数理解析研究所講究録
第 628 巻 1987 年 42-44

A_n, D_n 型 quiver の表現の退化

北大理 丹原大介 (Daisuke Tambara)

体 K 上の有限次元 algebra Λ について Λ 加群の退化を考える.

定義 1 Ω を K 上のベクトル空間とすると Ω 上の Λ 加群構造の全体は $\mathrm{Hom}_K(\Lambda \otimes_K \Omega, \Omega)$ の Zariski 閉集合をなす. これを X とおく. Λ 加群 U に対して Ω に U と同型な Λ 加群構造を与える X の点の全体を O_U とかく. 2つの Λ 加群 U, V に対して, $\dim U = \dim V = \dim \Omega$ かつ O_U の X における閉包が O_V を含むとき, U は V に退化するといい $U \rightsquigarrow V$ とかくことにする.

$\rightsquigarrow$ は Λ 加群の同型類の集合の上に順序を定める.

定義 2 2つの Λ 加群 U, V について次が成立つとき, $U \leqslant V$ とかく. U と V の組成列因子が同じで, 任意の Λ 加群 M について $\dim \mathrm{Hom}_\Lambda(M, U) \leqslant \dim \mathrm{Hom}_\Lambda(M, V)$.

$\leqslant$ もまた Λ 加群の同型類の集合の上に順序を定めることが知られる. X 上の関数 $\dim \mathrm{Hom}_\Lambda(M, -)$ の上半連続性から $U \rightsquigarrow V$ ならば $U \leqslant V$

逆が問題であるが，次の Λ について $U \rightsquigarrow V \Leftrightarrow U \leqslant V$ が成立つ．

イ）$K[T]/(T^n)$ （古典的）

ロ）A_n 型 quiver の path algebra （[1]，[3]）

ハ）D_n 型 quiver の path algebra （equi-oriented case は [2]，一般のとき [3]）

ニ）ロやハの Λ の剰余環 （[3]）

ホ）Λ が有限表現型でその Auslander-Reiten quiver は単連結で各頂点について出る矢，入る矢は２本以下．（[3]）

ヘ）quiver $\tilde{A}_1$: $\bullet \rightrightarrows \bullet$ の path algebra

すべての表現の間の順序 $\rightsquigarrow$ が分っているような Λ は筆者の知る限り上記のものしかない．

イ）の場合は $\rightsquigarrow$ も $\leqslant$ も partition の間の自然な順序と一致する．ロ）の場合，Abeasis と Del Fra の証明は（equi-oriented でないときに）きわめて長いが，上のように $\dim \mathrm{Hom}_\Lambda(\ ,\ )$ による定式化をして AR quiver を見ながら考えれば簡明な証明がえられる．ハ）の場合もそのやり方をすすめてなんとかできる．E_6 になると AR quiver の上の図形が重なり合って視覚にたよれなくなる．ニ）はロ，ハから明らか．ホ）はロの証明がそのまま通用する場合．ヘ）は無限表現型だが成立っている．regular module のところでイ）が要る．$\tilde{A}_n$ $n>1$ に進むた

めには2個以上のsimpleをもつuniserialの場合が分らなければいけない.

$U \leq V \Rightarrow U \rightsquigarrow V$ が成立たない Λ の例がCarlsonにより与えられている. ([3]) $\Lambda = K[x, y]/(x^2, y^2)$

References

[1] S. Abeasis and A. Del Fra, Degenerations for the representations of a quiver of type A_m (J. Alg, Vol 93, 1985, pp 376-412)

[2] S. Abeasis and A. Del Fra, Degenerations for the representations of an equioriented quiver of type D_m (Adv. Math, Vol 52, 1984, pp 81 — 172)

[3] Ch. Riedtmann, Degenerations for representations of quivers with relations (Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, t. 19, 1986, pp 275 — 301)