\mathbb{C})$ に Main Lemma を適用すれば、

$$\Phi^*ds^2 \leqq C_1\left(\frac{2R}{R^2-|w|^2}\right)^{2p}|dw|^2$$

を得る。これより、

$$(6.5)\qquad d(0)\leqq \int_{\Gamma_{a_0}} ds = \int_{L_{a_0}} \Phi^*ds \leqq C_1^{\frac{1}{2}}\int_0^R \left(\frac{2R}{R^2-|w|^2}\right)^p |dw| = C_2R^{1-p}.$$

ここで，C_1, C_2 は α_j 及び $\delta_g^H(\alpha_j)$ $(\leqq \delta_f^H(\alpha_j))$ のみによってきまる定数を表す。そこで，定理 I における様に，M を完備とする。このとき $d(0)=\infty$ である。これは，$R<\infty$ に矛盾する。結局，非平坦完備極小曲面については，本節の大前提 $\sum_{j=1}^{q} \delta_g^H(\alpha_j) > 4$ が否定され，定理 I を得る。

§7. 定理 II の証明.

定理 II における様に，$x: M \to R^3$ を非平坦極小曲面 $g: M \to P^1(\mathbb{C})$ をその Gauss 写像とし，相異なる値 $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ に対し

$$(7.1) \qquad \sum_{j=1}^{q} \delta_g^O(\alpha_j) > 4$$

が成り立つものとする。前節で述べた様に，M は $\mathbb{C}$ 内の単位円板としてよい。$g=(g_0:g_1)$，$\|g\|$，F_j 等，前節の記号をそのまま踏襲する。仮定 (7.1) と O-defect の定義から，

$$\gamma := \left(1-\frac{1}{m_1}\right) + \cdots + \left(1-\frac{1}{m_q}\right) - 2 > 2$$

をみたし，各 F_j $(1 \leqq j \leqq q)$ が，$< m_j$ 位の零点を持たない様な正整数 $m_1, \dots, m_q$ が存在する。$\eta_j = \frac{1}{m_j}$，$u_j = \eta_j \log|F_j|$ とおく。このとき，各 u_j は $M \setminus f^{-1}(\alpha_j)$ 上調和であり，写像 $g: M \to P^1(\mathbb{C})$ に対し，§5 の条件 (C2)，(C3) をみたす。これらの u_j，η_j に対し，前節の議論がそのまゝ有効である。前節と全く同様の方法で写像 $\Phi: \Delta_R \to M'$ を定義し，写像

$f=(f_0:f_1)=g\circ\Phi:\Delta_R\to P^1(\mathbb{C})$ に Main Lemma を適用する。

(6.1) をみたす δ を取れば、

$$\frac{\|f\|^{\gamma-q\delta}|W(f_0,f_1)|}{|F_1|^{1-\eta_1-\delta}\cdots|F_q|^{1-\eta_q-\delta}}$$

(7.2)
$$=\frac{\|f\|^{\gamma-q\delta}e^{u_1+\cdots+u_q}|W(f_0,f_1)|}{|F_1F_2\cdots F_q|^{1-\delta}}\leqq C_0\left(\frac{2R}{R^2-|w|^2}\right)$$

が成り立つ。ここで C_0 は α_j、η_j のみによってきまる定数を表す。前節同様 $\rho=2/(\gamma-q\delta)$ とおいて、(7.2) を $\rho-1$ 乗し $w=0$ を代入すると、

(7.3)
$$R^{1-\rho}\leqq\frac{1}{(2C_0)^{1-\rho}}\frac{(|F_1(0)|^{1-\eta_1-\delta}\cdots|F_q(0)|^{1-\eta_q-\delta})^{1-\rho}}{|W(f_0,f_1)|^{1-\rho}\|f(0)\|^{2(1-\rho)/\rho}}.$$

一方、前節で求めた (6.4) に $e^{u_j}=|F_j|^{\eta_j}$ を代入すれば、

$$\Phi^*ds^2=\lambda^2|dw|^2=\frac{\|f\|^4|W(f_0,f_1)|^{2\rho}}{(|F_1|^{1-\eta_1-\delta}\cdots|F_q|^{1-\eta_q-\delta})^{2\rho}}|dw|^2$$

を得る。M の 0 での Gauss 曲率は、

$$K(0)=-\frac{\Delta\log\lambda}{\lambda^2}=-\frac{4|W(f_0,f_1)(0)|^{2(1-\rho)}(|F_1(0)|^{1-\eta_1-\delta}\cdots|F_q(0)|^{1-\eta_q-\delta})^{2\rho}}{\|f(0)\|^8}$$

によってあたえられる。この式を (7.3) の右辺と比較して

$$R^{1-\rho}\leqq\mathrm{const}\frac{\prod_{j=1}^{q}|F_j(0)|^{1-\eta_j-\delta}}{|K(0)|^{1/2}\|f\|^{2(1+\rho)/\rho}}$$

が得られる。ここで $|F_j|/\|f\|\leqq 1$、及び

$$\frac{2(1+\rho)}{\rho}=2\left(\frac{\gamma-q\delta}{2}+1\right)=\sum_{j=1}^{q}(1-\eta_j-\delta)$$

に注意すれば, $R^{1-\rho} \leq \mathrm{const}\,|K(0)|^{-1/2}$ を得る. この式を, 前節で得た(6.5)と組み合せれば, 求める結果が得られる.

§8　定理IIIの証明.

定理IIIにおける様に, $x=(x_1,\dots,x_4): M\to \mathbb{R}^4$ を非平坦完備極小曲面とし, $g=(g_1,g_2): M\to P^1(\mathbb{C})\times P^1(\mathbb{C})$ をそのGauss写像とする. §6及び§7と同様, Mは$\mathbb{C}$内の単位円板と双正則であるとしてよい. 各g_k $(k=1,2)$の既約表示 $g_k=(g_{k1}:g_{k2})$ を取り, $\|g_k\| = (|g_{k0}|^2+|g_{k1}|^2)^{1/2}$ とおく. このとき, Mの計量は

$$ds^2 := 2\left(\sum_{\ell=1}^{4} \left|\frac{\partial x_\ell}{\partial z}\right|^2\right)|dz|^2 = |h|^2\|g_1\|^2\|g_2\|^2|dz|^2$$

で与えられる. ここで $h = \left(\frac{\partial x_1}{\partial z} - \sqrt{-1}\,\frac{\partial x_2}{\partial z}\right)/g_{10}g_{21}$.

先ず(i)を示そう. 定理IIIの(a),(b),(c)すべてを否定すると, 各$k=1,2$に対し, 非負実数η_{kj}, 及び$M\setminus g_k^{-1}(\alpha_{kj})$上調和なM上の連続関数$u_{kj}$ $(1\leq j\leq q_k)$で, 条件

(8.1)　$\gamma_k := q_k - 2 - (\eta_{k1}+\cdots+\eta_{kq_k}) > 0 \quad (k=1,2)$

(8.2)　$\dfrac{1}{\gamma_1} + \dfrac{1}{\gamma_2} < 1$

(8.3)　$e^{u_{kj}} \leq \|g_k\|^{\eta_{kj}} \quad (1\leq j\leq q_k,\ k=1,2)$

(8.4)　$\lim\limits_{z\to\zeta} (u_{kj}(z) - \log|z-\zeta|) \in [-\infty, \infty)$

が各$\zeta\in g^{-1}(\alpha_{kj})$に対し存在する.

をみたすものが取れる. このとき, $\sum_{k=1}^{2} \dfrac{1}{\gamma_k - q_k\delta_0} = 1$ をみたすδ_0を取り, δ_0に十分近い$\delta\,(<\delta_0)$を選んで $\rho_k :=$

$1/(\gamma_k - g_k\delta)$ $(k=1,2)$ とおけば，

(8.5) $\qquad 0 < p_1 + p_2 < 1,$

(8.6) $$\frac{\delta p_k}{1-p_1-p_2} > 1 \qquad (k=1,2)$$

が成り立つ。各 α_{kj} を $\alpha_{kj} = (a_{kj}^0 : a_{kj}^1)$ と表示し，正則関数 $F_{kj} = a_{kj}^1 g_{k0} - a_{kj}^0 g_{k1}$ を定義する。ここで $|a_{kj}^0|^2 + |a_{kj}^1|^2 = 1$。§6 の関数 (6.3) の代りに，

(8.7) $$v := \frac{|h|^{\frac{1}{1-p_1-p_2}}\left(\left(\prod_{i=1}^{q_1}|F_{1i}|\right)^{p_1}\left(\prod_{j=1}^{q_2}|F_{2j}|\right)^{p_2}\right)^{\frac{1-\delta}{1-p_1-p_2}}}{\left(\left(e^{u_{11}+\cdots+u_{1q_1}}|W(g_{10},g_{11})|\right)^{p_1}\left(e^{u_{21}+\cdots+u_{2q_2}}|W(g_{20},g_{21})|\right)^{p_2}\right)^{\frac{1}{1-p_1-p_2}}}$$

を考えれば，$\log v$ は M の開集合

$$M' := M \setminus \{W(g_{10},g_{11})W(g_{20},g_{21})F_{11}\cdots F_{1q_1}F_{21}\cdots F_{2q_2}=0\}$$

上で調和である。M' の普遍被覆面 $\varpi : \tilde{M}' \to M'$ を取り，$\tilde{M}'$ 上で $|\psi| = v\cdot\varpi$ をみたす正則関数 ψ を選び，§6 と同様にして

$$w = F(\tilde{p}) = \int_{\gamma_{\tilde{p}}} \psi(z)\,dz \qquad (\tilde{p} \in \tilde{M}')$$

を定義する。F は点 $\tilde{o} \in \tilde{M}'$ の或開近傍 U を Δ_R 上に双正則にうつす。R をこの様な性質をもつものの中で最大のものとすれば，R は有限であり，一点 $a_0 \in \partial\Delta_R$ に対し，0 と a_0 を結ぶ線分 L_{a_0} の $\Phi := \varpi\circ(F|U)^{-1}$ による像 Γ_{a_0} が M の境界に近づく。実際，(6.2) の代りに (8.6) を使えば，§6 での論法がそのまゝ適用される。

そこで，$f_{k\ell} := g_{k\ell}\circ\Phi$ $(k=1,2,\ \ell=0,1)$，$f_k := (f_{k0} : f_{k1})$ とお

き、写像 f_k に Main Lemma を適用する。これより、

$$\frac{\|f_k\|^{\gamma_k - q_k\delta}\, e^{u_{k1}+\cdots+u_{kq_k}}\, |W(f_{k0}, f_{k1})|}{|F_{k1}F_{k2}\cdots F_{kq_k}|^{1-\delta}}$$

$$\leqq \mathrm{const}\,\frac{2R}{R^2-|w|^2} \qquad (k=1,2).$$

一方、Mの計量の Δ_R 上へのひきもどしは、

$$\Phi^* ds^2 = \|f_1\|^2\|f_2\|^2\left(|W(f_{10},f_{11})|\prod_{i=1}^{q_1}\frac{e^{u_{1i}}}{|F_{1i}|^{1-\delta}}\right)^{2p_1}\left(|W(f_{20},f_{21})|\prod_{j=1}^{q_2}\frac{e^{u_{2j}}}{|F_{2j}|^{1-\delta}}\right)^{2p_2}|dw|^2$$

によって与えられる。これらの事実と(8.5)を使えば

$$d(0) \leqq \int_{\Gamma_{a_0}} ds = \int_{L_{a_0}} \Phi^* ds \leqq \mathrm{const}\int_{L_{a_0}}\frac{|dw|}{(R^2-|w|^2)^{p_1+p_2}} < \infty.$$

これはMの完備性に反する。よって定理III,(i)を得る。

最後に定理III,(ii)を示そう。結論を否定すれば、写像 $g: M \longrightarrow P^1(\mathbb{C})$ に対し、$\gamma := q-2-(\eta_1+\cdots+\eta_q) > 1$、及び§5の条件(C2),(C3)をみたす正数 $\eta_1,\dots,\eta_q$ 及び $M\setminus f^{-1}(\alpha_j)$ 上調和な M 上の連続関数 u_j $(1\leqq j\leqq q)$ が存在する。正数 δ を、$p := 1/(\gamma-\delta q)$ が(6.2)をみたす様に選ぶ。(8.7)の代りに、今度は関数

$$v = \frac{|h|^{\frac{1}{1-p}}\, |F_1F_2\cdots F_q|^{p(1-\delta)/(1-p)}}{e^{u_1+\cdots+u_q}\,|W(g_0, g_1)|^{p/(1-p)}}$$

を使って、§6と全く同様の議論をすれば矛盾に到着することがわかる。従って定理III,(ii)が成り立つ。

References

[1] L.A. Ahlfors, Conformal invariants, Topics in geometric function theory, McGraw-Hill Book Comp., New York, 1973.

[2] C.C. Chen, On the image of the generalized Gauss map of a complete minimal surface in $\mathbb{R}^4$, Pacific J. Math., 102(1982), 9-14.

[3] S.S. Chern and R. Osserman, Complete minimal surfaces in euclidean n-space, J. d'analyse Math., 19(1967), 15-34.

[4] M.J. Cowen and P.A. Griffiths, Holomorphic curves and metrics of negative curvature, J. Analyse Math., 29(1976), 93-153.

[5] H. Fujimoto, On the Gauss map of a complete minimal surface in $\mathbb{R}^m$, J. Math. Soc. Japan, 35(1983), 279-288.

[6] H. Fujimoto, Value distribution of the Gauss maps of complete minimal surfaces in $\mathbb{R}^m$, J. Math. Soc. Japan, 35(1983), 663-681.

[7] H. Fujimoto, Non-integrated defect relation for meromorphic maps of complete Kähler manifolds into $P^{N_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times P^{N_k}(\mathbb{C})$, Japanese J. Math., 11(1985), 233-264.

[8] H. Fujimoto, On the number of exceptional values of the Gauss map of minimal surfaces, preprint.

[9] D.A. Hoffman and R. Osserman, The geometry of the generalized Gauss map, Amer. Math. Soc. Memoir 236, 1980.

[10] R. Osserman, Minimal surfaces in the large, Comm. Math. Helv., 35(1961), 65-76.

[11] R. Osserman, Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n, Ann. of Math., 80(1964), 340-364.

[12] R. Osserman, A survey of minimal surfaces, Van Nostrand Reinhold, New York, 1969.

[13] B.V. Shabat, Distribution of values of holomorphic mappings, Transl. of Math. Monographs Vol. 61, AMS. 1985.

[14] F. Xavier, The Gauss map of a complete non-flat minimal surface cannot omit 7 points of the sphere, Ann. of Math., 113(1981), 211-214.