数理解析研究所講究録
第628巻 1987年 139-151

トーラスによる不変式環の表現型

名大．理．吉野雄二（Yuji Yoshino）

§１．動機と背景

以下、簡単のためｋは標数０の代数閉体とする。ｋ代数Ｒは、次のどれかであるとしよう。

1) ネーター完備局所環で剰余体としてｋを持つ。

2) ｋ上の局所解析代数。

3) 有限生成な次数付き環で、$R_0=k$となる。

さらに、このＲはいつもＣＭ（Cohen-Macaulay）であるとする。私たちは、このＲの上のＣＭ加群の成す圏に興味がある。そこで、

$$\mathfrak{C}(R)=R\text{上のmaximal CM加群の圏}$$

（但し、Ｒが次数付き環のときには斉次なmaximal ＣＭ加群のみを考える。）と置く。

Ｒが有限表現型局所環であるとは、$\mathfrak{C}(R)$に含まれる直既約な加群の同型類が有限個しかないときをいう。有限表現型でない環は、無限表現型であるという。

この圏$\mathfrak{C}$（R）について重要なことは、次の事実である。

定理(1.1)（吉野［5］）もしRが孤立特異点であるならば、圏$\mathfrak{C}$（R）についてはBrauer-Thrall 1定理が成立する。もっと一般に、このとき$\mathfrak{C}$（R）においてはAuslander-Reiten理論が有効である。

この定理によって、多元環の表現論における幾つかのテクニックを$\mathfrak{C}$（R）に応用して、CM加群に対する理解がかなり進んだと思われる。

次に有限表現型である様な局所環については、その特徴付けが幾つか行われている。それらをまとめて書いておこう。

定理(1.2)（cf.［4］）

1) RがGorenstein環であるときには、Rが有限表現型であるということとRが超局面であって単純特異点しかもたないということは同値である。

2) Rが1次元のときには、Rが有限表現型であるということと、Rが単純特異点を双有理的に支配するということは同値である。

3) Rが2次元のときには、Rが有限表現型であるということと、Rが有限群による商特異点であるということは同値である。

この定理によって、有限表現型であるようなRはその数が非常に少なくて、環としての構造も良く理解できていることが分るであろう。しかし、それは環RがGorensteinであるか、またはRの次元が2以下の場合だけであることに注意しよう。実際、RがGorensteinでない3次元以上の環の場合には、有限表現型であることの必要十分条件はまだ分っていない。実は、有限表現型であることが確認されているそのような環は、次の2つだけである。（Auslander

-Reiten [1])

(1.3.a)　3次元2次のVeronese部分環；

$$R = k[x,y,z]^{(2)} = k[x^2, xy, y^2, yz, z^2, zx] \subset k[x,y,z]$$

(1.3.b)　(2,1)型スクロール；

$$R = k[x_0, x_1, x_2, y_0, y_1]/(x_0x_1 - x_1^2, x_0y_1 - x_1y_0, x_1y_1 - x_2y_0)$$

もう少し詳しくいうと、次のような事が分っている。

定理(1.4) ([1])

a)　Rが3次元以上であって有限群による商特異点であるような環であるとき Rが有限表現型になるのは3次元2次のVeronese部分環に限る。

b)　有限表現型であるような3次元以上のスクロールは、3次元のA_1型特異点と(2,1)型スクロールの2種類のみである。

本稿の動機は、これら2つの例とは異なる例を見付ようとすることから始まった。実は、上に掲げた2つの例はトーラスの不変部分環となっていることが分る。そこで、トーラスの部分環について、その表現型を決めるにはどうしたら良いかということを考えてみようというのである。

§2．トーラスの不変部分環

先ず、トーラスの不変部分環について記号を整理しておこう。

以下、kは§1と同じく標数0の代数閉体とする。$T = (k^*)^m$ はm次元（代数的）トーラスである。但し、$k^* = k - \{0\}$ である。今、このTが、n次元のkベクトル空間Vに有理的に作用している場合を考えよう。トーラスの表現

の完全可約性によって、この作用は次のように書くことができる。

Vの基底 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ と整数 a_{ij} $(1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq j \leqq m)$ が存在して、任意の $t = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$ について、

(2.1) $$t \cdot x_i = t_1^{a_{i1}} t_2^{a_{i2}} \ldots t_m^{a_{im}} x_i \quad (1 \leqq i \leqq n)$$

このとき、TのVにおける作用はVの対称代数 $S = S(V) = k[x_1, \ldots, x_n]$ ($x_1, \ldots, x_n$を変数にもつ多項式環) にまで拡張される。このときの不変式の全体の成す環をRと置くことにする。

$$R = S^T$$

この環Rは次のような形に書くこともできる。即ち、$\mathbb{N}^n$の部分半群Hを

$$H = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \Sigma_i \alpha_i a_{ij} = 0\}$$

と置くとき、環Rは、

(2.2) $$R = k[x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^n]$$

と書ける。従って、Rは半群環である。このように、Rはトーラスの作用というよりは、その作用を与えている整数行列 $A = (a_{ij})$ によって完全に決定される。そこで、整数行列 $A = (a_{ij}) \in M(n \times m, \mathbb{Z})$ に対して、(2.2)によって与えられる環を $R(A)$ と書くことにする。

環 $R(A)$ に関して重要な事実は次のHochsterの定理である。

定理(2.3)(Hochster [2]) $R(A)$はいつもCM環である。

この定理によって、§1に述べたような$\mathfrak{C}(R(A))$の表現型を問題にすることが考えられる。そこで、記号の簡略化のために、次のような定義をしておこう。

定義：整数行列$A=(a_{ij})$が有限型であるとは、対応する半群環$R(A)$が有限表現型であるときをいう。同様に、Aが無限型であるとは、$R(A)$が無限表現型であるときである。

簡単な例を掲げよう。

例(2.4)

i)　$A={}^t(2,-1,-1,-1)$のとき、対応する環$R(A)$は、

$$R(A)=k[xy^2, xyz, xz^2, xzw, xw^2, xwy]$$

である。この$R(A)$は3次元2次のVeronese部分環$k[y,z,w]^{(2)}$とk代数として同型である。とくに、このAは有限型の行列である。

ii)　$A={}^t(2,1,-1,-1)$のとき、対応する環は、

$$R(A)=k[xz^2, xzw, xw^2, yz, yw]$$

である。これが§1で述べた(2.1)型スクロールと同型であることは容易に分る。従って、このAもまた有限型行列である。

iii)　$A={}^t(1,1,-1,-1)$に対応する環は、3次元のA_1型単純特異点である。特に、このAもまた有限型行列であることが分る。

一般的には、次の問題に答えることが目標である。

問題：与えられた整数行列Aは、いつ有限型か？　あるいは、いつ無限型であるか？　あるいは、それらをどのように判定したら良いか？

この問題に関して今まで知られている事実をまとめておこう。

(2.5)　整数行列Aに、行の置換、列に関する基本変換、整数($\neq 0$)倍をして得られる行列をBとする。このときには、k代数として、

$$R(A) \simeq R(B)$$

であるから、AとBの型は同じである。以下では、しばしばこのようなAとBは同一視しておく。

(2.6)　行列Aのある行が0であったと仮定する。このとき、この行をAから取り除いた行列をBとする。すると、Aが有限型であるための必要十分条件は$R(B)$が正則であることである。

実際、このときには$R(A) \simeq R(B)(x)$である。このことと、環Rが有限表現型であるならば、Rは孤立特異点でなくてはならないという事実から(2.6)が出る。

(2.7)　$A = {}^t(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M(n \times 1, \mathbb{Z})$で、$n \leqq 3$ならば、このAは有限型である。

これは、2次元の商特異点が有限表現型であるという事実を言い換えただけである。

定理(1.4)(a)をこの行列の言葉に翻訳すると次のようになる。

(2.8)　行列$A = {}^t(a, -b_1, \ldots, -b_{n-1}) \in M(n \times 1, \mathbb{Z})$　$(a, b_i > 0)$が有限型であるのは次のどれかの場合に限る。

(i)　任意のiについて、$b_i \equiv 0 \pmod{a}$

(ii)　$n \leqq 3$

(iii)　$n = 4$で、aが偶数、かつ、任意のiに対して、$b_i \equiv a/2 \pmod{a}$

また、定理(1.4)(b)を翻訳すると、

(2.9)　行列$A = {}^t(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, -1, -1) \in M(n \times 1, \mathbb{Z})$　$(a_i > 0)$が有

限型であるのは、次のどれかの場合に限る。

(i)　$n \leqq 3$ の場合

(ii)　$n = 4$ で、$\{a_1, a_2\} = \{1\}$ 又は $\{1, 2\}$

整数行列の表現型に関して今まで知られている事実は、上に述べた(2.5)-(2.9)で全てであろう。これらの事実に付けくわえて次のような事が最近分った。できるだけ一般的な形で述べると次のようになる。

定理(2.10) (cf. [6])　$R \subset R'$ がring retractionを持つ局所環の拡大とする。そして、次のことを仮定する。

R と R' は共にCM環で、R は孤立特異点しかもたない。更に、$\dim(R') = \dim(R) + 1$ である。

このとき、もし R が無限表現型であるならば、R' もそうである。

この定理の証明は、本質的に定理(1.1)を使ってなされる。ここでは、この証明はさておき、その応用について考えてみよう。

先ず、ring retractionを持つ環の拡大の例を掲げよう。

例(2.11)　$k[x, y, z, w]$ の部分環；

$R = k[xz^2, xzw, xw^2] \subset R' = k[xz^2, xzw, xw^2, yz, yw]$

を考える。R' のイデアル I を $\{yz, yw\}$ で生成されたものとすると、$R'/I \simeq R$ であるから、この環の拡大はring retractionを持つ。R、R' はそれぞれ次の行列で定義されるトーラスの不変式環である。

$$A = {}^t(2, -1, -1)、A' = {}^t(2, 1, -1, -1)$$

A は変数 y に対応する行(1)を A' から取りのぞくことによって得られること

に注意しよう。一般に、このことは正しい。即ち、次が成立する。

補題(2.12)　$A={}^t(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in M(n \times m, \mathbb{Z})$、$\alpha_i \in M(m \times 1, \mathbb{Z})$ 及び、$\beta \in M(m \times 1, \mathbb{Z})$とする。このとき、$A'={}^t(\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta)$とおくと、環の拡大$R(A) \subset R(A')$は、ring retractionを持つ。

この補題と定理(2.10)を合せて、次のことが分る。

系(2.13)　補題(2.12)の記号のもとで、もしAが無限型かつ$R(A)$が孤立特異点をもつならば、A'もまた無限型の行列である。

この系の応用を一つ与えよう。

例(2.14)　行列${}^t(a, b, -1, -1, -1)$が有限型であるのは次のどれかの場合に限る。

(i)　　$a=1$かつ$b \leqq 0$

(ii)　$b=1$かつ$a \leqq 0$

(iii)　$a \leqq 0$かつ$b \leqq 0$

実際、この行列が有限型であるためには、(2.13)によって、次の3つの行列が全て有限型でなくてはならない。

${}^t(a, -1, -1, -1)$、${}^t(b, -1, -1, -1)$、${}^t(a, b, -1, -1)$

これらの行列が有限型になるための必要条件は、(2.6)-(2.9)で分っているので、上の3つの場合しか残らないことはすぐに分る。一方で、これらの場合には対応する環は多項式環または体であるから、有限型であることが分るのである。

§3．4×1行列

以下では、主に1次元トーラスの作用による不変式環の表現型を考えよう。このときには、系(2.13)及び例(2.14)で見たように、行列Aの列の数が5以上であれば、Aが無限型であることを見るのは、4×1行列の場合に帰着されるであろう。しかし、Aが4×1行列のときには、系(2.13)は意味を持たない。実際、(2.7)で述べたように、3×1行列はいつも有限型だからである。従って、4×1行列の場合の表現型の決定が最も本質的であろう。この節では、そこで、もっぱら4×1行列について、その表現型を考えることにする。

以下では、$A={}^t(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M(n\times 1, \mathbb{Z})$と置く。多項式環$S=k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$には、次のようにして$\mathbb{Z}^2$-graded ringの構造が入る。

$$\deg(x_i)=(a_i, 1) \quad \in \quad \mathbb{Z}^2$$

そして、次のように記号を定義しよう。

$$S_{(z,q)}=S\text{の次数が}(z,q)\text{の部分}$$

$$S_z= \bigoplus S_{(z,q)} \quad (\text{但し、}q\text{は}\mathbb{Z}\text{を走る})$$

$S_0=R$は$\mathbb{Z}$-graded ringである。また、S_zは有限生成な$\mathbb{Z}$-gradedなR加群であって、R上の階数が1であることに注意しよう。即ち、S_zはRの斉次イデアルである。

このRが無限型であることを見る実際的な補題を次に掲げよう。

PRACTICAL LEMMA(3.1) (cf. [6]) 上の記号のもとで、更に、次のことを仮定しよう。

Sの単項式で生成された高さ2の完全イデアルIと、4つの整数z，q，a，

b（但し、z＝a＋b）が存在して、

(i)　$\dim_k \mathrm{Ext}^1{}_S(I, S)_{(z,q)} \geqq 2$

(ii)　I_{-a}とS_bは共にR加群としてCMである。

(iii)　$\mathrm{Hom}_R(S_b, I_{-a})_j = 0$　$(j \leqq -q)$

を満足したとする。このとき、Rは無限表現型である。

この補題の簡単な証明を付けておこう。

実は、(i)より $\mathrm{Ext}^1{}_R(I_{-a}(-q), S_b)_0$ もk上で2次元以上あることが容易に分る。そこで、その一次独立な2元σとτを取る。$w \in k$を任意の元として$\sigma + w\tau$に対応するextensionを、

$$0 \to S_b \to M_w \to I_{-a}(-q) \to 0$$

とする。仮定によって、S_bと$I_{-a}(-q)$はR上のCM加群であるから、中央に現われた加群M_wもまたCM加群である。更に、仮定(iii)によって、$w \neq u$ならば、$M_w \not\cong M_u$であることが容易に分る。これで、階数2の同型でないCM加群が無限個存在することが分った。これから、Rが無限表現型であることが出る。■

この補題を実際に適用するときには、(ii)の仮定をチェックするために次の事実が有用である。

STANLEY'S CRITERION(3.2) (cf. [3;(7.8)])

$A = {}^t(a_1, \ldots, a_p, -a_{p+1}, \ldots, -a_n)$（但し、任意の$a_i > 0$）とする。このとき、$z \in \mathbb{Z}$について、

(i) $z > 0$ ならば、

S_z がCM加群でない。

$\rightleftarrows$ 整数の組 $(z_1,...,z_p) < 0$ と $(z_{p+1},...,z_n) \geqq 0$ が存在して、$\Sigma a_i z_i = z$ を満たす。

(ii) $z > 0$ ならば、

S_z がCM加群でない。

$\rightleftarrows$ 整数の組 $(z_1,...,z_p) \leqq 0$ と $(z_{p+1},...,z_n) > 0$ が存在して、$\Sigma a_i z_i = z$ を満たす。

この(3.2)によって、次のような行列のときには、補題(3.1)の仮定が全て満足されて無限型であることが証明できる。

	I	z	a	b	q
${}^t(c,1,-1,-1)$ $(c \geqq 3)$	$(x_3, x_4)^2$	4	3	1	−2
${}^t(3,2,-2,-2)$	$(x_3, x_4)^2$	8	6	2	−2
${}^t(3,2,-2,-1)$	(x_3^2, x_3x_4, x_4^3)	8	6	2	−3

${}^t(3,3,-2,-1)$	(x_3, x_4^2)	7	5	2	−2
${}^t(2,2,-1,-1)$	(x_3, x_4)	4	3	1	−2

このように見ていくと殆どの４×１行列は、無限型または既に知られている有限型の行列であることが分るが、中には未だに表現型の判定のつかなものもある。その一番簡単な例を掲げよう。

例(3.3)　$A = {}^t(3, 1, -2, -1)$と置くと、このAに関しては補題(3.1)を満足するようなＩを取ることが出来ない。この行列に対応する環は、次のようなものである。

$$R(A) = k[A,B,C,D,E,F]/(AC-B^3, AE-D^2, AF-BD, BE-DF, BF^2-CE, CD-B^2F)$$

今のところ、この環が有限表現型であるかどうか知らない。しかし、これが無限型である証拠もまた何もない。一応、次の予想を掲げて、本報告を終えることにする。

予想(3.4)　行列${}^t(3, 1, -2, -1)$は有限型の行列であろう。

参考文献

[1] M. Auslander and I. Reiten; The Cohen-Macaulay type of Cohen-Macaulay rings, in preprint of Univ. of Trondheim, Norway(1986).

[2] M. Hochster; Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytopes, Annals of Math. 96(1972), 318-337.

[3] R. Stanley; Combinatorics and Commutative Algebra, Birkauser, 1983.

[4] 吉野雄二；Hensel環上のMaximal CM加群、東京都立大学セミナー報告(1987)。

[5] Y. Yoshino; Brauer-Thrall type theorem for maximal CM modules, to appear in Journal of Japan Math. Soc.

[6] Y. Yoshino; in preparation.

(昭和６２年３月２７日)