数理解析研究所講究録
第627巻 1987年 39-52

Brown運動と調和解析III ―多様体上の調和解析―

東北大理　新井仁之（Hitoshi Arai）

単位円板 $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ 上の調和解析の一般化には、次のような二つの方向がある。一つは、D 上の調和関数を $\mathbb{R}^2$ のユークリッド計量に関する Laplacian Δ に対する Laplace 方程式の解ととらえる立場に立つものであり、もう一つは、D のポアンカレ計量に関する Laplacian Δ_D に対する Laplace 方程式の解ととらえる立場に立つものである。前者は、「Brown 運動と調和解析I」「同II」でも論じたように、$\mathbb{R}^n$ 内のより複雑な領域上の調和解析（ただし、調和性は、$\mathbb{R}^n$ のユークリッド計量に関するもの）へと一般化される。また、後者の一般化は、いくつかのタイプがあり、その一つは、対称空間への一般化であり、また別の一つは、断面曲率 $\leqq -a^2<0$ なる Cartan-Hadamard 多様体への一般化である。

とりわけ、後者の Cartan-Hadamard 多様体については、最近、M.T. Anderson [36], D. Sullivan [37], M.T. Anderson

R. Schoen [38] が、$-b^2 \leqq$ 断面曲率 $\leqq -a^2$ なる制限のもとに、Asymptotic Dirichlet 問題を解くことに成功し、今後の systematic な研究が期待されている (cf. Yau [42])。

本稿では、多様体上の Brown 運動を使って、$-b^2 \leqq$ 断面曲率 $\leqq -a^2$ なる Cartan-Hadamard 多様体上の調和解析を展開する。詳細は、別に発表する予定である ([43]; [39]).

§1. Sphere at infinity ([40]).

以下、本稿では、(M, g) を n 次元 Riemann 多様体とし、さらに、(M, g) は完備、単連結で、その断面曲率 K_M は、ある定数 $a>0$, $b>0$ によって $-b^2 \leqq K_M \leqq -a^2$ となっている (i.e. $-b^2 \leqq K_M \leqq -a^2$ なる Cartan-Hadamard 多様体) とする。

まず、M の sphere at infinity の定義を行う。この定義は、P. Eberlein と B. O'Neill [40] によって与えられたものである。

$$\mathcal{G} := \{ \gamma : (-\infty, \infty) \to M \mid \gamma \text{ は測地線で、すべての } t \in \mathbb{R} \text{ に対して、} \|\dot\gamma(t)\| := \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))} = 1 \}$$

なるものとする。$\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{G}$ に対して、

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \sup_{t \geq 0} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) < \infty$$

と定義する。ただし、ここで、d は Riemann 計量 g から導入される M 上の距離関数である。このとき、$\sim$ は同値関係にな

っている。そこで、

$$S(\infty) := \mathcal{G}/\sim$$

と定める。この $S(\infty)$ が sphere at infinity である。$S(\infty)$ はMの「方向」の集まりと考えることができる。すなわち、直観的には、$S(\infty)$ は、無限遠にふ着した集合とみなすことができる。

$\bar{M} = M \cup S(\infty)$ とおく。$\bar{M}$ は、次に述べる cone topology によって、Mの一つのコンパクト化となる。これは、丁度、球Dに球面 ∂D を加えてDのコンパクト化 $D \cup \partial D$ をつくる操作の一般化とみなせるものである：

— Cone Topology —

$p \in M$ に対して、$S_p := \{ v \in T_pM : \|v\| = \sqrt{g_p(v,v)} = 1 \}$ とおく。そして、$v \in S_p$, $0 < \delta < \pi$ に対して、

$$C_p(v, \delta) := \{ x \in \bar{M} : \measuredangle_p(v, x) < \delta \}$$

とおく。ただし、ここで、$\measuredangle_p(v, x)$ は、p と x を結ぶ唯一つの測地線 $\gamma_{px} \in \mathcal{G}$ の p での接ベクトルとベクトル v の角度を表わすものとする。また、$v \in S_p$, $0 < \delta < \pi$, $r > 0$ に対して、

$$T_p(v, \delta, r) := C_p(v, \delta) - B_p(r)$$

$(B_p(r) := \{ x \in M : d(x, p) < r \})$ とおく。$T_p(v, \delta, r)$ は、truncated cone と呼ばれている。Cone topology は、この

truncated cone を使って定義される：

定理（[40]）．$\mathcal{B}_p := \{T_p(v,\delta,r) : v \in S_p,\ 0<\delta<\pi,\ r>0\} \cup \{B_p(r) : p \in M,\ r>0\}$ とおく。このとき、$\mathcal{B}_p$ は $\bar{M}$ のある位相 $\mathcal{O}_p$ の局所基を与え、この位相 $\mathcal{O}_p$ によって、位相空間 $(\bar{M}, \mathcal{O}_p)$ はコンパクト空間になる．この $\mathcal{O}_p$ を cone topology という．

Cone topology の性質は、次の通りである：

(1) $\mathcal{O}_p \approx \mathcal{O}_q \quad (p \neq q) \qquad (\approx$ ：同相$)$

(2) $(\bar{M}, \mathcal{O}_p)$ は、$\{z \in \mathbb{R}^n : |z| \leqq 1\}$ と同相

(3) $(S(\infty), \mathcal{O}_p|_{S(\infty)})$ は、$\{z \in \mathbb{R}^n : |z| = 1\}$ と同相

(4) $(M, \mathcal{O}_p|_M)$ は、M の initial topology と同相．

§2．$S(\infty)$ の regularity（[36]，[37]，[38]）．

$S(\infty)$ の regularity は、M. T. Anderson，D. Sullivan 等によって証明された：

定理（[36]，[37]，[38]）　$\forall f \in C(S(\infty)),\ \exists_1 \tilde{f} \in C(\bar{M}) \cap C^2(M)$：

$$\Delta_M \tilde{f} = 0 \quad \text{on } D \quad \& \quad \tilde{f}|_{S(\infty)} = f$$

但し、Δ_M は (M, g) の Laplacian．

この定理から、調和測度 ω^x $(x\in M)$ の存在が導かれる。

以下、任意に点 $0\in M$ をとり固定する。そして、$\omega=\omega^0$ とし、Poisson核 $K(x,\cdot)$ を

$$K(x,\cdot) := \frac{d\omega^x}{d\omega} \qquad (\text{Radon-Nikodym 導関数})$$

と定める。

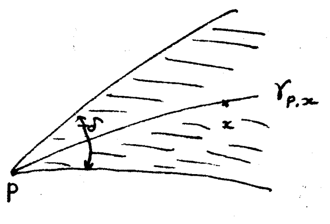
[38] により、$K(x,\cdot)$ は、$S(\infty)$ 上の Hölder 連続関数になっている。

本稿の目的は、調和測度 ω に関する Hardy 空間と BMO空間の理論を展開することである。

§3. 負曲率多様体上の H^p と BMO. $p\in M$ と $x\in\overline{M}$ に対して $\gamma_{p,x}$ を $\|\dot{\gamma}_{p,x}(t)\|=1$ $(\forall t)$, $\gamma_{p,x}(0)=p$, $\gamma_{p,x}(s)=x$ $(\exists s\in(0,\infty])$ なる唯一つの測地線とする。$\delta>0$, $p\in M$, $x\in\overline{M}$ に対して、

$$C(p,x,\delta) := \{Q\in\overline{M} : \measuredangle_p(\dot{\gamma}_{p,x}(0), \dot{\gamma}_{p,Q}(0)) < \delta\}$$

なる cone とする。



簡単のため、

$$Q(t)=\gamma_{0,Q}(t) \qquad (Q\in S(\infty))$$

$$C(Q,t)=C(Q(t),Q,\tfrac{\pi}{4})$$

$$\Delta(Q,t)=C(Q,t)\cap S(\infty)$$

とおく。$\Delta(Q,t)$ の形の集合を surface ball と呼ぶ。

$f\in L^p$ $(=L^p(S(\infty),\omega))$ $(1\le p\le\infty)$ に対して、$\tilde{f}$ で f の M へ

の調和拡張を表わす；すなわち、

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} \int_{S(\infty)} f\, d\omega^x & (x \in M) \\ f(x) & (x \in S(\infty)) \end{cases}$$

M上の関数 u の非接最大関数を次のように定義する：

$$N(u)(Q) := \sup\{\, |u(z)| : z \in \Gamma(Q) \,\} \qquad (Q \in S(\infty))$$

但し、ここで、$\Gamma(Q) := \{x \in M : Q \in C(x, \gamma_{0,x}(+\infty), \frac{\pi}{4}) \cap S(\infty)\}$ とする。この集合 $\Gamma(Q)$ は、古典解析学における Stoltz 領域のアナロジーである。

$f \in L^1(S(\infty), \omega)$ に対して、

$$N(f)(Q) := \sup\{\, |\tilde{f}(x)| : x \in \Gamma(Q) \,\} \qquad (Q \in S(\infty))$$

とおく。$S(\infty)$ 上の Hardy 空間 H^p は、

$$H^p := \{\, f \in L^1(S(\infty), \omega) : \|f\|_{H^p} := \|N(f)\|_{L^p(\omega)} < \infty \,\}$$

$(0 < p \leqq \infty)$ と定義する。次のことが成り立つ：

命題1 　$H^p = L^p(S(\infty), \omega) \qquad 1 < p \leqq \infty$.

C. Fefferman は、R^n 上の Hardy 空間の共役空間が BMO と同型であることを証明した（[2]）。われわれの設定のもとに、BMO空間は、次のように定義される：

$f \in L^1(S(\infty), \omega)$ に対して、

$$\|f\|_* := \sup\left\{ \frac{1}{\omega(\Delta)}\int_\Delta \left| f(q) - \frac{1}{\omega(\Delta)}\int_\Delta f\,d\omega \right| d\omega(q) \ :\ \Delta \text{は surface ball} \right\}$$

そして、 $BMO := \{ f \in L^1(S(\infty), \omega) : \|f\|_* < \infty \}$ と定める。

本稿の主要定理の1つは、次のものである：

定理1. (1) $f \in L^2$, $g \in BMO$ のとき、

$$\left| \int f g \, d\omega \right| \leqq C \|f\|_{H^1} \|g\|_{BMO}$$

ただし、C は n, a, b にのみ依存した定数。

(2) M が次の条件 (C) をみたすとする：

$$\text{条件 (C)} \left\{ \begin{array}{l} \forall Q \in S(\infty),\ \forall t > 0,\ \forall z \in C(Q, t) : \\ \qquad \Delta(\gamma_{0,z}(+\infty), t) \cap \Delta(Q, t) \neq \phi \end{array} \right.$$

このとき、H^1 上のすべての連続線形汎関数 F に対して、ある $g \in BMO$ が唯一つ存在して、

$$F(f) = \int f g \, d\omega \qquad (f \in L^2)$$

をみたす。さらに、F のノルムと $\|g\|_*$ とは同値である。

注意. M が 0 で *rotationally symmetric* ならば、明らかに M は、条件 (C) をみたしている。

定理1の証明のために、次の§で、Brown運動から定義されるHardy空間について述べる。

§4. 確率論的 H^p と BMO. 本§で使う確率論に関する記号、概念は、Ikeda-Watanabe [24] 及び D. Sullivan [37] に従う。$\{P_x\}_{x\in M}$ を Δ_M-diffusion とし、$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t(\overline{W}(M))$ $t\in[0,\infty]$, $P=P_0$, $E=E_0$, $E[\cdot\,|\,\mathcal{F}_t]=E_0[\cdot\,|\,\mathcal{F}_t]$ $t\geq 0$ とする。$w\in\overline{W}(M)$ と $f\in L^1(S(\infty),\omega)$ に対して、$X_t(w)=w(t)$ $(t\geq 0)$ とし、

$$Mf_t := \tilde{f}(X_t) \qquad (0\leqq t\leqq\infty)$$

とおく。

H^p の確率論的アナロジーは、次のものである：

$$H^p_{pr} = \{f\in L^1(S(\infty),\omega) : \|f\|_{H^p_{pr}} := (E[\sup_t |Mf_t|^p])^{1/p} < \infty\}$$

また、BMOは、

$$BMO_{pr} := \{f\in L^1(S(\infty),\omega) : \|f\|_{*,pr} := \sup_t \|E[|Mf_\infty - Mf_t|\,|\,\mathcal{F}_t]\|_{L^\infty} < \infty\}$$

である。このとき、次のことが成立する：

定理2. (1) $H^p\subset H^p_{pr}$ $(0<p\leqq\infty)$, $BMO\subset BMO_{pr}$. さらに、$\|f\|_{H^p_{pr}}\leqq C_p\|f\|_{H^p}$ かつ $\|f\|_{*,pr}\leqq C\|f\|_*$ である。ここで、C_p は、n, a, b, p にのみ依存した定数であり、C は n, a, b にのみ依存した定数である。

(2) M が条件(C)をみたすならば、$H^p=H^p_{pr}$ $(1\leq p\leq\infty)$ であり、

BMO = BMO_{pr} である。

定理1、定理2の証明のために、本稿では、Coifman-Weiss [41] の Space of homogeneous type の概念を $S(\infty)$ 上の解析に適用できるように修正する：

§5. Space of homogeneous type の修正.

$S(\infty)$ 上の距離関数で、$S(\infty)$ 上の ω に関する解析を行うのに適したものが、現時点では、見出されていないので、本稿では、むしろ、Space of homogeneous type の公理系から距離の概念を取り除いて、$(S(\infty), \omega)$ 上の解析に使えるようにすることを試みる：

便宜上、距離の概念を取り除いた Space of homogeneous type を generalized sphere at infinity と呼ぶことにする：すなわち、位相空間 W と W 上の正値 Borel 測度 μ 及び次の条件をみたす開集合の族 $\{\Delta_t(Q)\}_{t\in\mathbb{R}, Q\in W}$ の組 $(W, \mu, \{\Delta_t(Q)\})$ を generalized sphere at infinity という；

(i) $W = \lim_{t\to-\infty} \Delta_t(Q) \supset \Delta_r(Q) \supset\supset \Delta_{r+s}(Q) \supset \lim_{t\to\infty} \Delta_t(Q) = \{Q\}$,

$(Q\in W, r\in\mathbb{R}, s>0)$. ただし、ここで $A \supset\supset B$ は、A が B の閉包を含むことを意味する.

(ii) $\exists k>0,\ \forall Q, R\in W,\ \forall r\in\mathbb{R}:\ \Delta_r(Q)\cap\Delta_r(R)\neq\phi \Rightarrow$

$$\Delta_{r-\frac{1}{k}}(Q) \supset \Delta_r(R)$$

(iii) $\quad 0 < \mu(\Delta_r(Q)) < +\infty \qquad (\forall Q \in W,\ \forall r \in \mathbb{R})$

(iv) $\quad \exists C > 0,\ \forall Q \in W,\ \forall r \in \mathbb{R}:\ \mu(\Delta_{r-1}(Q)) \leqq C\mu(\Delta_r(Q))$.

今、(X, μ) を quasi-distance ρ に関する space of homogeneous type とすると、$\Delta_r(Q) := \{x \in W : \rho(x, Q) < e^{-r}\}$ $(Q \in X,\ r \in \mathbb{R})$ とすれば、$(X, \mu, \{\Delta_r(Q)\})$ は generalized sphere at infinity である。
i.e. Space of homogeneous type $\Rightarrow$ Generalized sphere at infinity

Anderson - Schoen [38] より、$(S(\infty), \omega, \{\Delta(Q,t)\})$ が generalized sphere at infinity であることがわかる。

ところで、この一般の generalized sphere at infinity の設定のもとでも、Vitali 型の被覆定理及び Whitney 型の被覆定理も証明することができ、結局、Coifman - Weiss [41] の atomic Hardy space の理論の大部分が、上のような一般の設定のもとでも展開することができる：

$(W, \mu, \{\Delta_t(Q)\})$ を generalized sphere at infinity とする。$0<p\leqq 1$ とし、$a \in L^1(W,\mu)$ とする。a が p-atom とは、

$$\int a\,d\mu = 0$$

$$\exists \Delta_t(Q) :\quad \operatorname{supp} a \subset \Delta_t(Q) \quad \& \quad \|a\|_\infty^p \leqq 1/\mu(\Delta_t(Q))$$

をみたすことである。ただし、$\mu(W) < \infty$ の場合は、$\mu(W)^{-\frac{1}{p}}$ も 1 つの p-atom とみなすことにする。

$$H^1_{at} := \{ f \in L^1 : \|f\|_{H^1_{at}} := \inf \{ \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j| \;:\; f = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j\ ,\ \lambda_j \in \mathbb{R},$$
$$a_j \text{ は } 1\text{-atom} \} < \infty \ \}$$

とおく。BMO は、$S(\infty)$ 上の BMO と同じように定義する。このとき、次が証明できる：

定理 3. H^1_{at} の共役空間は、BMO と同型である。

もし、$(W, \mu, \{\Delta_t(\theta)\}) = (S(\infty), \omega, \{\Delta(t,\theta)\})$ の場合、次のことが成立する：

定理 4. (1) $\exists C > 0,\ \forall f \in L^2(S(\infty), \omega)$: $\|f\|_{H^1_{at}} \leqq C \|f\|_{H^1}$

(2) M が条件 (C) をみたせば、$H^1 = H^1_{at}$ であり、$\|\cdot\|_{H^1_{at}}$ と $\|\cdot\|_{H^1}$ とは同値なノルムになる。

§6 定理 1, 定理 2, 定理 4 の証明の概略.

以下、$C_1, C_2, \cdots$ は、n, a, b にのみ依存した定数とする。まず定理 1 (1) は、martingale 理論を使うことにより、

$$\left| \int fg\, d\omega \right| = | \mathbb{E}[Mf_\infty\, Mg_\infty] |$$
$$\leqq C \|f\|_{H^1_{pr}} \|g\|_{*,pr}$$
$$\leqq C_1 \|f\|_{H^1} \|g\|_*$$

(C は universal constant). 定理 1 (2) のため、Poisson 核

の評価を行う：

補題．次をみたすような $r_0>0$ が存在する：

$\forall N\in\mathbb{N}$，$\forall r>Nr_0+1$ に対して，$\{m_j\}_{j=1,\cdots,k}$ $(k\leq N)$ を次のようにとる：

(i) $0=m_1<\cdots<m_k<r-1$

(ii) $m_{j+1}-m_j\geq r_0$

のとき，$\forall Q_0\in S(\infty)$，$\forall Q_1\in\Delta(Q_0,r)$，$\forall x\in M-C(\theta(r-m_j)$，$Q_0,\frac{\pi}{4})$ に対して，

$$|K(x,Q_1)-K(x,Q_0)|\leqq C_3K(x,Q_0)2^{-j}$$

これは，Anderson-Schoen [38] が行なった Poisson 核の regularity に関する結果 ── すなわち，$K(x,\cdot)$ が Hölder 連続 ── を精密化したものである。

この補題を使って，条件(c) のもとに容易に

$$\|a\|_{H^1}\leq C_2 \qquad (\forall\ 1\text{-atom } a)$$

が証明できる。結局 $H^1_{at}\subset H^1$ である。

従って，定理3と以上の議論，及び関数解析的な議論により，条件(c) のもとでは，$BMO_{pr}\subset BMO$，$H^1_{pr}\subset H^1$ が証明できる。（証・終）

注意： 補題自身は、条件(C)を必要としていない。それを適用して、$\|a\|_{H^1} \leq C_2$ (a; 1-atom) を証明する際に、条件(C)を必要とするのである。

注意： 「II」で述べたような解析学と確率論とにまたがるメカニズムをつくることも可能である。

注意： 負曲率多様体上の調和解析及びそれに関連した話題については、S. T. Yau [42] に詳述されている。

参考文献（文献番号は「II」より続く）

[36] M. T. Anderson, The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature, J. Diff. Geo. 18 (1983), 701-721.

[37] D. Sullivan, The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifolds, J. Diff. Geo. 18 (1983), 723-732.

[38] M. T. Anderson and R. Schoen, Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature, Ann. of Math. 121 (1985), 429-461.

[39] H. Arai, Harmonic analysis on negatively curved manifolds I, submitted.

[40] P. Eberlein and B. O'Neill, Visibility manifolds, Pacific J. Math. 46 (1973), 45-109.

[41] R. R. Coifman and G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), 569-645.

[42] S. T. Yau, Nonlinear Analysis in Geometry, L'Enseignement Mathematique, Univ. de Geneve, 1986.

[43] H. Arai, in preparation.