数理解析研究所講究録
第 629 巻 1987 年 82-97

ガロア・コホモロジーと
概均質ベクトル空間の普遍推移性

筑波大修士課程教育研究科
細川尋史（Hiroshi HOSOKAWA）

1. $l = l_k(G\ X)$ の定義

k を標数 0 の体とする。$\widetilde{G}$ を連結かつ k-split な線型代数群とし、k 上定義された表現 ρ により $X = \mathrm{Aff}^n$ に作用するものとする。そして、Zariski-dense $\widetilde{G}$-orbit Y が存在するとき、$(\widetilde{G}, \rho, X)$ を概均質ベクトル空間とよぶ（以下、P.V. と略記する。$(\widetilde{G}, \rho, X)$ が P.V. であるとき、$G = \rho(\widetilde{G})$ とし、$l = l_k(G\ X)$ を次のように定義する。

$$l = l_k(G\ X) = \text{the number of } G(k)\text{-orbits in } Y(k)$$

ここで、k 上 nonsplit quaternion k-algebra が存在することを仮定する。これは、$H^1(k\ \ \mathrm{Aut}(SL_2)) \neq 0$ であることと同値であり、さらに、このことより k 上 2 次拡大が存在することが導かれる。そして、$k \neq \mathbb{C}$ なるすべての局所体に対して、この仮定は満たされている。この仮定を満たす体 k に対して、$l = l_k(G\ X) = 1$ のとき、Y は universally transitive open orbit

であるという。[1]，[2]において，universally transitive open orbit を持つ irreducible regular P.V. の分類がなされている。また，[3]において，universally transitive open orbit を持つ simple 及び 2-simple P.V. の分類がなされている。

2. Galois - Cohomology

G を group，A を G-set とする。（但し，写像 $\begin{array}{ccc} G \times A & \to & A \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (g, a) & \mapsto & a^g \end{array}$ が定義され次を満たすとき，A は G-set であるという。(1) $a^1 = a$ for $\forall a \in A$ (2) $(a^{g_2})^{g_1} = a^{g_1 g_2}$ for $\forall a \in A$，$\forall g_1, g_2 \in G$ ）このとき，0次コホモロジー $H^0(G,A)$ を次で定義する。

$$H^0(G,A) = A^G = \{ a \in A ;\ a^g = a \ \text{ for } \forall g \in G \}$$

さらに，A が group であり，$(ab)^g = a^g b^g$ for $\forall a, b \in$ ，$\forall g \in G$ を満たすとき，A を G-group という。このとき，写像 $\begin{array}{ccc} G & \to & A \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ s & \mapsto & a_s \end{array}$ が次を満たすとき，cocycle という。

$$a_{st} = (a_t)^s \cdot a_s \qquad \text{for } \forall s, t \in G$$

cocycle a_s, b_s が次を満たすとき，互いに cohomologous であるといい，$a_s \underset{\text{cohomlogous}}{\sim} b_s$ とかく。

$$\exists c \in A \ \text{ s.t } \ b_s = c^s \cdot a_s \cdot c^{-1}$$

この関係；$\underset{\text{cohomologous}}{\sim}$ は，同値関係である。そして，1次コホモロジー $H^1(G,A)$ を次で定義する。

$$H^1(G,A) = \{\text{cocycles}\} \big/ \underset{\text{cohomologous}}{\sim}$$

ここで、Aが abelian であるとき、$H^1(G,A)$ は abelian となるが Aが nonabelian であるとき、$H^1(G,A)$ は group とならないが、$1;\ \begin{array}{ccc} G & \to & A \\ \Psi & & \Psi \\ s & \mapsto & 1 \end{array}$ なる cocycle を含む cohomology class (これもまた 1 とかく) を含む pointed set である。

A, B を G-set、写像 $f;A \to B$ が次を満たすとする。

$$f(a^s) = (f(a))^s \quad \text{for } \forall a \in A,\ \forall s \in G$$

このとき、$f_0;\ H^0(G,A) \longrightarrow H^0(G,B)$ を $f_0 = f|_{H^0(G,A)}$ で定義する。さらに、A, B が G-group であり、f が group-homo であるとき、$a_s;\ G \to A$ が cocycle ならば、$f(a_s);\ G \to B$ もまた cocycle である。さらに、$a_s \underset{\text{cohomologous}}{\sim} a_s'$ ならば、$f(a_s) \underset{\text{cohomologous}}{\sim} f(a_s')$ であるから、次の写像は、well-defined である。

$$\begin{array}{cccc} f_1; & H^1(G,A) & \longrightarrow & H^1(G,B) \\ & \Psi & & \Psi \\ & \overline{a_s} & \longmapsto & \overline{f(a_s)} \end{array}$$

但し、$\overline{a_s}$ は、cocycle a_s の属する cohomology class である。

Proposition. 1.

A, B を G-group、C を G-set とする。$1 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 1$ が pointed set として exact (但し、i は group-homo で、i 及び p は G の作用と可換とする。) ならば、次もまた pointed set として exact である。

$$1 \longrightarrow H^0(G,A) \xrightarrow{i_0} H^0(G,B) \xrightarrow{p_0} H^0(G,C) \xrightarrow{\delta} H^1(G,A) \xrightarrow{i_1} H^1(G,B)$$

Proof.

(1) $H^0(G,A)$ における exactness.

$i : A \to B$ が injective であることより明らか。

(2) $H^0(G,B)$ における exactness.

$b \in \mathrm{Im}\, i_0 \Rightarrow {}^\exists a \in A$ s.t $b = i_0(a) = i(a) \Rightarrow P_0(b) = P(i(a)) = 1 \Rightarrow b \in \ker P_0$ 。逆に、$b \in \ker P_0 \Rightarrow b \in \ker P = \mathrm{Im}\, i \Rightarrow {}^\exists a \in A$ s.t $b = i(a)$ 。このとき、${}^\forall s \in G$ に対して、$b^s = i(a)^s = i(a^s)$ で、$b^s = b$ であるから、$i(a^s) = i(a)$。i が injective であるから、$a^s = a$ よって $a \in A^G = H^0(G\ A)$ すなわち、$b = i(a) = i_0(a) \in \mathrm{Im}\, i_0$ 。

(3) $\delta ; H^0(G,C) \longrightarrow H^1(G,A)$ の定義。

${}^\forall c \in H^0(G,C)$ に対して、P が surjective であるから、${}^\exists b \in G$ s.t. $P(b^{-1}) = c$ このとき、${}^\forall s \in G$ に対して、$P(b^{-1}) = c = c^s = P(b^{-1})^s = P(b^s)^{-1} \Rightarrow P(b^s b^{-1}) = 1 \Rightarrow b^s b^{-1} \in \ker P = \mathrm{Im}\, i \Rightarrow a_s = i^{-1}(b^s b^{-1}) \in A$ とおくと、$\begin{matrix} G & \to & A \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ s & \mapsto & a_s \end{matrix}$ なる写像が得られる。以下、簡単のため、$i(A)$ と A とを同一視する。${}^\forall s.t \in G$ に対して、$(a_t)^s \cdot a_s = (b^t b^{-1})^s \cdot b^s b^{-1} = b^{st} \cdot b^{-1} = a_{st}$ であるから、$a_s : G \to A$ は cocycle である。また、$P(b^{-1}) = P(b'^{-1}) = c$ 、$a_s = b^s b^{-1}$ $a'_s = b'^s b'^{-1}$ とおくと、$1 = P(b')P(b^{-1}) = P(b' b^{-1}) \Rightarrow b' b^{-1} \in \ker P = \mathrm{Im}\, i = A \Rightarrow {}^\exists a \in A$ s.t $b' = ab \Rightarrow a'_s = (ab)^s \cdot (ab)^{-1} = a^s b^s b^{-1} a^{-1} = a^s a_s a^{-1} \Rightarrow a_s \underset{\text{cohomologous}}{\frown} a'_s$ したがって、上のように定めた cocycle a_s の含まれる cohomology class は、

$p(b^{-1}) = c$ なる $b \in B$ のとり方によらないで、c のみで定まるから次の写像は、well-definedである。

$$\begin{array}{cccc} \delta \; ; & H^0(G, C) & \longrightarrow & H^1(G, A) \\ & \Psi & & \Psi \\ & c & \longmapsto & \overline{a_s} \end{array}$$

(4) $H^0(G,C)$ における exactness。

$c \in H^0(G,C)$ に対し、$c \in \mathrm{Im}\, p_0 \Leftrightarrow \exists b \in B$ s.t $p(b^{-1}) = c$、$b^s = b$ for $\forall s \in G \Leftrightarrow \delta(c) = 1 \Leftrightarrow c \in \ker \delta$。

(5) $H^1(G\ A)$ における exactness。

$\overline{a_s} \in H^1(G\ A)$ に対し、$\overline{a_s} \in \ker i_1 \Leftrightarrow a_s ; G \to B$ が 1 と cohomologous $\Leftrightarrow a_s = b^s \cdot b^{-1}$ for $\exists b \in B \Leftrightarrow c = p(b^{-1})$ に対し、$\overline{a_s} = \delta(c)$ (注; $1 = p(a_s) = p(b^s b^{-1}) = (c^s)^{-1} \cdot c$ for $\forall s \in G$ により $c^s = c$ for $\forall s \in G$ だから、$c \in H^0(G,C)$ である。) $\Leftrightarrow \overline{a_s} \in \mathrm{Im}\, \delta$

(証明終)

Proposition. 2.

G ; group, A_1, A_2 ; G-group であるとき、

$$H^1(G, A_1 \times A_2) \simeq H^1(G, A_1) \times H^1(G, A_2) \quad (\text{bijection})$$

Proof.

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & A_1 \times A_2 \\ \Psi & & \Psi \\ s & \longmapsto & a_s = (a_s^1, a_s^2) \end{array}$$

を cocycle とすると、

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & A_i \\ \Psi & & \Psi \\ s & \longmapsto & a_s^i \end{array} \quad (i = 1.2)$$

は cocycle である。実際、a_s が cocycle であることより $a_{st} = (a_t)^s a_s$ であるから、$a_{st} = (a_{st}^1\ a_{st}^2)$、$(a_t)^s \cdot a_s = (a_t^1\ a_t^2)^s \cdot (a_s^1$

$a_s^2) = ((a_t^1)^s\ (a_t^2)^s)(a_s^1\ a_s^2) = ((a_t^1)^s \cdot a_s^1,\ (a_t^2)^s \cdot a_s^2)$ より、$a_{st}^i = (a_t^i)^s \cdot a_s^i\ (i=1.2)$ が成り立つ。さらに、$a_s \underset{\text{cohomologous}}{\widetilde{\quad}} a_s'$ ならば、$a_s^i \underset{\text{cohomologous}}{\widetilde{\quad}} a_s'^i\ (i=1.2)$ である。実際、$a_s \underset{\text{cohomologous}}{\widetilde{\quad}} a_s' \Rightarrow {}^{\exists} c \in A_1 \times A_2$ s.t $a_s' = c^s a_s c^{-1} \Rightarrow c = (c^1, c^2)$ とすると、$(a_s'^1, a_s'^2) = (c^1, c^2)^s (a_s^1\ a_s^2)(c^1\ c^2)^{-1} = ((c^1)^s a_s^1 c^{1-1},\ (c^2)^s a_s^2 c^{2-1}) \Rightarrow a_s'^i = (c^i)^s a_s^i c^{i-1}\ (i=1.2)$。したがって次の写像 φ は、well-defined である。

$$\begin{array}{cccc} \varphi\ ; & H^1(G, A_1 \times A_2) & \longrightarrow & H^1(G, A_1) \times H^1(G, A_2) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \bar{a}_s = \overline{(a_s^1\ a_s^2)} & \longmapsto & \bar{a}_s^1 \times \bar{a}_s^2 \end{array}$$

<u>φ : injective</u>

2つの cocycle $a_s^i, b_s^i ; G \longrightarrow A_i$ が cohomologous であるとする。すなわち、${}^{\exists} c_i \in A_i$ s.t $a_s^i = c_i^s\ b_s^i\ c_i^{-1}$。このとき、cocycle $a_s = (a_s^1\ a_s^2)$, $b_s = (b_s^1\ b_s^2)$ は、$c = (c_1, c_2) \in A_1 \times A_2$ に対して、$a_s = c^s \cdot b_s c^{-1}$ を満たしているから cohomologous である。これは、φ が injective であることを示している。

<u>φ : surjective</u>

任意の cocycle $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & A \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ s & \longmapsto & a_s^i \end{array}$ $(i=1.2)$ に対して、$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & A_1 \times A_2 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ s & \longmapsto & a_s = (a_s^1\ a_s^2) \end{array}$

もまた cocyle である。実際、$a_{st} = (a_{st}^1, a_{st}^2) = ((a_t^1)^s a_s^1, (a_t^2)^s a_s^2) = (a_t^1, a_t^2)^s (a_s^1\ a_s^2) = (a_t)^s \cdot a_s$。これは、$\varphi$ が surjective であることを示している。　　　　（証明終）

1で述べたように、kを標数0の体、$\bar{k}$をkの代数閉包とする。またGがk-group、Yがk-varietyであるとする。GがYにk-morphism ρで作用し、YはG-homogeneous（すなわち、Yはsimple G-orbit）であるとき、$Gal(\bar{k}/k)$は、$Y(\bar{k})$に作用するから、0次コホモロジー$H^0(Gal(\bar{k}/k), Y(\bar{k}))$が定義される。同様に、$Gal(\bar{k}/k)$は、$G(\bar{k})$に作用するから、0次コホモロジー$H^0(Gal(\bar{k}/k), G(\bar{k}))$ 1次コホモロジー$H^1(Gal(\bar{k}/k), G(\bar{k}))$が定義される。これらをそれぞれ、$H^0(k, Y)$、$H^0(k, G)$、$H^1(k, G)$とかく。また[2]の記号にしたがい、$\xi \in Y(k)$に対して、$\widetilde{G}_\xi = \{g \in \widetilde{G} ; \rho(g)\xi = \xi\}$、$G_\xi = \rho(\widetilde{G}_\xi)$とすると、同様にして、$H^0(k, G_\xi)$、$H^1(k, G_\xi)$が定義される。

Lemma. 3. (Dedekind)

K/kを有限次Galois拡大、$G = Gal(K/k)$をそのGalois群とする。$\{a_s\}_{s\in G} \neq 0$ $(a_s \in K)$ならば、$\exists c \in K$ s.t. $\sum_{s\in G} c^s \cdot a_s \neq 0$となる。

Proof.

$c^{s_1} \cdot a_{s_1} + \cdots + c^{s_\ell} \cdot a_{s_\ell} = 0$ for $\forall c \in K$ $(\forall a_{s_i} \neq 0)$なるものがあるとして、その中でℓが最小のものを考える。$a_{s_1} \neq 0$、$c \neq 0$ならば、$c^{s_1} \cdot a_{s_1} \neq 0$だから$\ell \neq 1$すなわち$\ell \geqq 2$である。ここで、$s_1 \neq s_2$としてよい。このとき、$\exists x \in K$ s.t. $x^{s_1} \neq x^{s_2}$である。実際、$x^{s_1} = x^{s_2}$ for $\forall x \in K$とすると、$x^{s_2^{-1}s_1} = x$

for $^\forall x\in k$ となるから、$s_2^{-1}s_1=1$ すなわち $s_1=s_2$ となり矛盾である。ここで、$^\forall y\in k$ に対して、$y^{s_1}(x^{s_1}\cdot a_{s_1})+y^{s_2}(x^{s_2}\cdot a_{s_2})+\cdots+y^{s_\ell}(x^{s_\ell}\cdot a_{s_\ell})=0$、$y^{s_1}(x^{s_1}a_{s_1})+y^{s_2}(x^{s_1}\cdot a_{s_2})+\cdots+y^{s_\ell}(x^{s_1}\cdot a_{s_\ell})=0$ であるから、$y^{s_2}(x^{s_1}-x^{s_2})a_{s_2}+\cdots+y^{s_\ell}(x^{s_1}-x^{s_2})a_{s_\ell}=0$ for $^\forall y\in k$。$x^{s_1}\neq x^{s_2}$ であるからこれは ℓ の最小性に反する。（証明終）

Lemma. 4.

K/k を有限次 Galois 拡大. $G=Gal(K/k)$ をその Galois 群とする。$a_s\in GL_n(K)$ $(s\in G)$ に対して、$^\exists c\in GL_n(K)$ s.t. $b=\sum_{s\in G}c^s\cdot a_s\in GL_n(k)$ となる。

Proof.

まず、$x\in K^n$ に対して、$b(x)=\sum_{s\in G}x^s\cdot a_s$ とおくと、$K^n=\langle b(x);x\in K^n\rangle_K$ すなわち、ベクトル空間として K^n は $\{b(x);x\in K^n\}$ により生成されることを示す。$u;K^n\longrightarrow K$ を linear form で $u(b(x))=0$ for $^\forall x\in K^n$ を満たすものとする。このとき、$^\forall h\in K$ に対して. $0=u(b(hx))=u(\sum_{s\in G}(hx)^s\cdot a_s)=\sum_{s\in G}h^s u(x^s\cdot a_s)$。したがって、Lemma. 3. により $u(x^s a_s)=0$ for $^\forall s\in G$。よって、$^\forall y\in K^n$ に対して、$y=x^s\cdot a_s$ なる $x\in K$ が存在するから、$u(y)=u(x^s\cdot a_s)=0$ すなわち $u=0$。ここで、もし $\langle b(x);x\in K^n\rangle_K\subsetneqq K^n$ とすると、$\langle b(x);x\in K^n\rangle_K$ の basis を $\{v_1,\dots,v_r\}$ とするならば、$r\lneqq n$ であり、これを延長して、$\langle v_1,\dots v_r,v'_{r+1}\cdots v'_n\rangle_K=K^n$ とできるから、$u:K^n\to K$ を $u(v_k)=0$、$u(v'_j)=1$ $(k\leqq r,j\geqq k+$

1)とすれば、u は上の条件を満たす linear form となるが、$u \neq 0$ だから矛盾である。したがって $\langle b(x) ; x \in K^n \rangle_k = K^n$ である。よって、$\exists x_1, \cdots, x_m \in K^n$ s.t. $\{y_i = b(x_i)\}$ は k 上線型独立である。特に、$x_1, \cdots, x_m$ は k 上線型独立だから $C = (x_1, \cdots, x_m) \in GL_n(K)$ である。さらに、$b = \sum_{s \in G} C^s \cdot a_s = (\sum_{s \in G} x_1^s \cdot a_s, \cdots \sum_{s \in G} x_m^s \cdot a_s) = (b(x_1), \cdots, b(x_m)) = (y_1, \cdots, y_n) \in GL_n(k)$ である。（証明終）

Proposition.5.

K/k を有限次 Galois 拡大、$G = Gal(K/k)$ をその Galois 群とすると、$H^1(G, GL_n(K)) = \{1\}$ である。特に、$H^1(k, GL_n) = \{1\}$ である。

Proof.

任意の cocycle $a_s ; G \rightarrow GL_n(K)$ に対して、Lemma.4. により $\exists C \in GL_n(K)$ s.t. $b = \sum_{s \in G} C^s \cdot a_s \in GL_n(K)$ このとき $\forall s \in G$ に対して、$b^s = \sum_{t \in G} (C^t)^s \cdot (a_t)^s = (\sum_{t \in G} C^{st} \cdot a_{st}) a_s^{-1} = b \cdot a_s^{-1}$ すなわち、$a_s = b'^s \cdot b'^{-1}$ $(b' = b^{-1})$。したがって $a_s \underset{\text{cohomologous}}{\frown} 1$。これで、$H^1(G, GL_n(K)) = \{1\}$ が示された。次に、$\bar{k}/k$ の中間体 K で、K/k が有限次 Galois 拡大となるものを考える。上のことより、$H^1(Gal(K/k), GL_n(K)) = \{1\}$ であり、さらに、$Gal(\bar{k}/k) = \varprojlim_K Gal(K/k)$ (projective limit)、$GL_n(\bar{k}) = \varinjlim_K GL_n(K)$ (injective limit) であるから、$H^1(k, GL_n) = H^1(\varprojlim_K Gal(K/k), \varinjlim_K GL_n(K)) = \varinjlim_K H^1(Gal(K/k), GL_n(K)) = \varinjlim_K \{1\} = \{1\}$。（証明終）

Corollary.6.

K/k を有限次 Galois 拡大、$G = Gal(K/k)$ をその Galois 群とすると、$H^1(G, SL_n(K)) = \{1\}$ である。特に、$H^1(k, SL_n) = \{1\}$ である。

Proof.

$1 \quad SL_n(K) \quad GL_n(K) \quad K^\times \quad 1$ は exact であるから Proposition.1 により次もまた exact である。$H^0(G, GL_n(K)) \to H^0(G, K^\times) \xrightarrow{\delta} H^1(G, SL_n(K)) \to H^1(G, GL_n(K))$ ここで、Proposition.5. により $H^1(G, GL_n(K)) = \{1\}$ であるから δ は surjective。ここで、$H^0(G, GL_n(K)) = GL_n(k)$、$H^0(G, K^\times) = k^\times$ であるから、$\delta(k^\times) = H^1(G, SL_n(K))$。一方 $\det$; $GL_n(k) \to k^\times$ は、surjective だから $\delta(k^\times) = 1$。

したがって、$H^1(G, SL_n(K)) = \{1\}$。また、$H^1(k, SL_n) = \{1\}$ については、Proposition. 5. の Proof の後半と全く同様にして示される。　　　　（証明終）

$$1 \to G_\xi(\bar{k}) \to \underset{\substack{\cup \\ g}}{G(\bar{k})} \to \underset{\substack{\cup \\ g\cdot\xi}}{Y(\bar{k})} \to 1$$

は、pointed set として exact である。したがって、$H^0(k, Y) = Y(k)$、$H^0(k, G) = G(k)$、$H^0(k, G_\xi) = G_\xi(k)$ に注意して、Proposition.1. により次の (A) は exact である。

$$\text{(A)} \quad 1 \quad G_\xi(k) \quad G(k) \quad Y(k) \quad H^1(k, G_\xi) \quad H^1(k, G)$$

Proposition. 7.

$G(k)\backslash Y(k) \simeq \alpha^{-1}(1)$ (bijection)。但し、α は (A) における写像であり、$G(k)\backslash Y(k)$ は、$Y(k)$ 内の $G(k)$-orbits の集合である。

9

Proof.

exact sequence (A) により、$\delta(Y(k)) = \alpha^{-1}(1)$。したがって、$\delta(Y(k)) = G(k)\backslash Y(k)$ を示せばよい。すなわち、$y_1, y_2 \in Y(k)$ に対し、$\delta(y_1) = \delta(y_2) \Leftrightarrow y_1 \underset{G(k)}{\sim} y_2$ を示せばよい。但し、$y_1 \underset{G(k)}{\sim} y_2$ は、y_1 と y_2 とが同じ $G(k)$-orbit の元であることを示している。$\delta(y_1) = \delta(y_2)$ と、次とは同値である。$g_1^{-1}\xi = y_1$、$g_2^{-1}\xi = y_2$ なる $g_1, g_2 \in G(\bar{k})$ に対して、$g_1^{\sigma} g_1^{-1} \underset{\text{cohomologous}}{\sim} g_2^{\sigma} g_2^{-1}$ for $\forall \sigma \in Gal(\bar{k}/k)$。すなわち、$\exists g \in G_{\xi}(\bar{k})$ s.t. $g_1^{\sigma} g_1^{-1} = g^{\sigma}(g_2^{\sigma} g_2^{-1}) g^{-1}$ for $\forall \sigma \in Gal(\bar{k}/k)$. このとき、$g_1^{-1} g\, g_2 = (g_1^{-1} g\, g_2)^{\sigma}$ for $\forall \sigma \in Gal(\bar{k}/k)$。したがって、$h = g_1^{-1} g\, g_2$ とすると、$h \in G(k)$。この h に対して、$h y_2 = g_1^{-1} g\, g_2 y_2 = g_1^{-1} g \xi = g_1^{-1}\xi = y_1$。これは、$y_1 \underset{G(k)}{\sim} y_2$ であることを示している。

（証明終）

Proposition. 8.

次を仮定する。(1) $H^1(k, \tilde{G}) = \{1\}$、(2) $H^1(k, \tilde{G}_{\xi}) \longrightarrow H^1(k, G_{\xi})$ は surjective。このとき、$G(k)\backslash Y(k) \simeq H^1(k, G_{\xi})$。

Proof.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \tilde{G}_{\xi}(\bar{k}) & \longrightarrow & \tilde{G}(\bar{k}) & \longrightarrow & Y(\bar{k}) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow \rho & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & G_{\xi}(\bar{k}) & \longrightarrow & G(\bar{k}) & \longrightarrow & Y(\bar{k}) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

により induce される次の diagram

(D)は、可換で横2行はexactである。

(D)
$$\begin{tikzcd}
\tilde{G}(k) \arrow[r] \arrow[d] & Y(k) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(k, \tilde{G}_\xi) \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\beta"] & H^1(k, \tilde{G}) \arrow[d, "\beta_1"] \\
G(k) \arrow[r] & Y(k) \arrow[r] & H^1(k, G_\xi) \arrow[r, "\alpha"'] & H^1(k, G)
\end{tikzcd}$$

仮定（1）により、$\beta_1 \circ \alpha_1 = \alpha \circ \beta$ は trivial。すなわち、$(\alpha \circ \beta)(H^1(k, \tilde{G}_\xi)) = \{1\}$。仮定（2）により、$\beta$ は surjection であるから、$\beta(H^1(k, \tilde{G}_\xi)) = H^1(k, G_\xi)$。したがって、$\alpha(H^1(k, G_\xi)) = \{1\}$。すなわち、$\alpha^{-1}(1) = H^1(k, G_\xi)$。したがって、Proposition. 7. により、$G(k) \backslash Y(k) \simeq H^1(k, G_\xi)$ を得る。（証明終）

Proposition. 9.

次を仮定する。(1) $H^1(k, \tilde{G}) = \{1\}$、(2) $\ker \rho = \{1\}$。このとき、$G(k) \backslash Y(k) \simeq H^1(k, G_\xi)$。

Proof.

$\ker \rho = \{1\}$ であることより、$\tilde{G}_\xi \simeq G_\xi$ である。したがって、$H^1(k, \tilde{G}_\xi) \xrightarrow{\sim} H^1(k, G_\xi)$。よって、Proposition. 8. と全く同様にして、$G(k) \backslash Y(k) \simeq H^1(k, G_\xi)$ が示される。（証明終）

Proposition. 10.

$\tilde{G}_\xi = \{1\}$ ならば、$l = 1$。すなわち、Y は single $G(k)$-orbit である。

Proof.

$\tilde{G}_\xi = \{1\}$ により、$G_\xi = \rho(\tilde{G}_\xi) = \{1\}$。したがって、Proposition. 7. により、$G(k) \backslash Y(k) \simeq \alpha^{-1}(1) = \{1\}$, for α; $H^1(k, G_\xi) = \{1\} \longrightarrow H^1(k, G)$。（証明終）

3．Universally transitive open orbit を持つ 2-simple P.V. の例

例．1．

$(GL_1^2 \times SL_{2m+1},\ \Lambda_2 \oplus \Lambda_2)$

一般に、(G, ρ, X) に対して $\ell = 1$ ならば、$\tilde{\rho}(\tilde{G}) \supset \rho(G)$ なる $(\tilde{G}, \tilde{\rho}, X)$ に対しても $\ell = 1$ がいえるから、$(SL_{2m+1}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_2)$ に対して $\ell = 1$ であることを示せば十分である。まず、generic point $\xi = (X, Y) = \left(\begin{bmatrix} & & I_m \\ & & \\ -I_m & & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & & -I_m \\ & I_m & \end{bmatrix} \right)$ における $(SL_{2m+1}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_2)$ の isotropy subgroup G_ξ は次で与えられる。

$$G_\xi = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} I_{m+1} & 0 \\ \hline a_1, a_2, \cdots a_{m+1} & \\ a_2, a_3, \cdots a_{m+2} & I_m \\ \cdots & \\ a_m, a_{m+1} \cdots a_{2m} & \end{array} \right) \right\} \simeq G_a^{2m}$$

実際、$A \in G_\xi$ ならば $A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \overbrace{\quad}^{m+1} & \overbrace{\quad}^{m} \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline * & * \end{array} \right) \begin{matrix} \}m+1 \\ \}m \end{matrix} \end{array}$ なる形である。そして、

$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & x & 0 \\ \hline y & a & 0 \\ \hline B_1 & z & C \end{array} \right)$ とすると、$A \in G_\xi$ であることより、$AX{}^tA = X \iff y{}^tC = 0,\ A_1{}^tC = I_m,\ B_1{}^tC - C{}^tB_1 = 0 \iff y = 0,\ A_1 = {}^tC^{-1}$、$B_1{}^tC = C{}^tB_1$。次に、$A = \left(\begin{array}{c|c|c} b & x' & 0 \\ \hline y' & A_2 & 0 \\ \hline z' & B_2 & C \end{array} \right)$ とすると、$A \in G_\xi$ であることより、$AY{}^tA = Y \iff -x'C = 0,\ -A_2{}^tC = -I_m,\ C{}^tB_2 - B_2{}^tC = 0 \iff x' = 0,\ A_2 = {}^tC^{-1},\ B_2{}^tC = C{}^tB_2$。

さらに、$A = \left(\begin{array}{c|c} \cdots a_{ij} \cdots & 0 \\ \hline B & C \end{array}\right)$ とすると、$y=0$, $x'=0$ より、$a_{12} = a_{13} = \cdots = a_{1\,m+1} = 0$、$a_{m+1\,2} = \cdots = a_{m+1\,m+1} = 0$。したがって、$A_1$ 及び A_2 はそれぞれ次のようになる。

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \cdots 0 \\ a_{21} & \cdots \quad a_{2m} \\ & \cdots \\ a_{m1} & \cdots \quad a_{mm} \end{pmatrix} \text{、} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{22} \cdots & a_{2\,m+1} \\ & \cdots \\ 0 \cdots 0 & a_{m+1\,m+1} \end{pmatrix}$$

ところが、$A_1 = A_2\ (= {}^tC^{-1})$ だから、$a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{m+1\,m+1}$ ($=\alpha$)、$a_{ij} = 0$ ($i \neq j$) である。すなわち、$A = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\alpha & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha\end{matrix} & 0 \\ \hline B & \begin{matrix}\alpha^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha^{-1}\end{matrix} \end{array}\right)$。

ここで、$A \in SL_{2m+1}$ だから、$1 = \det A = \alpha^{m+1} \cdot (\alpha^{-1})^m = \alpha$。さらに、$B_1\,{}^tC = C\,{}^tB_1$、$B_2\,{}^tC = C\,{}^tB_2$ より、$B_1 = {}^tB_1$、$B_2 = {}^tB_2$。

したがって、$B = \begin{pmatrix} a_1, a_2, \cdots, a_{m+1} \\ a_2, a_3, \cdots, a_{m+2} \\ \cdots \\ a_m \quad \cdots \quad a_{2m} \end{pmatrix}$。以上により、$G_\xi \simeq G_a^{2m}$ が示された。ここで、Corollary. 6. より、$H^1(k, SL_{2m+1}) = \{1\}$。また、Schur lemma により $\ker \rho = \{1\}$。したがって、Proposition. 9. により、$G(k) \backslash Y(k) = H^1(k, G_\xi) = H^1(k, G_a^{2m}) = \{1\}$。よって、($SL_{2m+1}$, $\Lambda_2 \oplus \Lambda_2$) に対して $l=1$ がいえる。すなわち、($GL_1^2 \times SL_{2m+1}$, $\Lambda_2 \oplus \Lambda_2$) に対して $l=1$ である。

例. 2.

$(GL_1^2 \times SL_5 \times SL_2,\ \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + (\Lambda_1^* + \Lambda_1^*) \otimes 1)$

$(GL_1 \times GL_5 \times GL_2,\ 1 \otimes \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1^* \otimes 1 + \Lambda_1 \otimes \Lambda_1^* \otimes 1)$ の generic isotropy subgroup が $\{1\}$ であることが示されれば．Proposition. 10. により $\ell=1$ であることが示される。まず、表現空間 V は，$V=\{\{(X,Y),Z\}\ ;\ X,Y\in M_5$ ，${}^tX=-X$ ，${}^tY=-Y$, $Z\in M_{5,2}\}$ で与えられる。次に作用は，$\rho(g)x=\{(AX{}^tA,AY{}^tA){}^tB$ ，${}^tA^{-1}Z\begin{pmatrix}1&\\&\alpha\end{pmatrix}\}$ for $g=(\alpha,A,B)\in GL_1\times GL_5\times GL_2$ ．$x=\{(X,Y),Z\}\in V$ で与えられる。そして，generic point x_0 は，次で与えられる。

$$x_0=\left\{\left(\left(\begin{array}{c|c|c} & & I_2 \\ \hline & & \\ \hline -I_2 & & \begin{matrix} & -1\\ 1 & \end{matrix}\end{array}\right),\ \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & & -I_2 \\ \hline & I_2 & \begin{matrix} & -1\\ 1 & \end{matrix}\end{array}\right)\right),\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline I_2\end{array}\right)\right\}$$

$(\alpha,A,B)\in\widetilde{G}_{\xi}$ とすると，まず ${}^tA^{-1}Z_0\begin{pmatrix}1&\\&\alpha\end{pmatrix}=Z_0$ ，$Z_0=\left(\dfrac{0}{I_2}\right)$ であるから，$A=\left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & \begin{matrix}1&\\&\alpha\end{matrix}\end{array}\right)$ なる形である。

ここで，$A=\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & a_{15} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} & a_{24}, & a_{25} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} & a_{34}, & a_{35} \\ \hline & 0 & & 1 & \\ & & & & \alpha \end{array}\right)$ ，$B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$ とすると，

$(AX_0{}^tA\ ,\ AY_0{}^tA){}^tB=(X_0,Y_0)$ ，$X_0=\left(\begin{array}{c|c|c} & & I_2 \\ \hline & & \\ \hline -I_2 & & \begin{matrix} & -1\\ 1 & \end{matrix}\end{array}\right)$ $Y_0=\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & & -I_2 \\ \hline & I_2 & \begin{matrix} & -1\\ 1 & \end{matrix}\end{array}\right)$

より，(1, 4) (1. 5) (2. 4) (2. 5) (3. 4) (3. 5) (4, 5) ―成分を比較して，次の方程式を得る。$b_{12}=\alpha^{-1}-b_{11}$, $b_{21}=\alpha^{-1}-b_{22}$, $a_{12}=c-a_{11}$ ，$a_{13}=a_{11}-c$ ，$a_{14}=c-a_{11}$, $a_{15}=\alpha b_{22}c-a_{11}$, $a_{21}=c-a_{22}$, $a_{23}=c\alpha^{-1}-a_{22}$, $a_{24}=a_{22}-b_{22}c$, $a_{25}=a_{22}-\alpha b_{11}c$,

$a_{31} = a_{33} - c\alpha^{-1}$、$a_{32} = c\alpha^{-1} - a_{33}$. $a_{34} = b_{11}c - a_{33}$. $a_{35} = c\alpha^{-1} - a_{33}$. 但し、$c(b_{11} + b_{22} - \alpha^{-1}) = 1$ である。次に、(1, 2) (1, 3) (2, 3)-成分を比較して、次の結果を得る。$a_{11} = a_{22} = a_{33} = b_{11} = b_{22} = c = \alpha = 1$。よって、$A = I_5$. $B = I_2$、$\alpha = 1$。すなわち、$\tilde{G}_\xi = \{1\}$。したがって、$(GL_1^2 \times SL_5 \times SL_2$、$\Lambda_2 \otimes 1 + (\Lambda_1^* + \Lambda_1^*) \otimes 1)$ に対して $\ell = 1$ である。

参考文献

[1]. J. Igusa ; On functional equation of complex powers. Invent math 85 (1986)、1-29

[2]. J. Igusa ; On a certain class of prehomogeneous vector spaces. to appear in Journal of Algebra

[3]. T. Kimura. S. kasai. and H. Hosokawa ; Universal transitivity of simple and 2-simple prehomogeneous vector spaces. preprint (1986)