数理解析研究所講究録
第 634 巻 1987 年 114-123

Decomposable な algebraic 3-knot の存在

東大理 佐伯 修 (Osamu Saeki)

§1. Introduction.

f を $\mathbb{C}^{n+1}$ の原点 $\vec{0}$ の近傍で定義された正則関数で、次の性質 (＊1)〜(＊3) を満たすものとする。

(＊1) $f(\vec{0})=0$

(＊2) f は $\vec{0}$ を isolated critical point に持つ

(＊3) $n=1$ の時は、f は $\vec{0}$ で locally irreducible

この時、$K_f = f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^{2n+1}$ は S_ε^{2n+1} の smooth closed connected $(2n-1)$-dimensional submanifold になる ([9])。ここで、$S_\varepsilon^{2n+1} = \{ z \in \mathbb{C}^{n+1} ; \|z\| = \varepsilon \}$ であり、$\varepsilon > 0$ は十分小さいものとする。この時、K_f の S^{2n+1} 内での isotopy class を f に付随した <u>algebraic knot</u> という。特に K_f の次元を明記したい時には、algebraic $(2n-1)$-knot と呼ぶ。

（K_f は一般には sphere とはならないことに注意する。）

一般に、S^{2n+1} 内の smooth closed connected $(2n-1)$-dimensional submanifold の isotopy class を $(2n-1)$-knot と呼ぶ。knot が decomposable（分解可能）とは、２つの non-trivial knots の connected sum（連結和）に isotopic の時をいう。ここで trivial knot とは、S^{2n+1} に standard に埋め込まれた S^{2n-1} の isotopy class のこととする。また、decomposable でない knot のことを prime という。

S^3 内の knot の場合（すなわち $n=1$ の時）は、algebraic knot はある種の iterated torus knot となり（[1] 参照）、常に prime であることが古くから知られている。そこで次のような問題が考えられる。

問題（[3], [4]）　algebraic knot は prime か？

この問題に対する答えは、$n \geqq 3$ の時は No であることがわかっている。実際次が成り立つ。

定理１（[8]）　g を $\mathbb{C}^2$ の $\vec{0}$ の近傍で定義された正則関数で、(*1)～(*3) を満たし、かつ $g=0$ の Puiseux 展開は特性対を２つ以上持つものとする。さらに h を $\mathbb{C}^{n-1}$ の $\vec{0}$ の近傍で

定義された、(※1),(※2)を満たす正則関数とする。この時、$n \geqq 3$ ならば、$f(z_1, \cdots, z_{n+1}) = g(z_1, z_2) + h(z_3, \cdots, z_{n+1})$ によって定義される正則関数 f に付随した algebraic $(2n-1)$-knot は decomposable である。

(Puiseux 展開については、たとえば [1] 参照)

例1　$g_0(x, y) = y^4 - 2x^3y^2 - 4x^5y + x^6 - x^7$ とする。$g_0 = 0$ を Puiseux 展開すると、$y = x^{3/2} + x^{7/4}$ であり、その特性対の数は2となる。よって g_0 は上の定理の仮定を満たし、実際に decomposable な algebraic $(2n-1)$-knot $(n \geqq 3)$ が存在することがわかる。

今回の我々の結果は、$n=2$ の時にも同様のことが成り立つことを主張するものである。

定理2　g を定理1の仮定を満たす正則関数とし、$f(x, y, z) = g(x, y) + z^r$ (r は2以上の整数)で正則関数 f を定義する。この時もし f に付随した algebraic 3-knot (S^5, K_f) において K_f が $\mathbb{Z}$-homology 3-sphere ならば、(S^5, K_f) は decomposable である。

<u>例2</u>　例1における g_0 を考えると、g.c.d.$(r, 156) = 1$ ならば K_f が homology 3-sphere となることがわかる。したがって、実際に decomposable な algebraic 3-knot が存在することがわかる。

(注)　① $n=2$ の時は、Neumann [10] により、3-manifold K_f は irreducible なことが知られている。

② 定理2で、K_f が homology 3-sphere という仮定は、技術的な仮定であって、必要な条件かどうかはわからない。

定理2の証明は、本質的には $n \geqq 3$ の場合の定理の証明と同様の手法で行なわれる。一般に algebraic knot は [9] により simple fibered knot ([2], [11]) と呼ばれるものになるが、$n \geqq 3$ の時はそれらは Seifert matrix (定義は §2 参照) で完全に分類される ([2], [6])。そしてその分類を使うことにより decomposable な algebraic knot の存在が示せる。ところが $n=2$ の時はこの分類は成立しない ([1])。しかし、必ずしも fibered とは限らない simple 3-knots を考えると、埋め込まれた3次元多様体が homology 3-sphere の時は、Seifert matrix による分類が可能になる。§2ではその分類を述べ、§3でそれを使って定理2を証明する。

§2. Simple な homology 3-sphere knot の分類

Σ を ($\mathbb{Z}$-) homology 3-sphere とする。3-knot (S^5, K) で、$K \cong \Sigma$ なるもののことを Σ-knot と呼ぶことにする。Σ-knot K が <u>simple</u> とは、$\pi_1(S^5 - K) \cong \mathbb{Z}$ の時をいう。

F を S^5 の oriented 4-submanifold で、$\partial F = K$ なるものとする。この時 bilinear map $\Gamma : H_2(F;\mathbb{Z}) \times H_2(F;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ を $\Gamma(\alpha, \beta) = lk(\alpha, i_*\beta)$ で定義する。ここで lk は S^5 における linking number を表わし、$i : F \to S^5 - F$ は positive normal 方向への平行移動である。この Γ のことを <u>Seifert form</u> と呼び、Γ を matrix で表わしたものを <u>Seifert matrix</u> と呼ぶ。

次に、L, L' を integral square matrices とする。ある unimodular matrix P があって $L' = PL\,{}^tP$ となる時、L と L' は <u>congruent</u> であるという。また、

$$L_1 = \left(\begin{array}{c|cc} L & 0 & \\ \hline \begin{matrix} * \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{array}\right), \quad L_2 = \left(\begin{array}{c|cc} L & * & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

なる形の matrix を L の <u>enlargement</u> といい、逆に L は L_1, L_2 の <u>reduction</u> という。そして、congruence, enlargement, reduction によって生成される、integral square matrices の間の同値関係を <u>S-equivalence</u> と呼ぶ。

以上のような定義のもとで、simple Σ-knot は次のように分類できる。

定理3（[12]）　任意の homology 3-sphere Σ に対し、各 Σ-knot に Seifert matrix を対応させる写像

$$\Phi_\Sigma : \left\{\begin{array}{l}\text{simple}\\ \Sigma\text{-knots}\\ \text{in } S^5\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{integral square matrix } L \text{ s.t.}\\ \quad \det(L+{}^tL)=1\\ \quad \operatorname{sign}(L+{}^tL)\equiv 8\mu(\Sigma) \pmod{16}\\ \text{の } S\text{-equivalence classes}\end{array}\right\}$$

は well-defined で bijective。ここで $\mu(\Sigma)$ $(\in \{0,1\})$ は Σ の Rohlin invariant を表わす。

（Rohlin invariant については [5] 参照）

定理3は、4次元多様体のいくつかの補題（[11, §4]）を使って Levine [7] の議論を適用すれば証明できる。くわしくは [13] 参照。

§3. Algebraic 3-knot の decomposability の判定

この節では algebraic 3-knot (S^5, K_f) で、K_f が homology 3-sphere のもののみを考える。[9] より (S^5, K_f) は simple になる。しかも algebraic knot は fibered だから、Seifert matrix は unimodular になる。以後 algebraic knot の

Seifert matrixとしては、このunimodularなmatrixのみを考える。

定理3を使えば、次の命題が容易に証明できる。

命題4（[12]）　(S^5, K_f) を algebraic 3-knot で、K_f が homology 3-sphere であるものとする。また、その unimodular な Seifert matrix を L とする。この時、次が成り立つ。

(1) $\mu(K_f)=0 \Rightarrow (S^5, K_f)$ は decomposable

(2) $\mu(K_f)\neq 0$ の時

(S^5, K_f) は decomposable

$\Leftrightarrow$ L は $L_1 \oplus L_2$ の形の unimodular matrix に congruent

[定理2の証明]

g に付随した algebraic knot を (S^3, K_g) とする。g は Puiseux 特性対を2つ以上持つので、（torus knot ではなく）本当の cable knot になる（たとえば [1] 参照）。したがって (S^3, K_g) の Seifert matrix L_g は、$L_g = L'_g \oplus L''_g$ のように直和の形となる（[8], [15]）。一方、$f(x,y,z) = g(x,y)+z^r$ だったから、(S^5, K_f) の Seifert matrix を L とおくと、[14]より

$$
\begin{aligned}
L &= L_g \otimes A \\
&= (L'_g \otimes A) \oplus (L''_g \otimes A)
\end{aligned}
$$

(A はある $(r-1) \times (r-1)$ - matrix)

となる。したがって、命題4より、(S^5, K_f) は decomposable となる。//

References

[1] N. A'Campo, Sur la monodromie des singularités isoleés d'hypersurfaces complexes, Invent. Math. 20 (1973), 147-169.

[2] A. Durfee, Fibered knots and algebraic singularities, Topology 13 (1974), 47-59.

[3] ———, Knot invariants of singularities, Algebraic Geometry (Arcata, 1974, Proc. Sympos. Pure Math., 29, AMS, Providence, R.I.) 1975, 441-448.

[4] ———, The low dimensional topology of singularities, Singularities (Arcata, 1983, Proc. Sympos. Pure Math., 40 - Part 1, AMS, Providence, R.I.) 1983, 321-326.

[5] F. Hirzebruch, W.D. Neumann and S.S. Koh, Differentiable manifolds and quadratic forms, Marcel Dekker, New York, 1971.

[6] M. Kato, A classification of simple spinnable structures on a 1-connected Alexander manifold, J. Math. Soc. Japan 26 (1974), 454-463.

[7] J. Levine, An algebraic classification of some knots of codimension two, Comment. Math. Helv. 45 (1970), 185-198.

[8] F. Michel and C. Weber, Nœuds algébriques décomposables, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 294 (1982), 493-496.

[9] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Math. Studies no. 61, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1968.

[10] W.D. Neumann, A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves, Trans. Amer. Math. Soc. 268 (1981), 299-344.

[11] O. Saeki, On simple fibered knots in S^5 and the existence of decomposable algebraic 3-knots, to appear in Comment. Math. Helv.

[12] ——, Knotted homology 3-spheres in S^5, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[13] ——, Decomposable な algebraic 3-knot の存在, 数理研講究録「低次元トポロジーの幾何と代数」, 1986.

[14] K. Sakamoto, The Seifert matrices of Milnor fiberings defined by holomorphic functions, J. Math. Soc. Japan 26 (1974), 714-721.

[15] Y. Shinohara, On the signature of knots and links, Trans. Amer. Math. Soc. 156 (1971), 273-285.