数理解析研究所講究録
第633巻 1987年 40-56

s-cobordism theorems for S^1-manifolds

阪大理　川久保勝夫 (Katsuo Kawakubo)

s-cobordism theorem は，微分位相幾何学において，基本定理の一つであると言ってよかろう。コンパクト・リー群 G が作用する場合への拡張は [2] で与えられた。この拡張された G-s-cobordism theorem においては，各内部分群 H の不動点集合の次元の間に，ギャップがあるという仮定のもとに示された。

一方そのギャップの仮定を取り去ると，反例が存在することを分った [10]。

この talk では コンパクト・リー群として S^1 を考え，作用の仕方を"半自由"(semi-free) と仮定すると，次元のギャップなしに s-cobordism theorem が成り立つことを示す。詳しい証明は [15] で与える。

定理を述べるために準備をしよう。

W をコンパクトな S^1 多様体とする。W の境界を ∂W と書き，二つの閉多様体 X，Y の disjoint union

$$\partial W = X \amalg Y$$

とする。

今二つの包含写像

$$i_X : X \hookrightarrow W \quad , \quad i_Y : Y \hookrightarrow W$$

が S^1-homotopy equivalence であるとする。このとき，triple

$$(W ; X , Y)$$

のことを S^1-h-cobordism と呼ぶことにしよう。

このとき，松本－塩田の定義により[11]，Illman [5] の意味の equivariant Whitehead torsion $\tau_{S^1}(W, X)$ が定義される。

この様に定義された torsion が消える時，つまり

$$\tau_{S^1}(W, X) = 0$$

のとき，triple $(W ; X, Y)$ を S^1-s-cobordism と呼ぶことにする。

さて，S^1-action が半自由（semi-free）とは各点のアイソトロピー群が，単位群 $\{e\}$ か又は全体 S^1 になるときに言う。

ここでアイソトロピー群 G_x $(x \in W)$ とは，一般に

$$G_x = \{ g \in G \mid gx = x \}$$

で与えられる G の部分群のことを言う。（今は $G = S^1$）

準備が出来たので定理を述べよう。

Theorem. $(W; X, Y)$ を S^1-s-cobordism とする。W 上の作用は半自由で，不動点集合の各 component の次元が5以上であるとする。そのとき

$$W \cong X \times I$$

が成り立つ。特に

$$X \cong Y$$

が成り立つ。

ここで $\cong$ は S^1-diffeomorphism を表わし，I は internal $[0, 1]$ で trivial action をもつものである。

§1 証明の idea

詳しい証明を与える前に，証明の idea を述べることにしよう。

そのためにまず G-s-cobordism theorem の証明の idea を振り返ってみておくことにする。

まず G-manifold W のうまい分解を考え，この分解に従って inductive に証明するというものである。

そのとき，不動点集合の次元に関するギャップの仮定は２つの理由で用いられる。

その一つは，G-deformation retractions の性質がこの分解の各々に遺伝することを示すためであり，もう一つは同変 Whitehead torsion の消滅という性質が，やはりこの分解の各々に遺伝することを示すためである。

このギャップの仮定はテクニカルに必要なだけでなく，もしこの仮定がないと G-s-cobordism theorem の反例が構成される。そこでは G-deformation retract の遺伝性が否定されることから導かれる。

今我々が考えている場合は，semi-free S^1-manifold の不動点集合に沿って blow up することによって，上で述べた二つの性質が遺伝することを示す。

つまり codim 2 の問題は semi-free S^1-manifold の場合は blow up することによって解消されるのである。

§2 軌道空間の deformation retractions の excision.

G空間 X に対して，X/G で軌道空間，X^G で不動点集合を表わすことにする。

$(W; X, Y)$ を S^1-h-cobordism で W は semi-free S^1-manifold であるとする。

この S^1-manifold W の不動点集合を

$$W^{S^1} = W_a^{S^1} \cup W_b^{S^1}$$

というように分解する。但しここで $W_a^{S^1}$ (resp. $W_b^{S^1}$) は codim が 2 より大きい (resp. 丁度 2) の不動点集合のコンポーネントの和集合である。

その時，次の様に記号をおく，

$$X_a^{S^1} = W_a^{S^1} \cap X$$

$$X_b^{S^1} = W_b^{S^1} \cap X.$$

明らかに $X_a^{S^1}$ (resp. $X_b^{S^1}$) は $W_a^{S^1}$ (resp. $W_b^{S^1}$) の deformation retract である。

$W_a^{S^1}$ の W における法バンドルを ν_a と書くことにし，ν_a と $W_a^{S^1}$ の W における S^1-invariant tubular neighborhood とを同一視することにする。

今一つ ν_a 上の S^1-invariant Riemannian metric $\langle\ ,\ \rangle$ を固定する。この metric に関して，

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \qquad \text{for } v \in \nu_a$$

とおき，

$$\nu_a(1) = \{\, v \in \nu_a \mid \|v\| \leq 1 \,\},$$

$$S\nu_a(1) = \{ v \in \nu_a \mid \|v\| = 1 \},$$
$$\mathring{\nu}_a(1) = \{ v \in \nu_a \mid \|v\| < 1 \}$$

とおく。このとき，上の同一視のもとに，

$$W_1 = W - \mathring{\nu}_a(1)$$
$$X_1 = W_1 \cap X$$

とおく。

W_1 はコンパクト S^1-manifold で角をもち，X_1 はコンパクト S^1-manifold で境界をもつ。その時，我々は次の lemma を得る。

Lemma　X_1/S^1 は W_1/S^1 の deformation retract である。

証明の outline.　ν_a は semi-free S^1-action の不動点集合の法バンドルであるから，ν_a は S^1 作用がスカラー積になるような複素ベクター・バンドルの構造が入る。

$W_{a\mu}^{S^1}$ で $W_a^{S^1}$ の各成分を表わし，

$$\nu_{a\mu} = \nu_a \mid W_{a\mu}^{S^1}$$
$$X_{a\mu}^{S^1} = W_{a\mu}^{S^1} \cap X$$

とおく。

$\nu_{a\mu}$ に同伴する複素射影空間バンドルを

$$\pi : \mathbb{C}P(\nu_{a\mu}) \longrightarrow W^{S^1}_{a\mu}$$

とする。このバンドルのファイバーは複素射影空間 $\mathbb{C}P^m$ $(m \geqq 1)$ であって，$\mathbb{C}P(\nu_{a\mu})$ は自然に軌道空間 $S\nu_{a\mu}(1)/S^1$ と同一視される。

他方，次のファイバー・バンドル

$$\pi : \nu_{a\mu}(1)/S^1 \longrightarrow W^{S^1}_{a\mu}$$

を考えられる。このバンドルのファイバーは複素射影空間 $\mathbb{C}P^m$ 上の cone $C\mathbb{C}P^m$ に他ならない。

この二つのバンドルより，ホモトピー完全列と inclusions より誘導される準同型写像からなる次の可換図式が得られる。

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & \pi_1(\mathbb{C}P^m) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{C}P(\nu_{a\mu})) & \longrightarrow & \pi_1(W^{S^1}_{a\mu}) & \longrightarrow & \pi_0(\mathbb{C}P^m) & \longrightarrow \\
& \downarrow & & \downarrow & & \| & & \downarrow & \\
\longrightarrow & \pi_1(C\mathbb{C}P^m) & \longrightarrow & \pi_1(\nu_{a\mu}(1)/S^1) & \longrightarrow & \pi_1(W^{S^1}_{a\mu}) & \longrightarrow & \pi_0(C\mathbb{C}P^m) & \longrightarrow
\end{array}$$

$$\pi_1(\mathbb{C}P^m) \cong \pi_0(\mathbb{C}P^m) \cong \pi_1(C\mathbb{C}P^m) \cong \pi_0(C\mathbb{C}P^m) \cong \{1\}$$

であるから，次の同型が成り立つ：

$$\pi_1(\mathbb{C}P(\nu_{a\mu})) \cong \pi_1(\nu_{a\mu}(1)/S^1) \cong \pi_1(W^{S^1}_{a\mu}) .$$

さて次の分解を考えよう。

$$W/S^1 = (W - \mathring{\nu}_{a\mu}(1))/S^1 \cup \nu_{a\mu}(1)/S^1 .$$

この分解の共通部分は

$$(W - \mathring{\nu}_{a\mu}(1))/S^1 \cap \nu_{a\mu}(1)/S^1 = S\nu_{a\mu}(1)/S^1 = \mathbb{C}P(\nu_{a\mu})$$

であるから，van Kampen の定理によって，

$$\pi_1(W/S^1) \cong \pi_1((W - \nu_{a\mu}(1))/S^1)$$

が導かれる。

この論法を続けることによって

$$\pi_1(W/S^1) \cong \pi_1(W_1/S^1)$$

が結論づけられる。

全く同様に

$$\pi_1(X/S^1) \cong \pi_1(X_1/S^1)$$

が成り立つ。

仮定より X は W と S^1-homotopy equivalent であるから，

$$\pi_1(X/S^1) \cong \pi_1(W/S^1)$$

である。

以上の結果を全部まとめると，

$$\pi_1(X_1/S^1) \cong \pi_1(W_1/S^1)$$

が示される。

さて，次に W/S^1 上の local cofficients の system $\mathcal{S}$ を任意に与えよう。その時，次の可換図式が得られる。

$$\begin{array}{ccccccc}
\to H_*(X_1/S^1 ; \mathcal{S}) & \to & H_*(X/S^1 ; \mathcal{S}) & \to & H_*(X/S^1, X_1/S^1 : \mathcal{S}) & \to \\
\downarrow \psi_1 & & \downarrow \psi_2 & & \downarrow \psi_3 & \\
\to H_*(W_1/S^1 ; \mathcal{S}) & \to & H_*(W/S^1 ; \mathcal{S}) & \to & H_*(W/S^1, W_1/S^1 ; \mathcal{S}) & \to
\end{array}$$

水平の列は完全であり，仮定より ψ_2 は同型である.
ここで excision 同型定理と five lemma を使って ψ_3 が同型であることが示される。
従って再び five lemma によって ψ_1 も同型であることが分る。
以上の結果から Whitehead [14] の定理を用いると，包含写像

$$X_1/S^1 \to W_1/S^1$$

は homotopy equivalent であることが分る。従って X_1/S^1 は W_1/S^1 の deformation retract である。
以上で Lemma の証明の outline は終る。

§3 Codim 2 の不動点集合に沿う blowing up

$W_b^{S^1}$ の W_1 における法バンドルを ν_b とする。
S^1 不変な Riemannian metric を適当にとり，$\nu_b(1)$, $S\nu_b(1)$, $\mathring{\nu}_b(1)$ 等を以前の如く定義する。そして

$$W_2 = W_1 - \mathring{\nu}_b(1)$$

$$X_2 = W_2 \cap X_1$$

とおく。W_2 (resp X_2) はコンパクトな S^1-manifold で角 (resp. 境界) をもつ.

この時，次が成り立つ．

Lemma　X_2 は W_2 の S^1-deformation retract である。

証明の outline.

まず第一に $W_b^{S^1}$ に沿って W_1 を blow up する．

S^1-manifold W_3 を

$$W_3 = W_2 \cup (S\nu_b(1) \times I)$$

によって定義する。ここで次の同一視によって張り合せた。

$$x \in S\nu_b(1) \subset W_2 \longleftrightarrow (x, 1) \in S\nu_b(1) \times I$$

W_3 上の free S^1-action は W_2 と $S\nu_b(1)$ 上の action から自然に導入される。従って軌道空間 W_3/S^1 は自然に smooth structure をもつ．

このとき S^1-写像

$$p : W_3 = W_2 \cup (S\nu_b(1) \times I) \longrightarrow W_1 = W_2 \cup \nu_b(1)$$

を

$$p \mid W_2 = id \mid W_2$$

$$p(x, t) = tx \qquad \text{for} \quad x \in S\nu_b(1),\ t \in I$$

によって定義する，

$W_b^{S^1}$ の W_1 における codim は 2 であるから，又

S^1 は $W_1 - W_0^{S^1}$ 上に free に act するから、軌道空間 W_1/S^1 は角をもつ smooth manifold の構造をもち、上の写像 p は diffeomorphism

$$p/S^1 : W_3/S^1 \longrightarrow W_1/S^1$$

を誘導する。

明らかに S^1-diffeomorphism

$$W_2 \cong W_3$$

があるから、次の diffeomorphisms を得る。

$$W_2/S^1 \cong W_3/S^1 \cong W_1/S^1$$

全く同様に diffeomorphism

$$X_2/S^1 \cong X_1/S^1$$

が存在する。

故に前節の Lemma を用いると、X_2/S^1 は W_2/S^1 の deformation retract であることが分る。

ここで、次の principal S^1-bundles と bundle map を考えよう。

$$\begin{tikzcd}
X_2 \arrow[r] \arrow[d] & W_2 \arrow[d] \\
X_2/S^1 \arrow[r] & W_2/S^1
\end{tikzcd}$$

ファイバー・バンドルのホモトピー性質より、X_2 は W_2 の S^1-deformation retract であることが分る。

§4 同変 Whitehead torsions の消滅の遺伝性

G-s-cobordism theorems の証明においては、同変 Whitehead torsions の消滅が遺伝することを次元のギャップを用いて示した。しかし今はその論法は使えないので、全く違った方法で示さなければならない。

Lemma として $\tau_{S^1}(W, X)=0$ ならば $\tau(W_1/S^1, X_1/S^1)=0$ が成り立つ。ここで $\tau(\ ,\ )$ は古典的 Whitehead torsion を表わす。

証明の idea. 同変 Whitehead torsion の定義から $\tau_{S^1}(W, X)=0$ は

$$\tau(W/S^1, X/S^1)=0$$

を意味する。

ここで Whitehead torsions の sum theorem [3], ファイバー・バンドルの全空間の Whitehead torsions [1], 基本群の同型写像は Whitehead group の同型を導く、等の性質を用いることによって Lemma の証明が与えられる。

詳しくは [15] を見よ。

§5 semi-free S^1-manifolds の s-cobordism theorem.

$(W; X, Y)$ を S^1-s-cobordism とする. ここで W 上の S^1-action は semi-free とする. 又不動点集合 W^{S^1} の各成分の次元は5より大きいとする。

仮定 $\tau_{S^1}(W; X) = 0$ は, ただちに

$$\tau(W^{S^1}, X^{S^1}) = 0$$

を意味する。古典的 s-cobordism theorem を適用すると, diffeomorphism

$$W^{S^1} \cong X^{S^1} \times I \qquad \text{rel } X^{S^1}$$

を得る。

S^1 ベクター・バンドルのホモトピー性質より, S^1 ベクター・バンドルの同型

$$\nu_a \cong (\nu_a \mid X_a^{S^1}) \times I$$

$$\nu_b \cong (\nu_b \mid X_b^{S^1}) \times I$$

が導かれる。従って S^1-diffeomorphisms

$$(*) \quad \begin{cases} \nu_a(1) \cong (\nu_a \mid X_a^{S^1})(1) \times I \\ \nu_b(1) \cong (\nu_b \mid X_b^{S^1})(1) \times I \\ S\nu_a(1) \cong S(\nu_a \mid X_a^{S^1})(1) \times I \\ S\nu_b(1) \cong S(\nu_b \mid X_b^{S^1})(1) \times I \end{cases}$$

がある。

特に，次の軌道空間の diffeomorphism が得られる．

$$(**)\ \begin{cases} S\nu_a(1)/S^1 \cong S(\nu_a|X_a^{S^1})(1)/S^1 \times I \\ S\nu_b(1)/S^1 \cong S(\nu_b|X_b^{S^1})(1)/S^1 \times I \end{cases}$$

§4 の Lemma によると

$$\tau(W_1/S^1,\ X_1/S^1)=0$$

であった。

§3 の考察により，容易に

$$\tau(W_2/S^1,\ X_2/S^1)=0$$

であることが分る．

W_2/S^1 は smooth manifold なので，古典的 s-cobordism theorem によって，diffeomorphism

$$W_2/S^1 \cong X_2/S^1 \times I$$

が得られる。しかも上の diffeomorphisms (**) の拡張であるようにとれる．

さて，

$$W_2 \longrightarrow W_2/S^1$$

は principal S^1-bundle であるから，S^1-diffeomorphism

$$W_2 \cong X_2 \times I \qquad \mathrm{rel}\ X_2$$

であって，上の S^1-diffeomorphism (*) の拡張であるものが存在する。

こうして以上をまとめることによって

求める S^1-diffeomorphism

$$W \cong X \times I \quad \text{rel } X$$

が得られた。

以上で定理の証明の outline は終る。

§6 A concluding remark

semi-free S^1-manifold という仮定のもとに定理を証明したが，この仮定は取り除くことは出来ない。この仮定がないと成立しない例が構成されるのである。

このことに関しては後の機会にまわすことにしよう。

References

[1] D. R. Anderson, The Whitehead torsion of the total space of a fiber bundle, Topology 11(1972), 179-194.

[2] S. Araki and K. Kawakubo, Equivariant s-cobordism theorems (to appear).

[3] M. Cohen, A course in simple homotopy theory, Graduate Texts in Math., 10, Springer-Verlag, 1973.

[4] W. Y. Hsiang, On the unknottedness of the fixed point set of differentiable circle group action on spheres: P. A. Smith Conjecture, Bull. A. M. S., 70(1965), 678-680.

[5] S. Illman, Whitehead torsion and group actions, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 588(1974), 199-220.

[6] S. Illman, Smooth equivariant triangulations of G-manifolds for G a finite group, Math. Ann., 233(1978), 199-220.

[7] S. Illman, Actions of compact Lie groups and equivariant Whitehead torsion, to appear in Osaka J. Math..

[8] K.Kawakubo, Compact Lie group actions and fiber homotopy type, J. Math. Soc. Japan, 33(1981), 295-321.

[9] K. Kawakubo, ΛG-structure of G-vector bundles and groups $KO_G(X)$, $KSp_G(X)$ and $J_G(X)$, Osaka J. Math., 19(1982), 695-715.

[10] K. Kawakubo, Stable equivalence of G-manifolds, Homotopy Theory and Related Topics, Advanced Stud. in Pure Math., 9(1986), 27-40.

[11] T. Matumoto and M. Shiota, Unique triangulation of the orbit space of a differentiable transformation group and its applications, (to appear).

[12] J. Milnor, Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct, Ann. of Math., 74(1961), 575-590.

[13] J. B. Wagoner, Diffeomorphisms, K_2, and analytic torsion, Proc. symp. in Pure Math., A. M. S., 32(1978), 23-33.

[14] J. H. C. Whitehead, Combinatorial homotopy, I, Bull. A. M. S., 55(1949), 213-245.

[15] K. Kawakubo, An s-cobordism theorem for semi-free S^1-manifolds (to appear).