数理解析研究所講究録
第 634 巻 1987 年 110-113

多重種数有界の2-次元特異点は Q-Gorenstein 特異点 である

産医大　石井 志保子

● 序。

正規孤立特異点 (X, x) が Q-Gorenstein 特異点 であるとは ある $r \geqq 1$ について X-{x} 上で正則な 非零値 r-重 n-形式 が存在することである。 但し ここで n は X の次元を表す。このような 正整数 r の中で最小のものを 特異点 (X, x) のindex と呼ぶ。よく知られているように、Gorenstein 特異点は index 1 のQ-Gorenstein Cohen-Macaulay 特異点 と同値 である。 また特に n = 2 の場合、正規特異点はいつもCohen-Macaulay 特異点であるから、Gorenstein 特異点 と index 1 の Q-Gorenstein特異点は同値である。上記のような 非零値正則形式があると 計算がやり易くなることがしばしばあるので、そのようなものが存在するための良い十分条件を求めることは重要な問題のように思われる
我々の仮説は以下の通りである。

「$\varkappa_* = 0$ なる正規孤立特異点は Q-Gorenstein特異点である。」

ここで $\varkappa_*$ は多重種数 δ_m([5]) の増大度によって定義された特異点の小平次元である。

この小稿では 2次元の場合に上記の仮説が正しいことを紹介する(定理3.1)。 その系として $\varkappa_* = 0$ なる 2次元正規特異点は 単純楕円型かカスプか又はそれらの商特異点であることがわかる。

ところで $\varkappa_* \leqq 0$ なる特異点は2つのグループに分けられる; $\varkappa_* = -\infty$ なるものと $\varkappa_* = 0$ なるものである。 前者は有理特異点となるので Artin ([1]) の結果により Q-Gorenstein性はわかっている。 よって 我々の結果とあわせると標題の主張が証明されたことになる。

尚、小山陽一氏は解消グラフの分類論を用いて2次元純楕円型特異点の場合に定理3.1を証明されたそうである。

● 1。 定義と基本的な事実。

(X,x) を正規孤立特異点とする。 次元 n はここでは単に2以上とする。渡辺氏([5])の定義した多重種数 δ_m はつぎのように表される。よってこれを δ_m の定義と思うことにする。

命題1.1([5]). $f: \tilde{X} \to X$ を特異点 (X, x) の良解消、$E = f^{-1}(x)_{red}$ とする。

$$\delta_m(X,x) = \dim \Gamma(\tilde{X}-E,\ O(mK_{\tilde{X}}))/\Gamma(\tilde{X},\ O(mK_{\tilde{X}}+(m-1)E),$$

定義1.2. 特異点 (X, x) の 小平次元 $\varkappa_*$ を次のように定義する。

☆ $\delta_m(X, x) = 0$ $(\forall m \in N)$ の時、$\varkappa_*(X, x) = -\infty$,

☆ $\delta_m(X, x) \neq 0$ $(\exists m \in N)$ の時、$\varkappa_*(X, x) = \sup \delta_m(X,x)$ の m に関する増大度。

命題1.3. $\varkappa_*(X,x) \leqq 0 \to \tilde{X} - E$ 上の m-重正則 n-形式 は E 上で高々 m 位の極を持つ。

命題 1.4. 正規特異点 (X, x) が特に Q-Gorenstein 特異点ならば

$$\varkappa_*(X, x) \leqq 0 \quad \to \delta_m(X, x) \leqq 1 \ (\forall m \in N).$$

定義 1.5. 正規孤立特異点 (X, x) に対し $\delta_m(X,x) \neq 0$ となる最小の m を (X, x) の δ-index と呼ぶ。

●2。 2-次元特異点のリーマン・ロッホ定理。

以後、正規特異点は常に2-次元 $f: \tilde{X} \to X$ は良解消、$E = f^{-1}(x)_{red}$ と表すことにする。E の既約成分を、$E_1, E_2 \cdots, E_s$, また各E_i の 附値を ν_i と表す。

補題2.1. $\theta \in \Gamma(\tilde{X}-E,\ O(mK_{\tilde{X}}))$ の零点集合が非特異である時

$$R^1 f_* O(mK_{\tilde{X}} - \sum_i \nu_i'(\theta)E_i)) = 0,$$

ただし $\nu_i'(\theta) = \nu_i(\theta) - \lceil \nu_i(\theta)/m \rceil$.

補題2.2. 一般元 $\theta \in \Gamma(\tilde{X}, O_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}}+mE))$ に対し次の2つの等式が成立する。

$$f_* O(mK_{\tilde{X}} - \Sigma \nu_i'(\theta)E_i) = f_* O(mK_{\tilde{X}}+(m-1)E),$$

$$R^1 f_* O(mK_{\tilde{X}} - \Sigma \nu_i'(\theta)E_i) = 0$$

補題2.3.　θ を $\Gamma(X, O(mK_{\tilde{X}}+mE))$ の一般元とすると、

$$\delta_m(X,x) = -1/2(mK'-\Sigma\nu_i'(\theta_m)E_i)((m-1)K'-\Sigma\nu_i'(\theta_m)E_i) + \varepsilon(m),$$

但し $\varepsilon(m)$は有界、K'は $K_{\tilde{X}}$ に数値的同値な E 上にサポートをもつ Q-divisor.

証明。 Morales のリーマン・ロッホ 定理([4]) に補題2.2 を適用すればよい。

●3。 主定理。

記号はすべて 前章 と同じとする。

定理3.1. (X, x) を $\varkappa_*(X,x) = 0$ をみたす δ-index が r の2-次元正規特異点とすると (X, x) は index が r の Q-Gorenstein 特異点である。

証明。 一般元 $\theta_m \in \Gamma(X-E, O(mrK_{\tilde{X}}))$をとると これは命題1.3 により $\Gamma(X, O(mrK_{\tilde{X}}+mrE))$ の一般元であるから補題2.3を用いて

$$\delta_m(X,x) = -1/2(mr)^2(K'-E^{(m)})^2+O(m)$$

を得る。ここで $E^{(m)} = \Sigma\nu_i'(\theta_m)/mrE_1$ また$O(m)$ は高々 1位の増大度をもつ。
条件$\varkappa_*(X,x) = 0$より $\delta_m(X,x)/(mr)^2 \underset{m\to\infty}{\to} 0$. よって $(K'-E^+)^2 = 0$, ここで E^+ は $E^{(m)}$ の極限divisor。 E の交点行列は 負定値だから $K' = E^+$ が出る。 この条件を数値的にみてやれば θ_1 の $\tilde{X}$-E での零点がないことが出る。 詳細は [6]を参照。

系3.2. 2-次元正規特異点 (X,x) が $\varkappa_*(X,x) \leqq 0$ を満たせば $\delta_m(X,x) \leqq 1$ $(\forall m \in N)$ が満たされる。

証明。 定理により (X,x) は Q-Gorenstein であることがわかったから命題1.4を適用すればよい。

系3.3. 2-次元正規地特異点 (X, x) が $\varkappa_*(X,x) = 0$ をみたすとき(X, x) は 単純楕円型かカスプか又はそれらの商特異点である。

証明。 δ-index が1 の場合は 系3.2 より (X,x) は 純楕円型 Gorenstein 特異点だから [5] により 単純楕円型かカスプである。 δ-index が 2 以上の場合、 標準被覆 $\pi: Y \to X$ をとれば Y 上の特異点は 純楕円型 Gorenstein特異点 になる ([3])。

●文献。

[1] Artin, M.:On isolated rational singularities of surfaces.
Amer. J. Math., 88, 129-136 (1966).

[2] Ishii, S.:Small deformations of normal singularities.
Math. Ann. 275, 139-148 (1986).

[3]_________:Isolated Q-Gorenstein singularities of dimension three.
Advanced Studies in Pure Math. 8, Complex Analytic Singularities 1986 (to appear) .

[4] Morales, M.:Calcul de quelques invariants des singulariés de surface normale.
Monographie N° 31, L'enseignement Mathematique. 191-203.

[5] Watanabe, K.:On plurigenera of normal isolated singularities I.
Math. Ann. 250, 65-94 (1980).

[6] Ishii, S.:Two dimensional singularities with bounded pluri-genera δ_m are Q-Gorenstein singularities. preprint.