数理解析研究所講究録
第628巻 1987年 66-88

Clifford理論と群環上のAuslander-Reiten列のvertices

大阪大 理 宇野勝博 (Katsuhiro Uno)

Gを有限群、kを標数pの体とする。Wをnon-projectiveな(k上有限次元の) indecomposable 右kG-moduleとするとき、いわゆるAuslander-Reiten列(以下AR列)

$$S_W: \ 0 \longrightarrow \Omega^2 W \longrightarrow X \longrightarrow W \longrightarrow 0$$

が、同型を度外視して一意的に存在する。ここで、Xは(右)kG-module, ΩはHeller作用素である。(AR列の定義については[11.(2.17.6)]参照。) AR列は一般にk上有限次元の多元環上のmodulesに対してもその存在と一意性が知られている。しかし、kGには群環特有のものとして部分群からの誘導(Induction)がある。そこでAR列のrelative projectivityについて次の様に定義する。

$\boxed{\text{定義:0}}$ $H \leq G$に対しAR列S_WがH-projectiveであるとは、
$\exists\, 0 \to Z_1 \to Z_2 \to Z_3 \to 0$ (kH-modulesの短完全列) s.t. $0 \to Z_1{}^G \to Z_2{}^G \to Z_3{}^G \to 0$ は、S_Wと他の短完全列の直和である。

ここでは、SW を H-projective としたとき、H をどれだけ小さく取れるかという問題を考える。

なお、SW の relative projectivity は Green [4] によって導入された概念であり、それに従って categorical な formulation 並びに必要となる結果について、§1 で述べる。

また、以下の内容は [6] と若干の重複があるので、そちらについても参照されたい。

§1 準備

以下では、G は有限群、k を標数 p の体とし、特に断わらない限り module といえば、有限生成右-module を意味するものとする。

kG-module W に対して、H ($\leq G$) と kH-module W_1 が存在して、W が $W_1{}^G$ ($= W_1 \otimes_{kH} kG$) の直和因子に同型になるとき、(以下、この事を $W \mid W_1{}^G$ と表す。) W は H-projective であるという。

k 自身は 1_1 ($\leq G$) 上の module と考えられ、$(k)^G \cong kG$ (正則表現) であるから、

$$\text{projective} \iff \text{1}_{1} \text{-projective}$$

である。また、次の事が知られている。

$$t_H^G : \mathrm{End}_{kH}(W) \longrightarrow \mathrm{End}_{kG}(W)$$

を trace map, 即ち $f \in \mathrm{End}_{kH}(W)$ に対し $\sum_{x \in H\backslash G} f^x$,
(但し $\sum_{x \in H\backslash G} f^x(w) = \sum_{x \in H\backslash G} f(wx^{-1})x \quad (w \in W)$) を対応させる k-linear な写像とする。このとき、次が成り立つ。

<u>Higman's criterion</u>

$$W \text{ が } H\text{-projective} \iff Id_W \in \mathrm{Im}\,(t_H^G).$$

定義からわかるように "H-projective" なる概念は、"直和"、"induction" の定義できる場合には、いつでも与えることができる。

Mod kG で (有限次元右) kG-modules と kG-homomorphisms のなす category を表すことにする。これは、いわゆる G-functor [10] であり、"H-projective" なる概念が定義できる訳である。

次に、mMod kG で Mod kG から Mod k への finitely presented k-linear contravariant functors とそれらの間の natural

transformations のなす category を表す。例えば、kG-module Wに対し、$\mathrm{Hom}_{kG}(\cdot, W)$ は、mMod kG の object である。(下の図)
以下、簡単のため、$\mathrm{Hom}_{kG}(\cdot, W)$ のことを $_G(\cdot, W)$ と書く。
mMod については、Auslander-Reiten により、深く研究されているが、念のため、それら(の一部を)ここで複習しておく。
([4, §1] も見よ。)

$\boxed{1}$ mMod kG の各 object F について $\{F(W)\}$ (W: kG-module) を考えることにより、mMod kG の objects の直既約性、既約性、…… が定義できる。

$\boxed{2}$ 各 kG-module W に対し、$_G(\cdot, W)$ は mMod kG の projective な object で、W が indec. $\Longleftrightarrow$ $_G(\cdot, W)$ が indec. が成り立つ。(これは、下の 3 から従う。)

$\boxed{3}$ (米田の補題): $W \longmapsto {}_G(\cdot, W)$ なる対応は、Mod kG から mMod kG への covariant functor を与え、しかも、

(i) $W \cong W'$ in Mod kG $\Longleftrightarrow$ $_G(\cdot, W) \cong {}_G(\cdot, W')$ in mMod kG

(ii) $\mathrm{Hom}_{kG}(W, W') \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{mMod}\,kG}({}_G(\cdot, W), {}_G(\cdot, W'))$

が成り立つ。(即ち、上の functor は faithful かつ full である。)
上の (ii) の同型は、$f \in {}_G(W, W')$ に対し、$f_* : {}_G(\cdot, W) \to {}_G(\cdot, W')$,
(但し、各 kG-module X に対し $f_*(X)(\varphi) = f \circ \varphi$ $(\varphi \in {}_G(X, W))$)を対応させることにより、得られる。この同型を一般に $Y (= Y_{W,W'})$ と

書くことにする。

$\boxed{4}$ mMod kG の simple な object F は次のいずれかの min. projective resolution をもつ。

(a) $0 \to {}_G(\cdot, \mathrm{rad}\, W) \to {}_G(\cdot, W) \to F \to 0$

(但し、W は proj. indec. kG-module)

(b) $0 \to {}_G(\cdot, W'') \to {}_G(\cdot, W') \to {}_G(\cdot, W) \to F \to 0$

(但し、W は non-proj. indec. kG-module で $0 \to W'' \to W' \to W \to 0$ は AR列)

逆に各 indec. kG-module から mMod kG の simple な object が上の様に得られ、projective cover の一意性より、これらは、1対1に対応する。この意味で、${}_G(\cdot, W)$ を projective cover にもつ mMod kG の simple な object を SW と書く。

また、${}_G(\cdot, W) \to SW \to 0$ の kernel を $\mathrm{rad}_G(\cdot, W)$ と表すと

$$\mathrm{rad}_G(X, W) = \{ f \in {}_G(X, W) : f \circ g \in \mathrm{rad}\, \mathrm{End}_{kG}(W) \ \forall g \in {}_G(W, X) \}$$

(X は kG-module) となることが知られている。

更に、上の(a)は、一般の有限次元 k-algebra で、simple modules とその projective covers を対応させることにより、simple modules の同型類の代表系と proj. indec modules の同型類の代表系が1対1に対応していることに相当する。従って、上の事は、この対応の自然な拡張であり、この意味で non-proj. indec kG-module W (又は、${}_G(\cdot, W)$) と W で終わる AR列が、1対1に対応している。

ここまでの所は、kGが群環であるという事実は重要ではない。しかし最近 J. A. Green [4] が mMod kG が G-functor となることを示し、"H-projective" 等の概念を定義した。

まず、induction を定義する。

$H \leq G$ に対し、$\mathrm{Ind}_H^G : \mathrm{mMod}\, kH \longrightarrow \mathrm{mMod}\, kG$ を mMod kH の object F と kG-module W に対し

$$(\mathrm{Ind}_H^G F)(W) = F(W_H)$$

と定義する。（W_H は W の H への restriction である）

同様に restriction Res_H^G ($\mathrm{mMod}\, kG \longrightarrow \mathrm{mMod}\, kH$) は、Mod kH から Mod kG への induction の adjoint として定義される。さらに conjugation も定義でき、mMod kG は G-functor となる。

特に kG-module W に対して、Frobenius 相互律中に現われる同型を用いて、

$\boxed{\text{補題1.1}}$

$$\mathrm{Res}_H^G({}_G(\,\cdot\,, W)) \simeq {}_H(\,\cdot\,, W_H).$$

を得る。（kH-module X に対し $\mathrm{Res}_H^G({}_G(\,\cdot\,, W))(X) = {}_G(X^G, W)$ となることに注意せよ。）この同型は以下で頻繁に使われる。

定義 1.2 mMod kG の object F について, $H \leqq G$ と mMod kH の object F_1 で $F_1 \mid \mathrm{Ind}_H^G F$ となるものが存在するとき, F は H-projective であるという。

__注意__ non-proj. indec kG-module W に対し, SW を W で終わる AR列と同一視すると, simple な object SW が定義 1.2 の意味で H-projective であることと, AR列 SW が定義 0 の意味で H-projective であることは, 同値であることが, 簡単に確かめられる。

さて, 次の結果は重要であり, 対応する Mod kG での類似の結果は, やはり Green によって以前に得られており, よく知られている。

定理 1.3. ([4. Th.4.7])

F を mMod kG の indec. な object とするとき, G の p-部分群 P が G-共役を度外視して一意的に定まり

$$F \text{ が } H\text{-proj} \iff H \geqq_G P$$

が成り立つ. (ここで $H \geqq_G P$ は $\exists x \in G$ s.t. $H^x \supseteq P$ となることを意味する。)

定理1.3 の P を F の <u>vertex</u> とよび $vtx(F)$ と表す。最初に提示した問題は「$vtx(SW)$ を求めよ」と言いかえられる。

SW は simple であるから indec. であり，しかも次が成立する．

$\boxed{\text{定理 1.4}}$ ([4, (5.12) and (7.7)])

W を indec. kG-module, $P = vtx(W)$ (即ち，Mod kG における定理1.3 と同様の主張から従う．W が P-projective となる最小の P)、S を W の source (即ち，$W \mid S^G$ となる indec. kP-module) とする。さらに $I_G(S)$ を $N_G(P)$ における S の inertial 部分群：

$$I_G(S) = \{x \in N_G(P) : S \otimes_{kP} x \cong S \quad (kP\text{-同型})\}$$

とする．このとき，次が成り立つ．

$$I_G(S) \geq_G vtx(SW) \geq_G vtx(W).$$

<u>注意</u> Green 対応の理論，及び Clifford 型の定理により，上の状況で，indec. $kI_G(S)$-module W_1 で

$$W \mid W_1{}^G \quad , \quad vtx(W) = vtx(W_1) \quad , \quad vtx(SW) = vtx(SW_1)$$

を満たすものが存在することが知られている。従って，$vtx(SW)$ を求めるには，$vtx(W) \trianglelefteq G$，W の source S は G-invariant (i.e. $I_G(S) = G$) と仮定してよい。

この様な状況では、(stable) Clifford 理論が有用であり、これについて §2 で述べる。

最後に Higman's criterion について述べる。

定義は省略するが ([[4, §5] を見よ) $m\mathrm{Mod}\,kG$ の objects F, F' に対して、"trace map" $T_H^G : \mathrm{Hom}(\mathrm{Res}_H^G F, \mathrm{Res}_H^G F') \to \mathrm{Hom}(F, F')$ が定義される。これについて次が成り立つ.

$\boxed{\text{定理 1.5.}}$ ([4. Th. 5.11])

$m\mathrm{Mod}\,kG$ の object F について

F が H-projective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Id}_F \in \mathrm{Im}(T_H^G)$.

§2. 一般 Clifford 理論

この section では stable Clifford 理論 [1] について述べる。我々の目的のためには、群環の場合で充分であるが、折角の機会であるので、いわゆる一般 Clifford 理論を環の extensions に関して述べることにする。([7])

R, S を 1 をもつ環とし、$\iota : R \to S$ を $\iota(1_R) = 1_S$ なる環準同型とする。さらに R-module V を1つ fix しておく。

任意の S-module は ι を通して R-module とみなせる。特に S 自身は R-R-bimodule と考えられる。

$\boxed{\text{定義 2.1.}}$ S-module V^S $(:= V \otimes_R S)$ が R-module として $\underbrace{V \oplus \cdots \oplus V}_{n\text{コ}}$ $(\exists n)$ の直和因子に同型であるとき、即ち $(V^S)_R \mid V \oplus \cdots \oplus V$ となるとき、V は S-invariant であるという。

注意 $N \trianglelefteq G$, $S = kG$, $R = kN$, $\iota : kN \to kG$ と自然なうめ込みとするとき、kN-module V について $(V^G)_N \cong \bigoplus_{g \in G/N} (V \otimes g)_N$ となるので、「V が kG-inv. $\Longleftrightarrow$ $\bigoplus_{g \in G/N} (V \otimes g) \mid V \oplus \cdots \oplus V$」となる。特に V が直既約のとき、これは「$V \otimes g \cong V$ as kN-module $\forall g \in G$」と同値になり、V が G-inv. $(I_G(V) = G)$ であることに他ならない。

$E = \mathrm{End}_S(V^S)$, $E_1 = \mathrm{End}_R(V)$ とおく。$\iota' : E_1 \to E$ を $\iota'(\varphi) = \varphi \otimes \mathrm{Id}_S$ $(\varphi \in E_1)$ と定義すると、ι' は環準同型となる。また、V^S は自然に E-S-bimodule と考えられる。

任意の S-module W に対し、$\mathrm{Hom}_S(V^S, W)$ は自然に E-module となる。また任意の E-module Y に対し $Y \otimes_E V^S$ は自然に S-module となる。実際、$\mathrm{Hom}_S(V^S, \cdot)$ は Mod(S) から Mod(E) への、また $\cdot \otimes_E V^S$ は Mod(E) から Mod(S) への covariant functor を与える。

Mod(S|V) を object が S-module W で $W_R \mid \underbrace{V \oplus \cdots \oplus V}_{n\text{コ}}$ ($\exists n$) を満たすものからなる Mod(S) の additive full subcategory. また、Mod(E|E₁) で、object が E-module Y で、$Y_{E_1} \mid E_1 \oplus \cdots \oplus E_1$ 即ち、Y_{E_1} が (f.g.) proj. E_1-module となるものからなる Mod(E) の additive full subcategory を表す。

$\boxed{\text{定理 2.2.}}$ (Clifford correspondence)

V は S-inv. と仮定する。このとき、$\mathrm{Hom}_S(V^S, \cdot)$, $\cdot \otimes_E V^S$ の Mod(S|V), Mod(E|E₁) へのそれぞれの制限は、Mod(S|V) と Mod(E|E₁) の間の equivalence を与える。

E が扱い易い環となるとき、上の定理により、Mod(S|V) の objects は対応する Mod(E|E₁) の objects を考えることにより、その様子が良くわかることがある。

重要な場合は、やはり $N \trianglelefteq G$, $R = kN$, $S = kG$ の場合である。このとき、次が成り立つ。

(一般に有限次元 k-algebra R に対し JR はその radical を表す。)

$\boxed{\text{補題 2.3.}}$ V を G-inv. kN-module とする。このとき:

(i) E は強 G/N-次数つき algebra となる。即ち E は subspaces $E_{\bar{x}}$ $(\bar{x} \in G/N)$ 達への分解 $E = \bigoplus_{\bar{x} \in G/N} E_{\bar{x}}$ をもち、$E_{\bar{x}} E_{\bar{y}} = E_{\bar{x}\bar{y}}$ $(\forall \bar{x}, \bar{y} \in G/N)$、かつ、各 $E_{\bar{x}}$ は E の unit を少なくとも 1 つ含む。さらに、$E_{\bar{1}} = E_1 (= End_R(V))$ととれる。

(ii) $(JE_1)E$ は E の両側イデアルである。

(iii) $E_1/JE_1 \cong k$ のとき、$E/(JE_1)E$ は、G/N のある twisted group algebra over k と同型になる。

我々の目的とは直接関係ないが定理 2.2と関連して知られていることをつけ加えておく。([7])

(i) $\iota : R \to S$ が Kasch, 中山の意味で (proj.) Frobenius のとき、VがS-inv. なら、$\iota' : E_1 \to E$ も (proj) Frobenius となる。更にこのとき、いわゆる複合 (compounding) ([3]) が成り立つ。ちなみに、S が完備局所ネーター環、R が Sに含まれる

正則局所環のとき、$\iota : R \hookrightarrow S$ が (free) Frobenius であることと、S が Cohen-Macaulay でしかも Gorenstein であることは同じである。

vii) V が S-inv. で completely reducible のとき、V^S の S-submodules のなす lattice と E の右イデアルのなす lattice は同型である。

§3. Vertices of simple objects of mMod kG.

W を indec. kG-module として fix し、simple object S_W の vertex を求める。

定理 1.4 より、$\mathrm{vtx}(W) \trianglelefteq G$ としてよい、かつ W の source は G-inv. としてよい。

そこでまず次の状況で考える。

(*) $N \trianglelefteq G$, V は G-inv. kN-module, $W \mid V^G$ とする。

さらに、$E = \mathrm{End}_{kG}(V^G)$, e を W に対応する E の primitive idempotent とする ; $eV^G = W$。 また、$E_1 = \mathrm{End}_{kN}(V)$ とする。

このとき、次が成り立つ。

$\boxed{定理3.1.}$ ([9]) $N \leq H \leq G$ なる G の部分群 H に対し,

SW が H-proj. $\Longleftrightarrow$ eE/eJE が H/N-proj.

注意(i) 定理の右辺で eE/eJE が H/N-proj. とは, 強 G/N-次数つき algebra E 上の module として考えたものである。即ち $E_H := End_{kH}(V^H)$ とおくと, $E_1 (= End_{kN}(V)) \hookrightarrow E$ と同様に, $E_H \hookrightarrow E$ なる自然なうめ込みがあり, この意味で E_H を E の subalgebra と思う。このとき, $\exists Y$: E_H-module s.t. $eE/eJE \mid Y \otimes_{E_H} E$ となることが eE/eJE が H/N-proj. の意味である。また, E のこの relative projectivity に対しても Higman's criterion (と同様の命題) が成り立つ。

(ii) eE/eJE は simple E-module であるが, 実は JE_1 はこの module を annihilate する。従ってこれは $E/(JE_1)E$-module と考えられ, k が十分大で V が indec. のときは, 補題2.3(iii) より, G/N のある twisted group algebra 上の simple module と考えられる。このような algebra 上の modules の relative projectivity の定義は [2] でも与えられているが, 上の注意(i) で述べた定義と一致する。

(iii) 定理の($\Rightarrow$)は以前に得られていた。([6, §3])
実際，eE/eJE は functor SW の V^G での値 $SW(V^G)$ として得られる。即ち mMod kG での exact sequence ${}_G(\cdot, W) \to SW \to 0$ から E-modules の exact sequence ${}_G(V^G, W) \to SW(V^G) \to 0$, i.e., $eE \to eE/eJE \to 0$ を得る。従って($\Rightarrow$)は極めて自然な命題であり，簡単な証明もある。しかし，($\Leftarrow$)は明らかではなく，証明には，Higman's criterion を用いる。

(証明のスケッチ)

<u>Step I</u>　まず登場する同型写像達を列挙しておく。

1. 米田同型　(§1, $\boxed{3}$)

$$Y: \mathrm{End}_{kG}(W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathrm{mMod}\,kG}({}_G(\cdot, W))$$

$$Y_H: \mathrm{End}_{kH}(W_H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathrm{mMod}\,kH}({}_H(\cdot, W_H)).$$

(共に k-algebras としての同型で，f を f_* にうつす。)

2. Frobenius 同型（補題 1.1)

$$a_H(\cdot) : \mathrm{Res}_H^G({}_G(\cdot, W)) = {}_G((\cdot)^G, W) \xrightarrow{\sim} {}_H(\cdot, W_H)$$

3. Clifford correspondence の同型（定理 2.2)

$$z : \mathrm{End}_{kG}(W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_E(eE) = eEe \quad (\text{as } k\text{-algebras})$$

4、Mod(E) と Mod(E_H) をつなぐ Frobenius 同型

(定理3.1の下の注意も見よ.)

$$a' ;\ eE = {}_G(V^G, W) \xrightarrow{\sim} {}_H(V^H, W_H) = eE_H \quad (\text{as } E_H\text{-modules})$$

以上の同型達は trace maps と次の様に関係している。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}_{\mathrm{mMod}\,kG}({}_G(\cdot, W)) & & \mathrm{End}_{kG}(W) \arrow[ll, "\sim"', "Y"] \arrow[rr, "\sim", "Z"'] & & \mathrm{End}_E(eE) \\
\mathrm{End}_{\mathrm{mMod}\,kH}(\mathrm{Res}^G_H({}_G(\cdot, W))) \arrow[u, "T^G_H"] \arrow[dr, "a_H(\cdot)", "\wr"'] & \circlearrowright & \mathrm{End}_{kH}(W_H) \arrow[u, "t^G_H"] \arrow[dl, "Y_H", "\wr"'] \arrow[dr, "Z_H"', "\wr"] & \circlearrowright & \mathrm{End}_{E_H}(eE) \arrow[u, "\tau^G_H"] \arrow[dl, "a'", "\wr"'] \\
& \mathrm{End}_{\mathrm{mMod}\,kH}({}_H(\cdot, W)) & & \mathrm{End}_{E_H}(eE_H) &
\end{tikzcd}$$

但し、τ^G_H (trace map) に対しては、具体的に定義を述べてないが、Eが強 G/N-次数つき algebra であることを利用して、t^G_H と同様に定義できる。また上の diagram の左半分の可換性は ([4, Prop. 6.4]) で示されている。さらに、$a_H(\cdot)$, a' については、元の同型写像が induce する endomorphism rings の同型を同じ文字で表している。

<u>Step II</u>　Step I の diagram から SW 或いは eE/eJE の入った diagram へ移行するため、次の事を思い出しておく。

${}_G(\,;W)$, ${}_H(\,;W_H)$ はそれぞれ mMod kG, mMod kH の proj. な objects である。また、eE, eE_H はそれぞれ、Mod E, Mod E_H の proj. な objects である。しかも exact sequences

$$ {}_G(\,;W) \to SW \to 0, \qquad eE \to eE/eJE \to 0 $$
$$ \mathrm{Res}^G_H({}_G(\,;W)) \to \mathrm{Res}^G_H(SW) \to 0, \qquad (eE)_{E_H} \to (eE/eJE)_{E_H} \to 0. $$

がある。ここで $E_G^{(1)}$ 等を次の様におく。

$$
\begin{array}{lll}
E_G^{(1)} = \{ f \in \mathrm{End}_{\mathrm{mMod}\,kG}({}_G(\,;W)) & | & f(\mathrm{rad}\,{}_G(\,;W)) \subset \mathrm{rad}\,{}_G(\,;W) \} \\
I_G^{(1)} = \{ \qquad \text{〃} & | & f({}_G(\,;W)) \subset \quad \text{〃} \quad \} \\
E_H^{(1)} = \{ f \in \mathrm{End}_{\mathrm{mMod}\,kH}(\mathrm{Res}^G_H({}_G(\,;W))) & | & f(\mathrm{Res}^G_H(\mathrm{rad}\,{}_G(\,;W))) \subset \mathrm{Res}^G_H(\mathrm{rad}\,{}_G(\,;W)) \} \\
I_H^{(1)} = \{ \qquad \text{〃} & | & f(\mathrm{Res}^G_H({}_G(\,;W))) \subset \quad \text{〃} \quad \} \\
E_G^{(2)} = \{ f \in \mathrm{End}_E(eE) & | & f(eJE) \subset eJE \} \\
I_G^{(2)} = \{ \qquad \text{〃} & | & f(eE) \subset eJE \} \\
E_H^{(2)} = \{ f \in \mathrm{End}_{E_H}(eE) & | & f(eJE) \subset eJE \} \\
I_H^{(2)} = \{ \qquad \text{〃} & | & f(eE) \subset eJE \}
\end{array}
$$

$E_*^{(*)}$ は対応する endomorphism ring の subalgebra となり、$I_*^{(*)}$ は $E_*^{(*)}$ のイデアルになるのは明らかである。また上に述べたことより、

$$ \mathrm{End}_{\mathrm{mMod}\,kG}(SW) \cong E_G^{(1)} / I_G^{(1)} $$
$$ \mathrm{End}_{\mathrm{mMod}\,kH}(\mathrm{Res}^G_H(SW)) \cong E_H^{(1)} / I_H^{(1)} $$

$$\mathrm{End}_E(eE/eJE) \cong E_G^{(2)} / I_G^{(2)}$$

$$\mathrm{End}_{E_H}(eE/eJE) \cong E_H^{(2)} / I_H^{(2)}$$

となる，

Step III　$f \in \mathrm{End}_{kH}(W_H)$ に対して次が成り立つ.

(i) $a'^{-1} z_H(f) \in E_H^{(2)} \iff a_H(\cdot)^{-1} Y_H(f) \in E_H^{(1)}$

$\quad\quad$ 〃 $\in I_H^{(2)} \iff$ 〃 $\in I_H^{(1)}$

(ii) $a'^{-1} z_H(f) \in E_H^{(2)}$ (resp. $I_H^{(2)}$) $\Rightarrow z\, t_H^G(f) \in E_G^{(2)}$ (resp. $I_G^{(2)}$)

$a_H(\cdot)^{-1} Y_H(f) \in E_H^{(1)}$ (resp. $I_H^{(1)}$) $\Rightarrow Y\, t_H^G(f) \in E_G^{(1)}$ (resp. $I_G^{(1)}$).

実際には、この step が証明の key であり、これを示すには、各 module、isomorphism の定義にたち返り、check していくしかない。

Step IV　Step III (i) より　$a'^{-1} z_H Y_H^{-1} a_H(\cdot)$ は同型

$$\theta_H : E_H^{(1)}/I_H^{(1)} \xrightarrow{\sim} E_H^{(2)} / I_H^{(2)} \quad \text{(as } k\text{-algebras)}$$

を induce する。$H=G$ のときは、$a'^{-1} z_H = z$，$a_H(\cdot)^{-1} Y_H = Y$ であるので特に

$$\theta_G : E_G^{(1)} / I_G^{(1)} \xrightarrow{\sim} E_G^{(2)} / I_G^{(2)}$$

を得る。

Step I の diagram の可換性と Step III (ii) より 次の diagram を得る.

$$\begin{tikzcd}
E_G^{(1)} / I_G^{(1)} \arrow[r, "\sim", "\theta_G"'] & E_G^{(2)} / I_G^{(2)} \\
E_H^{(1)} / I_H^{(1)} \arrow[u, "\overline{T_H^G}"] \arrow[r, "\theta_H"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & E_H^{(2)} / I_H^{(2)} \arrow[u, "\overline{\tau_H^G}"']
\end{tikzcd}$$

ここで $\overline{T_H^G}$, $\overline{\tau_H^G}$ はそれぞれ、T_H^G, τ_H^G が induce する写像である。この diagram と Step II の結果より、次の diagram が得られることが check できる.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}_{\mathrm{mMod}\,kG}(SW) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{End}_E(eE/eJE) \\
\mathrm{End}_{\mathrm{mMod}\,kH}(\mathrm{Res}_H^G(SW)) \arrow[u, "T_H^G"] \arrow[r, "\sim"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{End}_{E_H}(eE/eJE) \arrow[u, "\tau_H^G"']
\end{tikzcd}$$

定理の主張は、この diagram と Higman's criterion (定理1.5) よりただちに得られる。

次に定理3.1 の 2、3 の応用について述べる。

$\boxed{\text{系 3.2}}$ kは十分大とする。Wを indec. kG-module, $P=\mathrm{vtx}(W)$, SをWの source, $I_G(S)$をSの($N_G(P)$中の) inertial 部分群とする。定義から $W \mid S^G$ であるが、S^GにおけるWの直和因子としての重複度がpと素なら $\mathrm{vtx}(SW)$は$I_G(S)$のp-Sylow部分群である。

証明には、次の補題が必要である。

$\boxed{\text{補題}}$ ([4, Prop. 7.9]の特別な場合よりただちに得られる)
kは十分大とする。定理3.1の設定(*)のもとで次が成り立つ。

$$\dim_k eE/eJE = V^G\text{における }W\text{の直和因子としての重複度}.$$

(系3.2の証明)
定理1.4より $P \lhd G$, $I_G(S)=G$としてよい。このとき$V=S$として定理3.1と同じ状況になる。又補題2.3 iii)より eE/eJE はG/Pの twisted group algebra 上の module となる。(定理3.1の後の注iii)参照) 従って vertex と dimension の p-part の関係についてよく知られた事実(の twisted group algebra version)より eE/eJE の vertex は G/P の p-Sylow部分群である。
(ここで上の補題より $p \nmid \dim_k eE/eJE$ となることを用いている。)

従って定理3.1より系の結論を得る。

kが十分大で G 自身が p-群のとき，系3.2の仮定は常に満たされている。（実際 $W=S^G$ となる）従って、このとき SW の vertex は $I_G(S)$ に一致する。 これは [4, Th.8.2] に他ならない。

$\boxed{\text{系 3.3}}$ kは十分大とする． indec. kG-module W に対して

$$J\,\mathrm{End}_{kG}(W) = \sum_{H \lneq_G \mathrm{vtx}(W)} t_H^G\,(\mathrm{End}_{kH}(W))$$

と仮定する。このとき $\mathrm{vtx}(W) = \mathrm{vtx}(SW)$ である。

（証明） 定理1.4より $\mathrm{vtx}(W) \lhd G$，W の source は G-inv. としてよい。このとき Knörr [5] の結果により、仮定から eE/eJE（記号は定理3.1と同じ）は proj. E-module である．従って $\mathrm{vtx}\,(eE/eJE) = \mathrm{vtx}(W)/\mathrm{vtx}(W)$ となり、定理3.1より結論が得られる。

上の証明で「eE/eJE が proj $\Rightarrow \mathrm{vtx}(W) = \mathrm{vtx}(SW)$」の部分は以前別証を与えていた。[8, §2] ここでは、定理3.1を考えることにより、この結果の意味が一層はっきりする。

simple kG-module は常に系3.3の仮定を満たすので、Wが simple kG-module のとき、$vtx(W) = vtx(SW)$ が常に成り立つ。

References

[1] Cline E. : Stable Clifford Theory. J. of Algebra 22 (1972), 350-364.

[2] Conlon S. B. : Twisted Group Algebras and Their Representations. J. Austral. Math. Soc. 4 (1964), 152-173.

[3] Dade E.C. : Compounding Clifford's Theory. Ann. of Math. (2) 91 (1970), 236-290.

[4] Green J. A. : Functors on Categories of Finite Group Representations. J. of Pure and Applied Alg. 37 (1985) 265-298.

[5] Knörr R. : On the Vertices of Irreducible Modules. Ann. of Math (2) 110 (1979), 487-499.

[6] 宇野 : 有限群の表現論における Auslander-Reiten 理論. 数理研講究録 580「群論」 59~69

[7] Uno K. : Generalized Clifford Theory. Ph.D. dissertation. University of Illinois at Urbana-Champaign, 1985.

[8] Uno K.: On the Sequenses Induced from Auslander-Reiten sequences. to appear in Osaka. J. Math.

[9] Uno K.: Relative Projectivity and Extendibility of Auslander-Reiten sequences. preprint.

[10] 吉田 : トポスにおける transfer 理論, 数学32巻3号, 1980.

[11] Benson D.: Modular Representation Theory: New Trend and Methods. Springer Lecture Note 1081, Springer Verlag 1984.