数理解析研究所講究録
第634巻 1987年 61-71

孤立特異点に関連して現われる斎藤微分方程式系の解について（A型とD型の場合）

東北大 理　安倍 太一（Taichi Anbai）

序

A_μ型に即しつつ概略をのべる。扱う関数は $f(x_0, \cdots, x_n) = x_0^{\mu+1} + x_1^2 + \cdots + x_n^2$ である。その universal unfolding $F(\underline{x}, t_1, \cdots, t_\mu) = t_1 + t_2 x_0 + \cdots + t_\mu x_0^{\mu-1} + f(\underline{x})$ の主要部 $t_1 + t_2 X + \cdots + t_\mu X^{\mu-1} + X^{\mu+1}$ を $\mathcal{V}(X)$ とおく時 $\mathcal{V}(X) = 0$ の根 $\beta_0, \cdots, \beta_\mu$ は斎藤微分方程式系

$$\begin{cases} Q_{n/2}\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) u = 0 , & i = 1, \cdots, \mu , \\ P\left(\frac{\partial}{\partial t_i}, \frac{\partial}{\partial t_j}\right) u = 0 , & i, j = 1, \cdots, \mu \end{cases}$$

の解となる。まずこの事を確認する。$Q_{n/2}$, P の具体的な形は次の通りである。

$$\begin{cases} Q_k\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) = w\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)\frac{\partial}{\partial t_1} - N\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) + (k+1)\frac{\partial}{\partial t_i} , & k \in \mathbb{C} , \\ P\left(\frac{\partial}{\partial t_i}, \frac{\partial}{\partial t_j}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial t_i}}\frac{\partial}{\partial t_j} - \left(\frac{\partial}{\partial t_i} * \frac{\partial}{\partial t_j}\right)\frac{\partial}{\partial t_1} & . \end{cases}$$

式にあらわれる記号は、写像 $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{\mu-1} \underset{\text{open}}{\supset} X \ni (x_0, \cdots, x_n, t_2, \cdots, t_\mu) \xmapsto{\varphi} (F_1(\underline{x}, t_2, \cdots, t_\mu), t_2, \cdots, t_\mu) \in S \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{C}^\mu$　$(F = t_1 - F_1)$ の Gauß–Manin 系内で primitive form ζ を選んだ上で斎藤氏により定義されたものである。詳しくは本文でふれる。

上の結果は φ の discriminant set D の補集合 $S\setminus D$ 上で斎藤微分方程式系の解のつくる局所定数層を $M_{n/2}|_{S\setminus D}$ とすると次の形にまとめられる。

$$M_{n/2}|_{S\setminus D} \cong \mathbb{C}_{S\setminus D}\cdot 1 \oplus \sum_{i=0}^{\mu} \mathbb{C}_{S\setminus D}\beta_i .$$

次に $d_S : \mathcal{O}_S \to \Omega_S^1$ を外微分とし、$d_S M_{n/2}|_{S\setminus D} = \sum_{i=0}^{\mu} \mathbb{C}_{S\setminus D} d_S\beta_i$ の上の非退化二次形式を考察すると、我々の扱っている関数の型を具体的にあらわす行列、即ち A_μ 型のカルタン行列を得る。以下まず residue pairing J の考察より始める。これは斎藤氏の higher residue pairing を用いて次で定まる。

$$K\left(\frac{\partial}{\partial t_i}S, \frac{\partial}{\partial t_j}S\right) = J\left(\frac{\partial}{\partial t_i}, \frac{\partial}{\partial t_j}\right)\partial^{-n-1} .$$

1. Residue pairing

$S \ni (t_1,\dots,t_\mu) \overset{\pi}{\longmapsto} (t_2,\dots,t_\mu) \in T \underset{open}{\subset} \mathbb{C}^{\mu-1}$ を projection とし、$\mathcal{G} = \{g \in \pi_*\Theta_S \mid [g,\partial_1]=0\}$ とおく。$J : \mathcal{G}\times\mathcal{G} \to \mathcal{O}_T$ は、$g_{ij} = J\left(\frac{\partial}{\partial t_i}, \frac{\partial}{\partial t_j}\right)$ とおくと次の形に書く事ができる。

$$g_{ij} = \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^{n+1} \int_{\substack{\left|\frac{\partial F}{\partial x_k}\right| = \varepsilon_k \\ k=0,\dots,n}} \frac{\frac{\partial F}{\partial t_i}\cdot\frac{\partial F}{\partial t_j}}{\frac{\partial F}{\partial x_0}\cdots\frac{\partial F}{\partial x_n}}\, dx_0\cdots dx_n .$$

A_μ 型では $g(x) = \varphi'(x)/(\mu+1) = x^\mu + s_1 x^{\mu-1} + \cdots + s_\mu$ とおいて

$$g_{ij} = \frac{1}{2^n(\mu+1)}\cdot\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|g(x)|=\varepsilon}\frac{x^{i+j-2}}{g(x)}\,dx .$$

そこで $a_j = (2\pi\sqrt{-1})^{-1}\int_{|g(x)|=\varepsilon}\frac{x^{\mu-1+j}}{g(x)}\,dx$ とおくと、証明に際、

し、しばしば重要な役割を演ずる次の関係式が得られる。

$$\sum_{\substack{\lambda+\nu=m \\ \lambda,\nu\geq 0}} s_\lambda a_\nu = \begin{cases} 1 & (m=0) \\ 0 & (m\neq 0) \end{cases} .$$

定め方よりわかる通りこれは $g(x)$ にのみ依存する式であるから、s_j の中味は異なるが、D, E 型でも成り立つ式である。これを用い、$a_{-1}=\cdots=a_{-(\mu-1)}=0$ に注意すれば、

$$A_\mu : \begin{cases} g_{ij} = \dfrac{1}{2^n(\mu+1)}\, a_{i+j-\mu-1} \\ g^{ij} = 2^n(\mu+1)\, s_{\mu+1-i-j} \end{cases} \qquad (1\leq i,j\leq \mu) .$$

但し $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ である。

2. 接続 ∇ と N.

接続 $\nabla : \Theta_S \longrightarrow \Theta_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \Omega^1_S$ は $\nabla \frac{\partial}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{\mu} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t_i}} \frac{\partial}{\partial t_j} \otimes dt_i$ で定められる。$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t_i}} \frac{\partial}{\partial t_j} = \sum_{l=1}^{\mu} \Gamma^l_{ij} \frac{\partial}{\partial t_l}$ とおく時 $\Gamma^l_{ij} \in \mathcal{O}_S$ は、∇ が torsion free かつ metric connection である事より微分幾何学における Gauß 方程式にあらわれるクリストッフェルの3添字記号と全く同様に計算でき、しかもそれは次の形の単純な公式にまとめる事ができる。

$$\Gamma^l_{ij} = -\frac{l}{\mu+1}\, a_{i+j-l-\mu-2} .$$

D型については $\Gamma^l_{ij} = -\frac{2l-1}{2(\mu-1)}\, a_{i+j-l-\mu}$, $(i,j\leq\mu-1)$, $\Gamma^l_{i\mu}=0$ 。E型は g_{ij} のみではこのような単純な公式を得る

事はできない。 以下 $t_{\mu+1} := 0$, $t_{\mu+2} := 1$ とする。

$\mathcal{O}_S$-準同型 $N : \Theta_S \longrightarrow \Theta_S$ は $t_1 \frac{\partial}{\partial t_i} \zeta = N(\frac{\partial}{\partial t_i}) \partial_1^{-1} \zeta + A(\frac{\partial}{\partial t_i}) \zeta$ より定まるものであるが、困難なく $N(\frac{\partial}{\partial t_i}) = -\frac{\partial}{\partial t_i} E + (r+1) \frac{\partial}{\partial t_i}$ がわかる。$E := w(\partial_1)$ は Euler operator, r は $E\zeta = r\zeta$ より定まる有理数で、A_μ 型では $r = \frac{n}{2} + \frac{1}{\mu+1}$ である。そこで $N(\frac{\partial}{\partial t_i}) = \sum_{l=1}^{\mu} n_{li} \frac{\partial}{\partial t_l}$ とおくと

$$A_\mu : \qquad n_{li} = \frac{n}{2} \delta_{li} + \frac{l}{\mu+1} \sum_{j=\mu+2+l-i}^{\mu+2}{}' t_j a_{i+j-l-\mu-2} \quad .$$

3. 解空間の構成

序でのべた様に以下 $S \setminus D$ 上で考える。$S \setminus D$ 上では x についての代数方程式 $\psi(x) = 0$ は重根をもたない。その任意の根を β とする時、示すべきは、

$$\begin{cases} Q_{n/2}(\frac{\partial}{\partial t_i}) \beta = 0 , & i = 1, \ldots, \mu , \\ P(\frac{\partial}{\partial t_i}, \frac{\partial}{\partial t_j}) \beta = 0 , & i, j = 1, \ldots, \mu , \end{cases}$$

である。ここでは上の方のみを考察する。

$\psi(\beta) = t_1 + t_2 \beta + \cdots + t_\mu \beta^{\mu-1} + \beta^{\mu+1} = 0$ を微分する事により次は容易にわかる。($\psi(x) = 0$ は重根をもたないから $\psi'(\beta) \neq 0$)

Lemma. $\quad \frac{\partial}{\partial t_i} \beta = - \beta^{i-1} / \psi'(\beta)$.

Lemma. $\quad \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_1} \beta = \frac{1}{\psi'(\beta)} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{x^{i-1}}{\psi(x)} \right\} \Big|_{x=\beta}$.

行列 S を次で定める：

$$S = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & -s_\mu \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -s_2 \\ 0 & & 1 & -s_1 \end{bmatrix}。$$

Lemma. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\psi'(x)},\dots,\frac{x^{\mu-1}}{\psi'(x)}\right)\Big|_{x=\beta} S^{\delta}$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{\delta}}{\psi'(x)},\dots,\frac{x^{\mu-1+\delta}}{\psi'(x)}\right)\Big|_{x=\beta} - \frac{1}{\mu+1}\frac{d}{dx}(1,\dots,x^{\mu-1})\Big|_{x=\beta}\tilde{R}\Lambda^{\mu-\delta}$$

$(0 \le \delta \le \mu)$。

但し

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} a_0 & \cdots & a_{\mu-1} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}。$$

($\delta = \mu+1$ についても類似の公式が得られる。)

これらの Lemmas を用い、$\mathcal{O}_S$-準同型 $w: \Theta_S \to \Theta_S$ が基底 $\{\frac{\partial}{\partial t_1},\dots,\frac{\partial}{\partial t_\mu}\}$ に関して行列 $\psi(S)$ で表現される事に注意して $w(\frac{\partial}{\partial t_1})\partial_1\beta$ $(\partial_1 = \frac{\partial}{\partial t_1})$ を計算する。

注意：$Z = X \times_T S$ を X と S の T 上のファイバー積、$p: Z \to S$, $\pi: Z \to X$ を射影とする時、φ の critical locus $C \subset X$, $\hat{C} := \pi^{-1}(C)$ に対し次の完全系列をうる。

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & p_*\mathcal{O}_{\hat{C}} \arrow[r, "p_*(F)x"] & p_*\mathcal{O}_{\hat{C}} \arrow[r] & \varphi_*\mathcal{O}_C \arrow[r] & 0 \\ & \xi \in \Theta_S \arrow[u, "\wr"'] \arrow[r, "w"] & \Theta_S \arrow[u, "\wr"'] & & \end{tikzcd}$$

ここで x の積：$p_*\mathcal{O}_{\hat{C}} \to p_*\mathcal{O}_{\hat{C}}$ を $p_*\mathcal{O}_{\hat{C}}$ の基 $\{1, x, \dots, x^{\mu-1}\}$ に関して表現する行列が S にほかならない。これより w

が $\psi(S)$ によって表現される事は明らかである。

$w\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)\partial_1\beta$ の計算の概略は

$$
\begin{aligned}
&\left(w\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)\partial_1\beta, \cdots, w\left(\frac{\partial}{\partial t_\mu}\right)\partial_1\beta\right) \\
&\quad = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}\partial_1\beta, \cdots, \frac{\partial}{\partial t_\mu}\partial_1\beta\right)\psi(S) \\
&\quad = \frac{1}{\psi'(\beta)}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\psi'(x)}, \cdots, \frac{x^{\mu-1}}{\psi'(x)}\right)_{|x=\beta}\psi(S)
\end{aligned}
$$

ここで $\psi(S) = \sum_{i=1}^{\mu} t_i S^{i-1} + S^{\mu+1}$ であるから

$$
= \frac{1}{\psi'(\beta)}\left\{
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(\frac{\sum_{i=1}^{\mu} t_i x^{i-1} + x^{\mu+1}}{\psi'(x)}, \cdots, \frac{\sum_{i=1}^{\mu} t_i x^{i-1} + x^{\mu+1}}{\psi'(x)}\cdot x^{\mu-1}\right)_{|x=\beta} \\
&- \frac{1}{\mu+1}\frac{d}{dx}\left(1, x, \cdots, x^{\mu-1}\right)_{|x=\beta}\tilde{R}\left(t_1\Lambda^{\mu} + t_2\Lambda^{\mu-1} + \cdots + t_\mu\Lambda\right) \\
&- \frac{1}{\mu+1}\frac{d}{dx}\left(a_0x + a_1, \cdots, a_0x^{\mu} + a_1x^{\mu-1} + \cdots + a_\mu\right)_{|x=\beta}.
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
= \frac{1}{\psi'(\beta)}\left\{
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi(x)}{\psi'(x)}, \cdots, \frac{\psi(x)}{\psi'(x)}x^{\mu-1}\right)_{|x=\beta} \\
&- \frac{1}{\mu+1}\frac{d}{dx}\left(1, x, \cdots, x^{\mu-1}\right)_{|x=\beta}
\begin{bmatrix} a_0 & \cdots & a_{\mu-1} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & t_\mu & \cdots & t_2 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & t_\mu \\ & & & 0 \end{bmatrix} \\
&- \frac{1}{\mu+1}\frac{d}{dx}\left(a_0x + a_1, \cdots, a_0x^{\mu} + \cdots + a_\mu\right)_{|x=\beta}
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
= \frac{1}{\psi'(\beta)}\frac{d}{dx}\left(\cdots, \overset{i\text{列目}}{\overset{\vee}{\frac{\psi(x)}{\psi'(x)}x^{i-1}}} - \frac{1}{\mu+1}\sum_{l=0}^{i}\sum_{j=\mu+2+l-i}^{\mu+2} t_j a_{i+j-l-\mu-2}x^{l}, \cdots\right)_{|x=\beta}
$$

$$
= \frac{1}{\psi'(\beta)}\left(\cdots, \beta^{i-1} - \frac{1}{\mu+1}\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=\mu+2+l-i}^{\mu+2} t_j a_{i+j-l-\mu-2}\, l\beta^{l-1}, \cdots\right)
$$

即ち、 $w\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)\partial_1\beta = \frac{1}{\psi'(\beta)}\left\{\beta^{i-1} - \frac{1}{\mu+1}\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=\mu+2+l-i}^{\mu+2} t_j a_{i+j-l-\mu-2}\, l\beta^{l-1}\right\}$。

これが得られれば、今までの結果より

$$Q_{n/2}\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)\beta = 0, \qquad i=1,\cdots,\mu,$$

は容易にわかる。$\varphi(X)=0$ の根を $\beta_0,\cdots,\beta_\mu$ として

これは次の $\mathcal{O}_{S\setminus D}$-同型にまとめる事ができる。

$$M_{n/2}|_{S\setminus D} := \mathcal{H}om_{\text{left-}\mathcal{D}_S}(\mathcal{M}^{(n/2)}, \mathcal{O}_S)|_{S\setminus D} \cong \mathcal{O}_{S\setminus D}1 \oplus \sum_{i=0}^{\mu}\mathcal{O}_{S\setminus D}\beta_i .$$

但し $\mathcal{M}^{(n/2)}$ は $Q_{n/2}\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)$, $P\left(\frac{\partial}{\partial t_i}, \frac{\partial}{\partial t_j}\right)$ $(i,j=1,\cdots,\mu)$ より生成される $\mathcal{D}_S$ の left-ideal $\mathcal{J}$ による quotient module である。

$$\mathcal{M}^{(n/2)} = \mathcal{D}_S/\mathcal{J}$$

上の同型は $\mathcal{M}^{(n/2)}$ の生成元 $m_{n/2}$ を用いて evaluation map $\mathcal{H}om_{\text{left-}\mathcal{D}_S}(\mathcal{M}^{(n/2)}, \mathcal{O}_S)|_{S\setminus D} \ni u \longmapsto u(m_{n/2}) \in \mathcal{O}_{S\setminus D}$ で与えられる。その単射性は明らかである。全射である事は $M_{n/2}|_{S\setminus D}$ が locally free $\mathcal{O}_{S\setminus D}$-module of rank $\mu+1$ であるという既知の事実に注意すると、ヤコビアン $\det(\partial\beta_i/\partial t_j)_{i,j=1,\cdots,\mu} \neq 0$ を示せば良いことがわかる。即ち discriminant set D の定義方程式は $\Delta = \left(\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu+1}(-1)^{\frac{\mu(\mu+1)}{2}}\left\{\prod_{0\leq i<j}(\beta_i-\beta_j)\right\}^2$ で、$\det\left(\frac{\partial\beta_i}{\partial t_j}\right) = \left\{(-1)^{\frac{\mu(\mu+1)}{2}}\prod_{i>j\geq 0}(\beta_i-\beta_j)\right\}^{-1} = \text{const.}\cdot\Delta^{-1/2} \neq 0$ on $S\setminus D$ より $1, \beta_1, \cdots, \beta_\mu$ の $\mathcal{O}_{S\setminus D}$ 上の線形独立性がわかる。

4. $d_S M_{n/2}$ 上の非退化二次形式

evaluation map と S 上の外微分 d_S の合成写像による

$M_{n/2}$ の像を $d_S M_{n/2}$ とする。

$$M_{n/2} = \mathcal{H}om_{\text{left } \mathcal{D}_S}(\mathcal{M}^{(n/2)}, \mathcal{O}_S) \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \Omega_S^1$$

$$u \longrightarrow u(m_{n/2}) \longrightarrow d_S u(m_{n/2}) \quad .$$

先の結果より $d_S M_{n/2}|_{S\setminus D} = \sum_{i=0}^{\mu} \mathbb{C}_{S\setminus D}\, d_S \beta_i$。次に $\Theta_S^\nabla := \{\partial \in \Theta_S \mid \nabla \partial = 0\}$ とおき $\{\partial_1, \ldots, \partial_\mu\}$ をその $\mathbb{C}_S$-基底，$\{\partial_1^*, \ldots, \partial_\mu^*\}$ を J に関する双対基底とする。この時 $d_S M_{n/2}|_{S\setminus D}$ の上に次のような非退化二次形式 I が得られ，これを介して我々の考察している関数の型を具体化する事ができる。即ち I は $I(d_S\alpha, d_S\alpha') := \sum_{\lambda=1}^{\mu} \langle d_S\alpha, \partial_\lambda \rangle \langle d_S\alpha', w(\partial_\lambda^*) \rangle$，$d_S\alpha, d_S\alpha' \in d_S M_{n/2}|_{S\setminus D}$，で定義され，$\chi(x) = 0$ の根 $\beta_0, \ldots, \beta_\mu$ に対し次の値をとる。

$$I(d_S\beta_\iota, d_S\beta_\kappa) = \begin{cases} -2^n + \dfrac{2^n}{\mu+1} & (\iota = \kappa) \\ \dfrac{2^n}{\mu+1} & (\iota \neq \kappa) \end{cases} \quad .$$

この証明は初歩的なものであるが，最初にあげた基本関係式が如実にあらわれるものの一つで興味深い。この結果を使い $\alpha_i = (\beta_{i-1} - \beta_i)/\sqrt{-2^n}$ $(i = 1, \ldots, \mu)$ とおけば A_μ 型の Cartan 行列は直ちに得られる。

- $d_S M_{n/2}|_{S\setminus D} = \bigoplus_{i=1}^{\mu} \mathbb{C}_{S\setminus D}\, d_S\alpha_i$

- $$\left(I(d_S\alpha_i, d_S\alpha_j) \right)_{i,j=1,\ldots,\mu} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{bmatrix} .$$

5、 Galois 群と Weyl 群

鏡映 $\tilde{\sigma}_{i-1,i} := id - I(\cdot, d_s\alpha_i)d_s\alpha_i$, $i=1,\cdots,\mu$, を用いて $W := \langle \tilde{\sigma}_{i-1,i} \mid i=1,\cdots,\mu \rangle$ とおけば、これが A_μ 型の Weyl 群 $\mathfrak{S}_{\mu+1}$ と同型となる。のみならず $d_sM_{\omega/2}|_{S\setminus D}$ が $\sum_{i=0}^{\mu} \mathcal{O}_{S\setminus D}\beta_i$ ($\mathcal{O}_{S\setminus D}1$ は除いて) と $\mathcal{O}_{S\setminus D}$-同型である事を考えれば本質的には W の生成元が体の拡大 $\mathbb{C}(\beta_0,\cdots,\beta_\mu)/\mathbb{C}(t_1,\cdots,t_\mu)$ の Galois 群を生成している事がわかり、次が示せる。

$$Gal(\mathbb{C}(\beta_0,\cdots,\beta_\mu)/\mathbb{C}(t_1,\cdots,t_\mu)) \cong W \cong \mathfrak{S}_{\mu+1} .$$

D_μ 型についても類似であるから結果のみ記しておく。

1. • $f(x_0,\cdots,x_n) = x_0^{\mu-1} + x_0x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$

• $F(\underline{x}, t_1,\cdots,t_\mu) = t_1 + t_2x_0 + \cdots + t_{\mu-1}x_0^{\mu-2} + t_\mu x_1 + f(\underline{x})$

• $\varphi(X) = t_1 + t_2X + \cdots + t_{\mu-1}X^{\mu-2} + X^{\mu-1} - \frac{t_\mu^2}{4}X^{-1}$

• $$g_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2^n(\mu-1)} a_{i+j-\mu} & (i,j \le \mu-1) \\ 0 & (i=\mu \text{ 又は } j=\mu \text{ かつ } (i,j)\neq(\mu,\mu)) \\ -\frac{1}{2^n} & (i=j=\mu) \end{cases}$$

$$g^{ij} = \begin{cases} 2^n(\mu-1)s_{\mu-i-j} & (i,j \le \mu-1) \\ 0 & (i=\mu \text{ 又は } j=\mu \text{ かつ } (i,j)\neq(\mu,\mu)) \\ -2^n & (i=j=\mu) \end{cases}$$

2. $\bullet$ $\begin{cases} \Gamma^{l}_{ij} = -\dfrac{2l-1}{2(\mu-1)}\, a_{i+j-l-\mu} & (i, j \leq \mu-1) \\ \Gamma^{l}_{i\mu} = 0 \end{cases}$

$\circ$ $n_{li} = \begin{cases} \dfrac{n}{2}\delta_{li} + \dfrac{2l-1}{2(\mu-1)} \displaystyle\sum_{j=\mu+l-i}^{\mu} \tilde{t}_j\, a_{i+j-l-\mu} & (i \leq \mu-1) \\ \left(\dfrac{n}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\delta_{l\mu} & (i=\mu) \end{cases}$

但し $\tilde{t}_j := t_j \quad (j \leq \mu-1)$, $\tilde{t}_\mu := 1$ 。

3. $\circ$ $\mathcal{H}om_{\mathrm{left}\,\mathcal{D}_S}(\mathcal{M}^{(n/2)}, \mathcal{O}_S)|_{S\setminus D} \cong \mathbb{C}_{S\setminus D}\cdot 1 \oplus \bigoplus_{i=1}^{\mu} \mathbb{C}_{S\setminus D}\sqrt{\beta_i}$ 。

但し $\beta_1, \cdots, \beta_\mu$ は $\psi(X) = 0$ の根。

4. $I(d_S 2\sqrt{\beta_i}, d_S 2\sqrt{\beta_k}) = \begin{cases} -2^{n} & (i=k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$ 。

$\begin{cases} \alpha_i := (\sqrt{\beta_i} - \sqrt{\beta_{i+1}})/\sqrt{-2^{n-2}} & (i=1,\dots,\mu-1) \\ \alpha_\mu := (\sqrt{\beta_{\mu-1}} + \sqrt{\beta_\mu})/\sqrt{-2^{n-2}} \end{cases}$

とおくと

$\circ$ $d_S M_{n/2}|_{S\setminus D} = \bigoplus_{i=1}^{\mu} \mathbb{C}_{S\setminus D}\, d_S\alpha_i$

$\circ$ $\left(I(d_S\alpha_i, d_S\alpha_j)\right)_{i,j=1,\dots,\mu} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 & 0 \\ & 0 & & \ddots & 2 & -1 & -1 \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5. $\begin{cases} \sigma_{i\,i+1} := id - I(\cdot, d_S\alpha_i)\, d_S\alpha_i & (1 \leq i \leq \mu-1) \\ \tau := id - I(\cdot, d_S\alpha_\mu)\, d_S\alpha_\mu \end{cases}$

とおき $W := \langle \alpha_{i,i+1}, \tau \mid i=1,\dots,\mu-1 \rangle$ とおくと

・ $W \cong \mathfrak{S}_\mu \ltimes (\mathbb{Z}_2)^{\mu-1}$.

Galois 群との関連は体の拡大の状況を次のようにおくと

$$
\begin{array}{l}
L := \mathbb{C}(\sqrt{\beta_1}, \dots, \sqrt{\beta_\mu}) \\
| \\
K := \mathbb{C}(\beta_1, \dots, \beta_\mu) \\
| \\
k := \mathbb{C}(t_1, \dots, t_\mu) \\
| \\
k_0 := \mathbb{C}(t_1, \dots, t_{\mu-1}, t_\mu^2)
\end{array} ,
$$

$$W \cong Gal(L/k) .$$

References

[1] P. Griffith and J. Harris, Principles of algebraic geometry, John Wiley and Sons, New York (1978).

[2] T. Oda, K. Saito's Period map for holomorphic functions with isolated critical points, to appear in Algebraic Geometry, Sendai, 1985 (T. Oda, ed.), Advanced Studies in Pure Math. 10, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford.

[3] K. Saito, Period mapping associated to a primitive form, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ. Vol 19, No.3, 1983, 1231-1264.

[4] K. Saito, Regular system of weights and associated singularities, to appear in Complex Analytic Singularities (T. Suwa and P. Wagreich, eds.), Adv. Studies in Pure Math. 8, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1987, 479 - 526.

//.