数理解析研究所講究録
第628巻 1987年 1-8

中山の予想について

筑波大数学系　星野光男　(Mitsuo Hoshino)

体上有限次元の多元環に関する一連の予想について述べる。以下，Aは体F上有限次元の多元環，JはAのJacobson根基，$\ell = \max\{n \mid J^n \neq 0\}$とする。また，$D = \mathrm{Hom}_F(-, F)$，$(\ )^* = \mathrm{Hom}_A(-, A)$とおく。すべての加群は有限生成で特にことわらない限り右加群である。極小入射分解

$$I^{\cdot} : 0 \longrightarrow A \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots\cdots$$

を固定する。すべての$n \geq 0$に対してI_nが射影的のとき，$\mathrm{dom\ dim}\, A = \infty$と定義する。

§1. 予想.

次のような一連の予想がある．

(C1)　$\sup\{\mathrm{proj\ dim}\, M \mid \mathrm{proj\ dim}\, M < \infty\} < \infty$.

(C2) 任意の単純加群Sに対して$\mathrm{Ext}^n(S, A) \neq 0$なる$n \geq 0$

が存在する。

(C3) $\mathrm{dom\,dim}\, A = \infty$ ならば A は自己入射的である。

(C4) すべての $n \geq 1$ に対して $\mathrm{Ext}^n(DA, A) = 0$ ならば A は自己入射的である。

(C5) A が自己入射的のとき，すべての $n \geq 1$ に対して $\mathrm{Ext}^n(M, M) = 0$ なる加群 M は射影的である。

(C1) は昔からの予想であるが出所は明らかではない。(C2) は [AR]，(C3) は [N]（および [M]），(C4)，(C5) は [T] による。上の予想について次の関係がある。

命題. (C1) $\Rightarrow$ (C2) $\Rightarrow$ (C3) $\Leftrightarrow$ (C4) かつ (C5).

証明. (C1) $\Rightarrow$ (C2)：すべての $n \geq 1$ に対して $\mathrm{Ext}^n(S, A) = 0$ なる単純加群 S が存在したとする。S の極小射影分解 $\cdots \xrightarrow{p_2} P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} S \to 0$ をとる。任意の $n \geq 1$ に対して，左加群の完全列 $0 \to P_0^* \to P_1^* \to \cdots \to P_n^* \to (\mathrm{Ker}\, p_n)^* \to 0$ を得る。

(C2) ⇒ (C3): S を任意の単純加群とする。すべての $n \geq 0$ に対して $\mathrm{Ext}^n(S, A) \cong \mathrm{Hom}(S, I_n)$ であることに注意すればよい。

(C3) ⇒ (C4): $U = A \oplus DA$, $B = \mathrm{End}\, U$ とおく。B 加群 $\mathrm{Hom}(U, DA)$ は射影的かつ入射的であるから，すべての $n \geq 1$ に対して $\mathrm{Ext}^n(DA, A) = 0$ ならば $\mathrm{dom\,dim}\, B = \infty$ となる。

(C3) ⇒ (C5): $U = A \oplus M$, $B = \mathrm{End}\, U$ とおく。A が自己入射的ならば B 加群 $\mathrm{Hom}(U, A)$ は射影的かつ入射的となる。更に，すべての $n \geq 1$ に対して $\mathrm{Ext}^n(M, M) = 0$ ならば $\mathrm{dom\,dim}\, B = \infty$ となる。

(C4) かつ (C5) ⇒ (C3): $\mathrm{dom\,dim}\, A = \infty$ とし，U を極小忠実加群とする。$B = \mathrm{End}\, U$ とおき，函手 $\mathrm{Hom}_A(-, U)$, $\mathrm{Hom}_B(-, U)$ を続けて A の極小入射分解 $I^\cdot$ に作用させる。U の生成する加法圏を $\mathrm{add}\, U$ とすれば，すべての $n \geq 1$ に対して $I_n \in \mathrm{add}\, U$ であるから，次の行完全な可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to \mathrm{End}_B U & \to & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(I_0, U), U) & \to & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(I_1, U), U) & \to & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow \wr & & \uparrow \wr & & \\
0 \to A & \longrightarrow & I_0 & \longrightarrow & I_1 & \longrightarrow & \cdots .
\end{array}$$

従って，$A \cong \mathrm{End}_B U$，かつすべての $n \geq 1$ に対して $\mathrm{Ext}^n_B(U, U) = 0$ である。また，$U_A \in \mathrm{add}\, A_A$ から ${}_B B \in \mathrm{add}_B U$ が，${}_A DU \in \mathrm{add}_A A$ から ${}_B DB \in \mathrm{add}_B U$ が従う。故に，すべて

の $n \geq 1$ に対して $\mathrm{Ext}_B^n(DB, B) = 0$ となる。(C4) から B は自己入射的となり，従って (C5) から $_BU$ は射影的となる。このとき，A と B とは森田同値となるから，A が自己入射的となる。

§2. 事実.

既に得られている主な結果を紹介する。

(a) A/J^ℓ が有限表現型（例えば，$\ell \leq 1$ のとき）ならば (C1)～(C5) がすべて成立。

(b) inj dim $A < \infty$ ならば (C1) が成立。

(c) $A = \oplus_{n\geq 0} A_n$ が次数付き多元環で A_0 の Gabriel quiver に oriented cycle がなければ (C2) が成立（[W], [H2]）。

(d) $\ell \leq 2$ ならば (C2) が成立（[FZ]）。

(e) A が右側単列環ならば (C2) が成立.

(f) F が閉体のとき，A が QF-3 で極小忠実加群 U に対して End U の Jacobson 根基 N が $N^3 = 0$ をみたすならば (C3) が成立。

(g) F が閉体のとき，$\ell \leq 2$ ならば (C4) が成立（[H2]）。

(h) 有限群 G に対して $A \cong FG$ ならば (C5) が成立（[S]）。

(i) 遺伝的多元環 B に対して $A \cong B \ltimes DB$ ならば (C5) が成

立 ([H1])。

(h) F が閉体のとき, $\ell \leq 2$ ならば (C5) が成立.

(a) の (C4), (e) は次節で示す。 (a) の (C4) 以外, (b) は易しい。 (f) は (g), (h) および (C3) $\Leftrightarrow$ (C4) かつ (C5) であることから従う。 (h) については [H1] も参照されたい。

§3. 反射加群.

与えられた加群 M に対して n 番目の syzygy を $\Omega^n M$ で表す。 また, $\phi_M : M \to M^{**}$ を自然な準同型写像とする。

補題。 M を直既約非射影加群で $\mathrm{Ext}^1(M, A) = 0$ とする。

(1) ΩM は直既約で $\Omega(\Omega M)^* \cong M^*$.

(2) M にねじれがない $\Leftrightarrow$ ΩM が反射的。

(3) M が反射的 $\Leftrightarrow$ ΩM が反射的で $\mathrm{Ext}^1((\Omega M)^*, A) = 0$。

証明。 $P \to M \to 0$ を極小射影被覆とし, 関手 $(\ )^*$ を完全列 $0 \to \Omega M \to P \to M \to 0$ に作用させて次の完全列を得る $0 \to M^* \to P^* \to (\Omega M)^* \to 0$。 これから (1) の後半が従う。 また, 次の行完全な可換図式を得る

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Omega M & \longrightarrow & P & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \phi_{\Omega M} & & \downarrow \wr & & \downarrow \phi_M & & \\
0 & \longrightarrow & (\Omega M)^{**} & \longrightarrow & P^{**} & \longrightarrow & M^{**} & &
\end{array}$$
。

(1) の前半は $\underline{\mathrm{End}}\,\Omega M \cong \underline{\mathrm{End}}\,M$ による。 (2) は $\mathrm{Ker}\,\phi_M \cong \mathrm{Cok}\,\phi_{\Omega M}$ から，(3) は $\mathrm{Cok}\,\phi_M \cong \mathrm{Ext}^1((\Omega M)^*, A)$ から従う。

系. $\mathrm{inj\,dim}_A A < \infty$ のとき，すべての $n \geq 1$ に対して $\mathrm{Ext}^n(M, A) = 0$ ならば M は反射的である。

証明. M は直既約非射影加群と仮定できる。$j = \mathrm{inj\,dim}_A A$ とすれば任意の $n \geq 0$ に対して

$$\mathrm{Ext}^1((\Omega^n M)^*, A) \cong \mathrm{Ext}^{j+1}((\Omega^{j+n} M)^*, A) = 0$$

である。

命題。 M を直既約非射影加群ですべて $i \geq 1$ に対して $\mathrm{Ext}^i(M, A) = 0$ とする。 或る $m > n \geq 0$ に対して $\Omega^m M \cong \Omega^n M$ ならば M は反射的である.

証明. 任意の $i \geq n$ に対して $\Omega^{i+(m-n)} M \cong \Omega^i M$，故に $\Omega^{m-n}(\Omega^i M)^* \cong (\Omega^i M)^*$ である. 従って，すべての $i \geq 0$ に

対して $\Omega^{m-n}(\Omega^{i}M)^{*} \cong (\Omega^{i}M)^{*}$, $\mathrm{Ext}^{1}((\Omega^{i}M)^{*}, A) = 0$ となる。

系1. A/J^{ℓ} が有限表現型のとき，すべての $n \geq 1$ に対して $\mathrm{Ext}^{n}(M, A) = 0$ ならば M は反射的である。

系2. A が右側単列環，M が単列加群ですべての $n \geq 1$ に対して $\mathrm{Ext}^{n}(M; A) = 0$ ならば M は反射的である。

参考文献

[AR] M. Auslander and I. Reiten, On a generalized version of the Nakayama Conjecture, Proc. Amer. Math. Soc. 52 (1975), 69-74.

[FZ] K. R. Fuller and B. Zimmermann-Huisgen, On the Generalized Nakayama Conjecture and Cartan determinant problem, Trans. Amer. Math. Soc. 294 (1986), 679-691.

[H1] M. Hoshino, Modules without self-extensions and Nakayama's conjecture, Arch. Math. 43 (1984), 493-500.

[H2] ———, A remark on Wilson's theorem and algebras with radical cube zero, Preprint.

[M] B. J. Mueller, The classification of algebras by dominant dimension, Canad. J. Math. 20 (1968), 398-409.

[N] T. Nakayama, On algebras with complete homology, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 22 (1958), 300-307.

[S] R. Schulz, Boundedness and periodicity of modules over QF rings, J. Algebra 101 (1986), 450-469.

[T] H. Tachikawa, Quasi-Frobenius rings and generalizations, Springer Lecture Notes No. 351, 1973.

[W] G. Wilson, The Cartan map on categories of graded modules, J. Algebra 85 (1983), 390-398.