

Optimal Switching for Alternating Processes

愛媛大学・教養部 森本宏明 (Hiroaki Morimoto)

本稿では optimal switching problem について、Bensoussan-Lions [2] による impulsive control の idea に基づき、Dellacherie-Meyer [3] の martingale theory を手法として解くことを考える。

Notations ———

$(\Omega, \mathcal{F}, P; (\mathcal{F}_t))$: a complete prob. space with usual conditions

$W = \{x = (x_t) : r\text{-cont, bounded, } (\mathcal{F}_t)\text{-adapted process}\}$

$\|x\| = P\text{-ess sup}(\sup_t |x_t|)$, $x_\infty = \liminf_{t \rightarrow \infty} x_t$

$\Phi(S) = \{T : \text{stopping time, } T \geq S\}$ for s.t. S

問題を次のように定式化する。

F.1 Switching strategy $\pi = (\{T_n\}, \{\theta_n\})$ とは

(a) $T_n \in \Phi(0) \uparrow \infty$, $T_0 = 0$, $T_n + q \leq T_{n+1}$ ($q \geq 0$: fixed)

(b) $\theta_n : \mathcal{F}_{T_n}$ -measurable r.v. taking values in $D = \{1, 2, \dots, d\}$,
 $\theta_0 = 1$, (d : given pos. integer)

なる $\{T_n\}$ と $\{\theta_n\}$ の組である。 Switching strategies π の全体の集合を Π で表す。

F.2 各 $\pi \in \Pi$ に対して cost function $J(\pi)$ を次式で定義する。

$$J(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} E \left[\int_{T_{n-1}}^{T_n} e^{-\alpha r} f(\theta_{n-1}; r) dr + e^{-\alpha T_n} (k + c(\theta_{n-1}, \theta_n)) \right]$$

ここで

$$f(i; \cdot) = f_i(\cdot) \in W, \quad f_i \geq 0,$$

$$k \geq 0, \quad c(i, j) \geq 0, \quad i, j \in D.$$

F.3 目的は optimal switching strategy $\pi^* = (\{T_n^*\}, \{\theta_n^*\}) \in \Pi$; i.e.

$$J(\pi^*) = \inf\{J(\pi) : \pi \in \Pi\}$$

を求めることである。 T_n は与えられた d ケの processes を n 回目にスイッチする時刻、 θ_n はその時刻において選ぶ process の番号を意味する。

Def. $Q_i : W \rightarrow W$ ($i \in D$) を次式で定義する。

$$e^{-\alpha t} Q_i x(t) = \operatorname{ess\,inf}_{\Gamma \in \Phi(t)} E \left[\int_t^T e^{-\alpha r} f(i; r) dr + e^{-\alpha T} x(T) \mid \mathcal{F}_t \right].$$

仮定に応じて議論を 3 種類 (A), (B), (C) に分ける。

(A) —————

仮定 (A) : $q = 0, \quad k > 0, \quad (\mathcal{F}_t)$ is quasi-left continuous

Def.A $N : W^d \rightarrow W^d$ を次式で定義する。

$$Nx = (N_1 x, \dots, N_d x) \in W^d \quad \text{for } x = (x_1, \dots, x_d) \in W^d$$

$$N_i x(t) = \min_j \{x_j(t) + k + c(i, j)\}, \quad i \in D,$$

ここで

W^d : d -product of W .

Theorem A.1 仮定 (A) のもとで、the class of $x \in W^d$;

$$x \leq Nx, \quad (e^{-\alpha t} x_i(t) + \int_0^t e^{-\alpha r} f(i;r) dr) : \text{submartingale}, i \in D$$

は maximal element $w = (w_1, \dots, w_d) \in W^d$ をもつ。更に、equation

$$w_i = Q_i(N_i w), \quad i \in D,$$

の一意解である。

Remark.

N: increasing, concave,

$$\|Nx - Nx'\| \leq \|x - x'\| \quad \text{on } W^d, \quad N_i 0 \geq k > 0, \quad i \in D,$$

の性質を用いて $\{u_n\}$ を

$$u_0 = G_{\alpha} f_i(\cdot) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha r} S_r f_i(\cdot) dr, \quad S_r x(t) = E[x(t+r) | \mathcal{F}_t]$$

$$u_{n+1} = Q_i(N_i u_n)$$

で定義すると

$$u_n \rightarrow w_i \quad \text{in } W, \quad i \in D,$$

が Hanouzet-Joly の結果を W 上で焼き直しして得られる。

Theorem A.2 仮定 (A) のもとで、optimal switching strategy π^* は

$$T_0^* = 0, \quad T_{n+1}^* = \inf\{t \geq T_n^* \mid w(\theta_n^*; t) = Nw(\theta_n^*; t)\}$$

θ_n^* : the number attaining the minimum of

$$w_j^* = w_j(T_n^*) + k + c(\theta_{n-1}^*, j), \quad j \in D$$

で与えられる。

Remark.

Optimal stopping の議論を適用するために、 N_i^w には左側連続性が要る。

これは (\mathcal{F}_t) についての仮定よりである。 $k > 0$ から $T_n^* \uparrow \infty$ がでる。

この場合、impulsive control の optimal strategy の構成とは measurable selection theorem を用いない点で異なる。

(B) —————

仮定 (B) : $q > 0$, $k = 0$, (\mathcal{F}_t) is quasi-left continuous

Def.B $K: W^d \rightarrow W^d$ を次式で定義する。

$$Kx = (K_1x, \dots, K_dx) \in W^d \quad \text{for } x \in W^d$$

$$K_{i,x}(t) = \min_j \{ E \left[\int_t^{t+q} e^{-\alpha(r-t)} f_j(r) dr + e^{-\alpha q} x_j(t+q) \mid \mathcal{F}_t \right] + c(i,j) \}$$

Theorem B.1 仮定 (B) のもとで、equation

$$v_i = Q_i(K_i v), \quad i \in D,$$

は一意解 $v = (v_1, \dots, v_d) \in W^d$ をもつ。

Remark. The contraction mapping theorem よりである。

Theorem B.2 仮定 (B) のもとで、optimal switching strategy π^* は

$$T_0^* = 0, \quad T_{n+1}^* = \inf \{ t \geq T_n^* + q \mid v(\theta_n^*; t) = Kv(\theta_n^*; t) \}$$

θ_n^* : the number attaining the minimum of

$$v_j^* = E \left[\int_{T_n^*}^{T_n^* + q} e^{-\alpha(r-T_n^*)} f_j(r) dr + e^{-\alpha q} v_j(T_n^* + q) \mid \mathcal{F}_{T_n^*} \right] + c(\theta_{n-1}^*, j)$$

で与えられる。

Remark. K_i^v の左側連続性は Theorem A.2 の Remark と同様。

(C) —————

仮定 (C) : $q = 0, k > 0, c(i) = c(i, i+1) \geq 0 \pmod{d}$

(\mathcal{F}_t) の quasi-left continuity の仮定を除くために、次のように定式化される cyclic switching を考えてみる。

F.C1 Strategy $\tau = (T_n)$ は F.1(a) と同じものとする。

この τ 全体の集合を T で表す。

F.C2 各 $\tau \in T$ に対して cost function $\hat{J}(\tau)$ を次式で定義する。

$$\hat{J}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} E \left[\int_{T_{n-1}}^{T_n} e^{-\alpha r} f(s(n); r) dr + e^{-\alpha T_n} (k + c(s(n))) \right],$$

ここで $s(n) = i$ if $n = i \pmod{d}$.

F.C3 目的は optimal strategy $\tau^* = (T_n^*)$; i.e.

$$J(\tau^*) = \inf \{ J(\tau) : \tau \in T \}$$

を求めることである。この場合、スイッチしたときの process の番号は $s(n)$ で定められている。

Def.C $L: W_d^d \rightarrow W_d^d$ を次式で定義する。

$$Lx = (L_1 x, \dots, L_d x) \in W_d^d \quad \text{for } x \in W_d^d$$

$$L_i x(t) = x_{i+1}(t) + c(i), \quad x_{d+1} = x_1$$

ここで

$$W_d^d : d\text{-product of } W_0 = \{x \in W \mid \|S_r x - x\| \rightarrow 0, r \downarrow 0\}$$

Theorem C.1 仮定 (C) のもとで、equation

$$z_i = Q_i(L_i z), \quad i \in D,$$

は一意解 $z = (z_1, \dots, z_d) \in W_0^d$ をもつ。

Remark. $Q_i: W_0 \rightarrow W_0$, $G_\alpha(W) \subset W_0$ なる性質 (cf. [4]) を用いて

Theorem A.1 の Remark と同様にしてでる。

Theorem C.2 仮定 (C) のもとで、optimal strategy τ^* は

$$T_0^* = 0, \quad T_{n+1}^* = \inf\{t \geq T_n^* \mid z(s(n+1); t) = Lz(s(n+1); t)\}$$

で与えられる。

参 考 文 献

- [1] A. Bensoussan, Stochastic Control by Functional Analysis Methods, North-Holland, 1982.
- [2] A. Bensoussan and J.L. Lions, Contrôle Impulsionnel et Inéquations Quasi Variationelles, Dunod, 1982.
- [3] C. Dellacherie and P.A. Meyer, Probabilities and Potential, North-Holland, 1982.
- [4] H. Morimoto, Dynkin games and martingale methods, Stochastics (1984) 213-228.
- [5] H. Morimoto, Optimal switching for alternating processes, to appear in Appl. Math. Optim.