数理解析研究所講究録
第 634 巻 1987 年 18-24


# 鏡映群の基本不変式のヤコビアンについての一注意

国際基督教大学（ICU）寺尾宏明

$G$を有限ユニタリ鏡映群とし、$\ell$次元ユニタリ空間$V$に作用しているとする。$S = S(V^*)$ （$V$の双対空間$V^*$の対称代数）の中で、$G$不変なもの全体を$S^G$と書くと、Chevalleyの定理より、

$$S^G = \mathbb{C}[f_1, \cdots, f_\ell]$$

となるような同次多項式 $f_1, \cdots, f_\ell$ の存在が知られている。これらの $f_1, \cdots, f_\ell$ を$G$の基本不変式という。さて、1960年に、R. Steinberg は、次のことを示した。

定理（Steinberg [3]）. $f_1, \cdots, f_\ell$のJacobianは、$c \cdot \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H - 1}$ に等しい。 $(c \in \mathbb{C}^\times)$

ただし、$\mathcal{A}$ は、$G$の鏡映面のすべての集合、$\alpha_H \in V^*$は、$\ker(\alpha_H) = H$なる元、$e_H := \#\{g \in G \mid g$ は$H$上で恒等

写像}とする。

特に、Gに属する鏡映の位数がすべて2ならば、各$e_H$は2だから（例えば、GがCoxeter群ならそうなっている）、$\prod_{H\in\mathcal{A}}\alpha_H^{e_H-1}=\prod_{H\in\mathcal{A}}\alpha_H$となり、Jacobianが丁度、鏡映面全体のなす因子の被約定義多項式を与えていることになる。

Steinbergの原証明は、Molien seriesを用いる群論的なものであるが、ここでは、イデヤル論的な新証明を与えることを目標としたい。keyになる定理は、より一般的な形で、Wiebe [4; Satz 2], K. Saito [1; 3.4], Scheja-Storch [2; 1.2]によって示されているが、ここでは、我々に必要な形でのみ述べて、証明を付ける。

定理. $K$：体，$S=K[x_1,\cdots,x_\ell]$：多項式環
$f_1,\cdots,f_\ell\in S$が、同次多項式で（degree > 0）かつ、正則列であるとする。このとき、$f_1,\cdots,f_\ell$のJacobian $J$は、イデヤル$(f_1,\cdots,f_\ell)S$に属さない。

証明. $(f_2,\cdots,f_\ell)S$の素因子の高さは、すべて$(\ell-1)$だから、

$(x_1,\cdots,x_\ell)S \not\subseteq \bigcup \mathfrak{p}$ （$\bigcup$は$(f_2,\cdots,f_\ell)$の素

因子上を動く)が成立している。従って、$\exists x_i$ s.t.
$x_i \notin \bigcup \wp$. $\Rightarrow$ $(f_2, \cdots, f_\ell) : (x_i) = (f_2, \cdots, f_\ell)$.
簡単のため、$i=1$ として、

$$(f_2, \cdots, f_\ell) : (x_1) = (f_2, \cdots, f_\ell)$$

としてよいから、$x_1, f_2, \cdots, f_\ell$ が、正則列になる。

以下、定理を $\ell$ に関する帰納法で示す。

$\ell = 1$ : 明らか。( $f_1 = x_1^n$, $J = n x_1^{n-1} \notin (x_1^n)$ )

$\ell > 1$ : $f \in K[x_1, \cdots, x_\ell]$ に対して

$\bar{f} := f(0, x_2, \cdots, x_\ell) \in K[x_2, \cdots, x_\ell]$ と書く。すると、
$\bar{f}_2, \cdots, \bar{f}_\ell$ は、$K[x_2, \cdots, x_\ell]$ 内の正則列になる。帰納法の仮定から、

$$\frac{\partial(\bar{f}_2, \cdots, \bar{f}_\ell)}{\partial(x_2, \cdots, x_\ell)} \notin (\bar{f}_2, \cdots, \bar{f}_\ell)$$

これより、

$$(*) \qquad J_1 := \frac{\partial(f_2, \cdots, f_\ell)}{\partial(x_2, \cdots, x_\ell)} \notin (x_1, f_2, \cdots, f_\ell)$$

を得る。一方、Euler 等式より、

$$\sum_i x_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = (\deg f_j) f_j \qquad (1 \leq j \leq \ell).$$

Cramer's rule より、

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} (\deg f_1) f_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \cdots & \partial f_1/\partial x_l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\deg f_l) f_l & \partial f_l/\partial x_2 & \cdots & \partial f_l/\partial x_l \end{vmatrix}}{J}$$

従って、

$$(**) \qquad x_1 J \equiv (\deg f_1) f_1 J_1 \mod (f_2, \ldots, f_l).$$

以下、$\equiv$ はすべて、$\mathrm{mod}\ (f_2, \ldots, f_l)$ の意味で用いる。

もし、$J \in (f_1, \ldots, f_l)$ と仮定すると、$\exists t \in S$ s.t.

$$J \equiv t f_1$$
$$\Rightarrow x_1 J \equiv t x_1 f_1$$
$$\Rightarrow (\deg f_1) f_1 J_1 \equiv t_1 x_1 f_1 \qquad (\text{by } (**))$$
$$\Rightarrow (\deg f_1) J_1 \equiv t_1 x_1 \qquad ((f_2, \ldots, f_l) : (f_1) = (f_2, \ldots, f_l))$$
$$\Rightarrow J_1 \in (x_1, f_2, \ldots, f_l).$$

これは、(*) に矛盾する。 □

注意. この定理の幾何学的意味については、齋藤[1]の中で、広中による指摘がある。 $F := (f_1, \ldots, f_l) : \mathbb{C}^l \to \mathbb{C}^l$ なる open map による $l$-form $\frac{dy_1}{y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dy_l}{y_l}$ の引き戻しの適当な $l$ サイクルによる積分がゼロにならないというのが

その大意である。

Steinberg の定理の新証明のためには、あとは、$J$ と、$\prod_{H\in\mathcal{A}} \alpha_H^{e_H-1}$ との関係を調べる必要がある。

補題. $J \in (\prod_{H\in\mathcal{A}} \alpha_H^{e_H-1})\cdot\mathbb{C}[f_1,\cdots,f_\ell]$.

証明. (1) $g\in G$ を鏡映とし、その鏡映面が $x_1=0$ で定義されるように、$V^*$ の正規直交底 $x_1,\cdots,x_\ell$ を取る。$x_1\in V^*$ への $g$ の作用は、$g(x_1)=(\det g)^{-1}x_1$ で与えられる。$x_1=0$ 以外の鏡映面たちについては、$g$ によって、それらの定義式の置換が引き起こされるから、結局、

$$g(\textstyle\prod_{H\in\mathcal{A}}\alpha_H)=(\det g)^{-1}(\prod_{H\in\mathcal{A}}\alpha_H)$$

を得る。$e_H$ の定義より、$\prod_{H\in\mathcal{A}}\alpha_H^{e_H}$ は $G$ 不変だから、

$$(*)\qquad g(\textstyle\prod_{H\in\mathcal{A}}\alpha_H^{e_H-1})=(\det g)(\prod_{H\in\mathcal{A}}\alpha_H^{e_H-1})$$

を得る。

(2) $J=\dfrac{\partial(f_1,\cdots,f_\ell)}{\partial(x_1,\cdots,x_\ell)}$ は、$g\in G$ によって、

$$(**)\qquad g(J)=(\det g)J$$

と変換されることは容易にわかる。

(3) $x_1=0$ を鏡映面，$g\in G$ をその回りの位数 $e$ の鏡映とする．$f\in\mathbb{C}[f_1,\cdots,f_\ell]$ は，$g$ 不変だから，$f$ は，$x_1^e, x_2, \cdots, x_\ell$ に関する多項式になる。従って，$\partial f_1/\partial x_1, \cdots, \partial f_\ell/\partial x_1$ 等はすべて $x_1^{e-1}$ で割り切れる．よって，$J$ も $x_1^{e-1}$ で割り切れる。結局，$J$ は，$\prod_{H\in\mathcal{A}} \alpha_H^{e_H-1}$ で割り切れる。

(4) $(*)$ と $(**)$ は，$J$ と $\prod_{H\in\mathcal{A}}\alpha_H^{e_H-1}$ とが同じ変換法則を満たすことを示している。そして，(3) より，$J$ は $\prod_{H\in\mathcal{A}}\alpha_H^{e_H-1}$ で割り切れ，その商は $G$ 不変である．□

先の定理から，$J\notin(f_1,\cdots,f_\ell)$ であるから，上の補題より，Steinberg の定理を得る．

問題．$S=\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_\ell]\ (=S(V^*))$ 上の $G$ 不変な derivations を，$(\mathrm{Der}_S)^G$ と書くとき，その基底を

$$\theta_i=\sum_j p_{ij}(\partial/\partial x_j) \qquad (1\le i\le \ell)$$

とするとき，$\det[p_{ij}]\notin(f_1,\cdots,f_\ell)$ が，上記の如くに示せないか？（この問題で，$\mathrm{Der}_S\to\Omega_S^1$，$\partial/\partial x_j\to dx_j$ と，dualize すると，丁度，先の定理の主張になる．）

## References

[1] Saito, K.: Einfach-elliptische Singularitäten. Inventiones math. 23, 289–325 (1974).

[2] Scheja, G. and Storch, U.: Über Spurfunktionen bei vollständigen Durchschnitten. J. Reine Angew. Math. 278/279, 174–190 (1975).

[3] Steinberg, R.: Invariants of finite reflection groups. Canad. J. Math. 12, 616–618 (1960).

[4] Wiebe, H.: Über homologische Invarianten lokaler Ringe. Math. Ann. 179, 257–274 (1969).