数理解析研究所講究録
第627巻 1987年 22-38


# Brown運動と調和解析 II ―Varopoulosの方法の周辺―

東北大理 新井 仁之 (Hitoshi Arai)

Brown 運動をはじめとする種々の拡散過程やmartingaleが解析学、とりわけ古典調和解析学に及ぼした影響は少なくない。その中でも、N. Th. Varopoulosが行なった研究([19], [20] [21])は、Burkholder, Gundy, Silverstein [1] 以来のこの方面の研究方法を著しく発展させ、martingale理論、関数環論に影響を及ぼし、さらに、古典調和解析学にも新しい結果をもたらした。

本稿では、そのVaropoulos の方法を、調和解析学への応用という立場から紹介し、「Brown 運動と調和解析 I」(以下「I」と略記)の定理1′をもとに、その適用範囲を広げることを試み、調和解析学への応用をいくつか与える。また、(「I」との関連から)関数環論に現れる一つの解析射影の確率論的な構成についても述べる。

§1. 解析学から見たVaropoulosの方法

$\{B_t\}$を$n$次元Brown運動で、$B_0=0$ a.s. なるものとし、$(\Omega, \mathcal{F}, P)$を$\{B_t\}$が定義されている完備確率空間とする。

$$\mathcal{F}_t := \sigma[B_s : 0 \le s \le t] \vee \{P\text{-null sets}\}$$

とし、以下では、簡単のため、$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty \ (:= \vee_{t\ge 0} \mathcal{F}_t)$を仮定しておく。このとき、組$(\Omega, \mathcal{F}, P\,;(\mathcal{F}_t);(B_t))$を$n$次元Brownian spaceといい、$\mathbb{B}_n$で表わす。$B_t = (x_t^1, \dots, x_t^n)$とおく。

$\mathbb{B}_n$の偶数次元化のため、

$$\mathbb{B}_{n'} := \begin{cases} \mathbb{B}_n & (n \text{ が偶数}) \\ \mathbb{B}_n \otimes \mathbb{B}_1 & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

とおく。ここで、$\mathbb{B}_n \otimes \mathbb{B}_1$とは、$\mathbb{B}_n$を1次元もち上げることで、これは、1次元Brownian space $(\Omega', \mathcal{F}', P'\,;(\mathcal{F}'_t);(B'_t))$を適当にとることによって、$(\Omega\otimes\Omega', \mathcal{F}\otimes\mathcal{F}', P\otimes P'\,;(\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{F}'_t);(B_t, B'_t))$としたものである。$n'=2m$のとき、$\mathbb{B}_{n'}$に対して、

$$z_t^j := x_t^{2j-1} + \sqrt{-1}\,x_t^{2j} \quad ; \ (B_t, B'_t) = (x_t^1, \dots, x_t^{2m}) \quad (j=1,\dots,m)$$

とおく。

この$\mathbb{B}_{n'}$は、Varopoulosの理論では、重要な役割を果す。

さて、martingale理論で定義され研究されているHardy空間$\mathcal{M}^p$は次のようなものである：

$$\mathcal{M}^p(\mathbb{B}_n) := \left\{ X_\infty : \begin{array}{l} X=(X_t) \text{ は } \mathcal{F}_t \text{ に適合した martingale で、} \\ \|X\|_{\mathcal{M}^p} := \|\sup_{0\le t<\infty} |X_t|\,\|_{L^p(\Omega,\mathcal{F},P)} < \infty \end{array} \right\}$$

$(1 \leqq p \leqq \infty)$。よく知られているように、$\mathcal{M}^1(\mathbb{B}_n) \subsetneqq L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ かつ $\mathcal{M}^p(\mathbb{B}_n) = L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $1 < p \leqq \infty$ である。

以下で行う議論は、主として $\mathcal{M}^p(\mathbb{B}_n)$ に関するものであるがその多くは、$\mathcal{BMO}(\mathbb{B}_n)$ に対しても成立している。

Varopoulos の理論は、この $\mathcal{M}^p(\mathbb{B}_n)$ と球面 $S^{n-1} = \{z \in \mathbb{R}^n : |z| = 1\}$ 上の Hardy 空間との関係を求めることが、その基礎となっている：$U = \{z \in \mathbb{R}^n : |z| < 1\}$, $\partial U = S^{n-1}$ とし、$\sigma$ を $\partial U$ 上の Lebesgue 測度とする。$H^p(\sigma)$ の定義は「I」と同じものとする。$\tau := \inf\{t > 0 : B_t \notin U\}$ とし、$H^p(\sigma)$ と $\mathcal{M}^p(\mathbb{B}_n)$ とを次の二つの変換で関連づけておく：$f \in L^1(\sigma)$ に対して、

$$Mf_t := \begin{cases} PI[f](B_t) & (0 \leq t < \tau) \\ f(B_\tau) & (\tau \leqq t) \end{cases}$$

とおく。但し、ここで、$PI[f]$ は $f$ の Poisson 積分である。このとき、$Mf_t$ は $\mathcal{F}_t$ に適合した martingale で、$Mf_\infty = f(B_\tau)$ a.s. となっている。また、$X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対して、

$$NX(x) := E[X \mid B_\tau = x] \qquad (x \in \partial D)$$

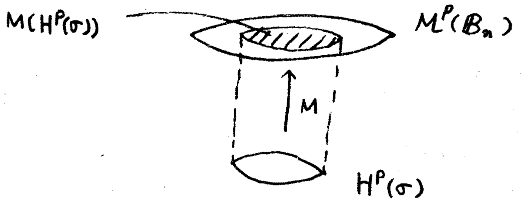
とおく。明らかに、

$$\|NX\|_{L^p(\sigma)} \leqq C_p \|X_\infty\|_{L^p} \qquad (1 \leqq p \leqq \infty)$$

である。

このとき、Burkholder-Gundy-Silverstein [1]（あるいは P. Meyer [22], Arai [14]）より、$M : f \mapsto Mf_\infty$ は、$H^p(\sigma)$ の

$\mathcal{M}^p(\mathbb{B}_n)$の中への埋め込みになっている。




Varopoulos 以前の研究方法は、この埋め込みの考え方に依るものが多い。すなわち、$H^p(\sigma)$の元をMによって、$\mathcal{M}^p(\mathbb{B}_n)$の元とみなし、$\mathcal{M}^p(\mathbb{B}_n)$の中において、$M(H^p(\sigma))$の範囲を越えないように確率論的に解析し、それをMの逆像によって、$H^p(\sigma)$の結果に引き戻すというもの — ないしは、このタイプのもの — である。

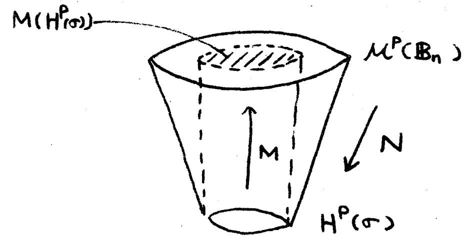
しかし、ここで、"$M(H^p(\sigma))$の範囲を越えない"という制限は、確率解析の使用に多くの制限を課し、martingale理論の古典解析学への応用範囲をせばめてしまっている。

Varopoulosの方法の第1のポイントは、写像$N$の

$$\|NX\|_{H^p(\sigma)} \leqq C_p \|X\|_{\mathcal{M}^p} \qquad (1 \leqq p \leqq \infty)$$

なる有界性を示し、この有界性を用いて、"$M(H^p(\sigma))$の範囲を越えない"なる制限を除去できる可能性を示したことである。すなわち、$f \in H^p(\sigma)$のMによる像Mfの確率解析による結果が$M(H^p(\sigma))$の範囲を越えるものであっても、それを$N$によって、$H^p(\sigma)$の結果に引き戻せることをいくつかの例によっ

て示したのである。




Varopoulos の方法の第２のポイントは、$\mathcal{M}^p(\mathbb{B}_n)$ を $\mathcal{M}^p(\mathbb{B}_{n'})$ に埋め込んで考えても、不都合は（現時点では）生じないことに着目し、一般次元における解析も、偶数次元の Brownian space の中で考えることができることを示したことである。さらに、第３のポイントは、$\mathbb{B}_n$ を偶数次元化した $\mathbb{B}_{n'}$ において、次の分解を行なったことである：

$$\forall X \in \mathcal{M}^p(\mathbb{B}_{n'}) \quad (1 \leqq p) \quad \exists \, \alpha_1, \cdots, \alpha_m ; \beta_1, \cdots, \beta_m \ (\text{non-anticipating functional})$$

$$X_t = X_0 + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \alpha_j(s)\, dz_s^j + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \beta_j(s)\, d\bar{z}_s^j \qquad (0 \leq t)$$

（$^-$ は複素共役）

この分解自身は、Ito representation theorem (cf. [23]) と簡単な計算によって導びかれるが、しかし、この分解の効用は大きい。実際、

$$\mathcal{H}^p(\mathbb{B}_{n'}) := \left\{ X_\infty \in \mathcal{M}^p(\mathbb{B}_{n'}) : \ \underset{\text{non-anticipating functional}}{X_t = X_0 + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \alpha_j(s)\, dz_s^j \ ; \ \alpha, \cdots \alpha_m \text{ は}} \right\}$$

$(1 \leqq p \leqq \infty)$ とおくとき、次のことが成り立つ（[20]）：

(1.1) $\mathcal{M}^p(\mathcal{B}_{n'}) = \mathcal{H}^p(\mathcal{B}_{n'}) \oplus \overline{\mathcal{H}}_0^p(\mathcal{B}_{n'})$ $(1 \leq p < \infty)$

但し、ここで、$\overline{\mathcal{H}}_0^p(\mathcal{B}_{n'}) := \{\overline{X} : X \in \mathcal{H}^p(\mathcal{B}_n),\ X_0 = 0\}$ ;

(1.2) $X \in \mathcal{H}^p(\mathcal{B}_{n'})$, $Y \in \mathcal{H}^q(\mathcal{B}_{n'})$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ p \geq 1)$ のとき、

$Z_t := X_t Y_t$ は martingale で、さらに $Z_\infty \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B}_{n'})$ ;

(1.3) $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{B}_{n'})$ は*弱 Dirichlet 環になっている。

とりわけ、(1.3) が本質的である。*弱 Dirichlet 環とは、可換Banach環の一種で、単位円周 $\Gamma$ 上の $H_A^\infty(\Gamma, \frac{d\theta}{2\pi})$ (「I」参照) を抽象化したものである ($\frac{d\theta}{2\pi}$ は、$\Gamma$ 上の正規化した Lebesgue 測度)。その定義は、次のものである。

定義 (*Srinivasan, Wang* ; [16] 参照) $(S, \mathcal{B}, m)$ を確率空間とする。$A \subset L^\infty(S, \mathcal{B}, m)$ が次の条件をみたすとき、A を*弱 Dirichlet 環という:

(i) $A \ni 1$ ;

(ii) A は $L^\infty(S, \mathcal{B}, m)$ の部分空間で、かつ $f \in A$, $g \in A$ ならば $fg \in A$ である ;

(iii) $\int fg\, dm = \int f\, dm \int g\, dm$ $(f, g \in A)$ ;

(iv) $A + \overline{A}$ は $L^\infty(S, \mathcal{B}, m)$ で*弱稠密である。

勿論、$H_A^\infty(\Gamma, \frac{d\theta}{2\pi})$ $(\Gamma := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\})$ は、*弱 Dirichlet 環の

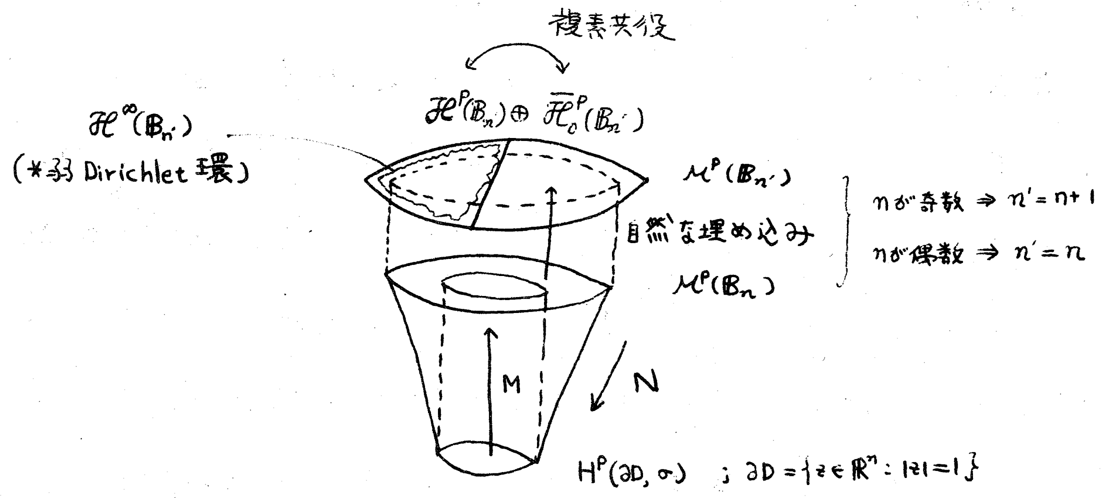
一例である。＊弱Dirichlet環の例及び定理については、[16][25]に詳述されている。

注意．$X_t = X_0 + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \alpha_j(s) dz_s^j$ なる表現をもつ martingale は、holomorphic martingale と呼ばれている。holomorphic martingale は、Getoor-Sharpe [36] の Conformal martingale になっている。しかし、逆は成立しない。たとえば、$\bar{z}_t^1$ は Conformal mart. であるが holomorphic mart. ではない。しかし、martingale X に対して、次が成立する：

X が Conformal martingale $\Longleftrightarrow$ X か $\bar{X}$ が holomorphic martingale.

Varopoulos の方法において、martingale を holomorphic な部分に分解することは本質的で、これを conformal におきかえることは難しい。実際、(1.2), (1.3) は、holomorphic mart. 特有の性質である。たとえば、(1.2) について、$z_{\tau\wedge t}^1$, $\bar{z}_{\tau\wedge t}^1$ $(\tau = \inf\{t>0 : |z_t^1|>1\})$ はともに conformal であるが、$z_{\tau\wedge t}^1 \bar{z}_{\tau\wedge t}^1 = |z_{\tau\wedge t}^1|^2$ は martingale ではない。

以上述べてきた Varopoulos の方法の3つのポイントをまとめて、図式化すると次のようになる：




ここで、注目すべき事柄は、

(*) $$\mathcal{M}^p(\mathbb{B}_{n'}) = \mathcal{H}^p(\mathbb{B}_{n'}) \oplus \overline{\mathcal{H}}^p_0(\mathbb{B}_{n'}) \qquad 1\le p<\infty$$

なる分解が、じつは、2次元的（複素1次元的）現象であるということである。実際、解析学の場合、$D:=\{z\in\mathbb{C}^m : |z|<1\}$ $\sigma:=$"$\partial D$上のLebesgue測度"のとき、

$$H^p(\partial D,\sigma) = H^p_A(\partial D,\sigma)\oplus \overline{H}^p_{A,0}(\partial D,\sigma)$$

($\overline{H}^p_{A,0}(\partial D,\sigma):=\{\bar f : f\in H^p_A(\partial D,\sigma),\ \int f\,d\sigma=0\}$) なる分解は、$m=1$ (i.e. $n=2m=2$) の場合に限られている。しかし、上図の示すところは、$m>1$ に対して解析学的に不可能であった分解が、martingaleの設定のもとでは、可能になっているということである。このことのメリットは大きい。なぜなら、関数環論が明らかにしているところによれば、単位円周上の古典調和解析に現れる多くの結果は、ほとんど、2次元的分解

$L^2=H^2_A\oplus\bar{H}^2_{A,0}$ にもとずいているものだからである。しかも、その結果の多くは、すでに、*弱Dirichlet環の場合にまで抽象化されている。たとえば、Helson-Szegö の定理 (cf. [26], [27], [20])、不変部分空間に関する種々の定理、因数分解定理、などである (cf. [16])。従って、前頁の図からわかるように、$H^p(\partial D,\sigma)$ ($\partial D:=\{z\in R^n: |z|=1\}$) の解析の問題は、$\mathcal{M}^p(\mathbb{B}_{n'})$ にまで引き上げて考察すれば、holomorphic martingale と *弱 Dirichlet環の理論を通すことによって、単位円周上での手法を用いて解析することができることがわかる。この Varopoulos の方法の適用例として次のようなものがあげられる:

例1 ([20]). $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{B}_{n'})$ (*弱 Dirichlet環) に対する「Helson-Szegö の定理」$\Longrightarrow$「Garnett-Jones の BMO と $L^\infty$ の距離に関する定理 ([28]) の $\partial D:=\{z\in R^n: |z|=1\}$ での証明」

例2. 「$\mathcal{H}^\infty(\mathbb{B}_{n'})$ (*弱 Dirichlet環) に対する Inner-Outer分解」$\Rightarrow$「C. Fefferman の $H^1$-BMO に関する不等式 ([2]) の $\partial D:=\{z\in R^n: |z|=1\}$ での証明」

しかし、この方法には欠点もある。それは、$\mathcal{M}^p(\mathbb{B}_{n'})$での解析の結果を $N$ によって $H^p(\partial D,\sigma)$ の結果に引き戻しても、それが、解析学的には、意味のない結果に変化してしまうこと

とが（ひんぱんに）あるということである。その例を一つ示しておく。

例3（コロナ問題に関して）。$\partial D := \{z \in \mathbb{C}^m : |z| = 1\}$ とおく。このパラグラフでは、$f \in L^1(\partial D, \sigma)$ に対して、$f(z) = PI[f](z)$ $(z \in D)$ と略記する。コロナ問題とは、

$$(C)\begin{cases} f_1, \cdots, f_k \in H_A^\infty(\partial D, \sigma) \quad (\text{但し}\ \exists \delta > 0 : \inf_{z \in D} \sum_{j=1}^{k} |f_j(z)| \geq \delta)\ \text{に対して、} \\ \exists g_1, \cdots, g_k \in H_A^\infty(\partial D, \sigma) : \sum_{j=1}^{k} f_j(z) g_j(z) = 1 \quad (\forall z \in D) \quad ? \end{cases}$$

なる問題である。$m = 1$ の場合は、L. Carleson [29] によって肯定的に解かれたが、$m > 1$ の場合は、未解決である。ところで、Varopoulos は次の定理を証明した：

定理 V（[20]; see also [30]）．$X^{(1)}, \cdots, X^{(k)} \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{B}_n)$ が $\inf_{t \geq 0} \sum_{j=1}^{k} |X_t^{(j)}| \geq {}^{\exists}\delta > 0$ をみたすならば、ある $Y^{(1)}, \cdots, Y^{(k)} \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{B}_n)$ で、$\sum_{j=1}^{k} X_t^{(j)} Y_t^{(j)} = 1$ $(\forall t)$ a.s. なるものが存在する。

この定理Vと、8頁の④式より、次のことがわかる：

$$(*)\begin{cases} f_1, \cdots, f_k \in H_A^\infty(\partial D, \sigma)\ \text{が}\ \inf_{z \in D} \sum_{j=1}^{k} |f_j(z)| \geq {}^{\exists}\delta > 0\ \text{をみたせば、} \\ \exists g_1, \cdots, g_k \in N\mathcal{H}^\infty(\mathbb{B}_{2m}) : \sum_{j=1}^{k} f_j(z) g_j(z) = 1 \quad (\forall z \in D) \end{cases}$$

Varopoulos [20] によれば、$m = 1$ のとき $N\mathcal{H}^\infty(\mathbb{B}_2) = H_A^\infty(\partial D)$ である。すなわち、$m = 1$ の場合、(*) は問題 (C) に肯定的な解を与えたことになる。これは、L. Carleson の定理の確率論

的証明である。

しかし、一般の $m$ について、このようなことはいえない。実際、次の定理が得られる：

定理1. $\partial D=\{z\in\mathbb{C}^m : |z|=1\}$ とする．

$$N\mathcal{H}^\infty(\mathbb{B}_{2m})\subset H_A^\infty(\partial D,\sigma)\iff m=1.$$

（証明） $m>1\Rightarrow N\mathcal{H}^\infty(\mathbb{B}_{2m})\not\subset H_A^\infty(\partial D,\sigma)$ を示せばよい。このため、$N\mathcal{H}^\infty(\mathbb{B}_{2m})\subset H_A^\infty(\partial D,\sigma)$ $(m>1)$ として矛盾を導く。

$u(z_1,z_2)=z_1\overline{z_2}$ とおくと、$u$ は、$D:=\{z\in\mathbb{C}^m : |z|<1\}$ 上の有界調和関数である。従って、Fatou の定理より、$\exists_1 f\in L^\infty(\partial D,\sigma)$ : $u=PI[f]$. ゆえに、$Mf\in\mathcal{M}^\infty(\mathbb{B}_{2m})\subset\mathcal{H}^2(\mathbb{B}_{2m})\oplus\overline{\mathcal{H}}{}^2_0(\mathbb{B}_{2m})$．すなわち、$\exists X, Y\in\mathcal{H}^2(\mathbb{B}_{2m})$ : $Mf=X+\overline{Y}$ である。さらに、仮定より、$f=NX+\overline{NY}\in H_A^2(\partial D,\sigma)+\overline{H}{}^2_{A,0}(\partial D,\sigma)$ （$N\mathcal{H}^\infty(\mathbb{B}_{2m})\subset H_A^\infty(\partial D,\sigma)$ より、$N\mathcal{H}^2(\mathbb{B}_{2m})\subset H_A^2(\partial D,\sigma)$ が導びかれる）。このことから、$u=PI[f]=PI[NX]+\overline{PI[NY]}$ は、pluriharmonic でなければならない。ところが、$u$ の定義より明らかに、$u$ は pluriharmonic ではない。

§2 $\mathcal{H}^p$ と $H_A^p$. 前§で述べたように、Varopoulos の方法の本質的な部分の一つは、$H^p(\partial D,\sigma)$ （$\partial D:=\{z\in\mathbb{R}^n : |z|=1\}$）の解析を $\mathcal{H}^p$ の解析にもち込むというところである。このため、$\mathcal{H}^p$ を $H_A^p$ との関連から、その構造を明らかにしておく必要が

ある。定理1より、$H^p_A(\partial D, \sigma)$ ($\partial D := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$) と $\mathcal{H}^p(B_2)$ との構造の比較をしておくことが、まず問題になる。これについては、次のことが知られている：

| | 単位円周上の $H^\infty_A$ | $\mathcal{H}^\infty = \mathcal{H}^\infty(B_{2m})$ ($m \geqq 1$) |
|---|---|---|
| *弱Dirichlet性 | 成立 (cf. [25]) | 成立 ([20]) |
| コロナ性 | 成立 ([29]) | 成立 ([20]; [30]) |
| 解析構造 | もつ (trivial) | もたない ([31]) |
| *弱極大性 | もつ (cf.[6]) | もたない ([32]) |
| 零集合の形 | $f \in H^\infty_A$, $Z(f) := \{x \in \partial D : f(x) = 0\}$ $\Rightarrow$ $\sigma(Z(f)) = 2\pi$ or $0$ (cf.[6]) | $\mathcal{S}' := \{T : T < \infty$ なる $\mathcal{F}_t$-stopping time$\}$, $\tilde{\mathcal{F}} = \bigcup_{T \in \mathcal{S}'} \mathcal{F}_T$ $^\forall G \in \tilde{\mathcal{F}}$ $^\exists X \in \mathcal{H}^\infty$ : $G = \{X_\infty = 0\}$ a.s. ([32]) |
| 単位球の端点の形 | $f$ が $H^\infty_A$ の単位球の端点 $\Leftrightarrow$ $\Vert f \Vert_\infty = 1$ & $\int_{\partial D} \log \vert f \vert d\sigma = -\infty$ (cf.[6]) | $X_\infty$ が $\tilde{\mathcal{F}}$-可測とする。$X$ が $\mathcal{H}^\infty$ の単位球の端点 $\Leftrightarrow$ $\vert X_\infty \vert = 1$ a.s. ([32]) |
| カノニカル環の形 | $H^\infty_{min} = L^\infty$, $H^\infty_{max} = H^\infty_A$ (cf.[6]) | $H^\infty_{min} = \mathcal{H}^\infty$, $H^\infty_{max} = L^\infty$ ([32]) |

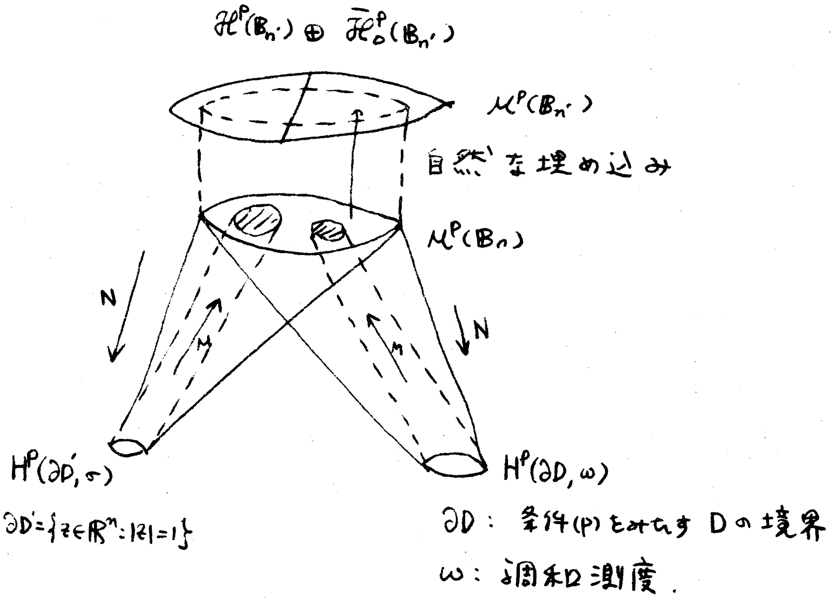
§3. Varopoulos の方法より得られるその他のメリット.

$D\subset \mathbb{R}^n$ を有界領域で、$D$ においては Dirichlet 問題が解けているものとする。このとき、次のような条件を考える:

$$\text{条件}(P)\left\{\begin{array}{l} \|Mf\|_{\mathcal{M}^1} \leqq C_1 \|f\|_{H^1} \\ \|NX\|_{H^1} \leqq C_1 \|X\|_{\mathcal{M}^1} \end{array}\right.$$

($\mathcal{M}^p = L^p(\Omega)$ $(1<p\leqq\infty)$ であるから、条件としては、$p=1$ を考えれば十分である。)

まず、§1で書いた図は、条件(P)をみたすような $D$ に対しても書けることに注意する:




この図は、領域 $D$ が、(そこで Dirichlet 問題が解け)条件

(P) をみたし、かつ有界であれば、§1で述べた球の場合と同様、$H^p(\partial D, \omega)$ の解析に、単位円周での手法を用いることができるということを示している。そこで、どのようなDに対して、条件(P)が成立するかということが重要な問題となる。これに対しては、次の結果がある：

定理2([14],[15]). $D \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ がNTA領域ならば、Dは条件(P)をみたす。(NTA領域の定義は[10]又は「I」§2参照)。

定理2から、non-smooth domain 上の解析に Varopoulos の方法が用いられることがわかる。この点に着目して、non-smooth domain 上の調和解析に関する結果を証明したものとして、[14],[15]がある。また、以上のことの2径数化も可能で、それについては、[33],[34]、また、martingale の考え方を利用したものに[35]がある。(なお、これらの結果のいくつかは、その解析的証明はまだ見出されていない。)

§4. 解析射影の確率論的構成. $D \subset \mathbb{C}$ を $0 \in D$ なる有界領域で、Dにおいては、Dirichlet 問題が解け、かつ条件(P)をみたすものとする。$\omega$ をDと0に関する調和測度とする。

さて、$\mathcal{M}^2(\mathbb{B}_2)$ において

$$\mathfrak{M} : X_0 + \int_0^\infty \alpha_j(s)\,dz_s^j + \int_0^\infty \beta_j(s)\,d\bar{z}_s^j \longmapsto X_0 + \int_0^\infty \alpha_j(s)\,dz_s^j$$

とし、

$$T = N \circ \mathfrak{M} \circ M$$

とおく。明らかに、$T$ は $L^2(\omega)$ から $L^2(\omega)$ への有界線形作用素であり、かつ条件(P)より、

$$\|Tf\|_{L^p} \leqq C_1 \|f\|_{H^p} \qquad (f \in L^2(\omega) \cap L^p(\omega)),\quad 1 \leqq p < \infty$$

である。

もし、$D$ が単連結の場合には、$T = P_\omega$ となることが容易に示せる([15])。従って、

定理3. $D \subset \mathbb{C}$ が有界単連結領域で、Dirichlet問題が解けかつ条件(P)をみたすならば、$P_\omega = T$ かつ $P_\omega$ は $H^p$–$L^p$ 有界である。(see also「I」定理1).

注:どのようなとき、$P_\omega = T$ になるかという問題もあるが、いかなる有限連結領域に対しても、単連結でなければ、$P_\omega \neq T$ であり、Range $T \not\subset H_A^2(\omega)$ である。このことは、$L^2(\omega)$ と $\mathcal{M}^2(\mathbb{B}_2)$ との holomorphic Hardy space への分解の形をみればわかることである。

# 参考文献 (文献番号は「1」から続く)

[19] N. Th. Varopoulos, A probabilistic proof of the Garnett-Jones theorem on BMO, Pacific J. Math. 90 (1980), 201-221.

[20] N. Th. Varopoulos, The Helson-Szegö theorem and $A_p$-functions for Brownian motion and several variables, J. Funct. Anal. 39 (1980), 85-121.

[21] N. Th. Varopoulos, Probabilistic approach to some problem in complex analysis, Bull. Sc. math. $2^e$ serie, 105 (1981), 181-224.

[22] P. A. Meyer, Le dual de $H^1(R^\nu)$; demonstrations probabilistes, Lect. Notes in Math., Springer, 581 (1977), 132-195.

[23] H. P. McKean, Stochastic Integrals, Academic Press, New York, 1969.

[24] N. Ikeda and S. Watanabe, Stochastic Differential Equations and Diffusion Process, North Holland/ Kodansya, Tokyo, 1981.

[25] 中路, *弱Dirichlet環の不変部分空間について, 数学 30 (1978); 207-217.

[26] I. I. Hirschman and R. Rochberg, Conjugate function theory in weak * Dirichlet algebras, J. Funct. Anal. 16 (1974), 359-371.

[27] Y. Ohno, Remarks on Helson-Szegö problems, Tohoku Math. J. 18 (1966), 54-59.

[28] J. Garnett and P. Jones, The distance in BMO to $L^\infty$, Ann. of Math. 108 (1978), 373-393.

[29] L.Carleson, Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem, Ann of Math. 76 (1962), 547-549.

[30] H. Arai, Measures of Carleson type on filtrated probability spaces and the corona theorem on complex Brownian spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 96 (1986), 643-647.

[31] K. Carne, The algebra of bounded holomorphic martingales, J. Funct. Anal. 45 (1982), 95-108.

[32] H. Arai, On the algebra of bounded holomorphic martingales, Proc. Amer. Math. Soc. 97 (1986), 616-620.

[33] H. Arai, On an inequality of Varopoulos for 2-parameter Brownian martingales, Tokyo J. Math. 9 (1986), 373-382.

[34] H. Arai, Carleson measures on product domains and 2-parameter Brownian martingales, Arch. Math. 46 (1986), 343-352.

[35] H. Arai, A note on functions of vanishing mean oscillation on the bidisk Bull. London Math. Soc. 18 (1986), 595-598.

[36] R. K. Getoor and M. J. Sharpe, Conformal martingales, Invent Math. 16 (1972), 271-308.