数理解析研究所講究録
第634巻 1987年 255-259

$\mathbb{P}^1$上のクンマー分岐被覆の自己同型群

九州大 工 桜井幸一 (Kouichi Sakurai)

$\mathbb{P}^1$上の超楕円型リーマン面のように、その moduli が、$\mathbb{P}^1$上の分岐跡によって決定されるものがある。この方面では、難波[4]，加藤崇雄[3]らの代数関数 $y^n=f(x)$，($f(x)$: 有理関数)によって定義される$\mathbb{P}^1$上の巡回被覆の研究があり、また最近加藤十吉[2]は、Hirzebruch [1]の$\mathbb{P}^2$ (or $\mathbb{P}^1$)上のクンマー分岐被覆の同変同型問題を調べている。彼らは、被覆の枚数と分岐跡の数に対して条件をつけて、定理を証明している。

この報告では、$\mathbb{P}^1$上の分岐跡が一般の場合のアーベル被覆(巡回とクンマー)の同変同型問題を考える。詳しくは[5]を参照

$B=\{b_1,\cdots,b_r\}$を$\mathbb{P}^1$上の相異なるr個の点集合とする。以下整数nに対し、nBで$n\sum_{i=1}^{r}b_i$なる$\mathbb{P}^1$上の因子を表す。Rを閉リーマン面とし、$\mathrm{Aut}(R)$でRの解析的自己同型群を表す。Tを$\mathrm{Aut}(R)$の部分群とする。このとき、(T,R)が$\mathbb{P}^1$上分岐因子

mB をもつ巡回被覆であるとは、T が m 次巡回群であり、かつ R/T が軌道体として $(\mathbb{P}^1, mB)$ に同型であると定義し、$(T, R) \in \mathcal{C}(\mathbb{P}^1, mB)$ と書く。以下では $B \subset \mathbb{P}^1$ が $\# B \geqq 4$ かつ $Aut(\mathbb{P}^1, B) = id.$ をみたす時、asymmetric、$\# B \leqq 3$ の時、elementary と呼ぶ。（$Aut(\mathbb{P}^1, B) = \{\phi \in Aut(\mathbb{P}^1)\,;\, \phi(B) = B\}$）

<u>定理1</u>　$B = \{b_1, \cdots, b_r\}$, $B' = \{b_1', \cdots, b_r'\}$ に対し $(T, R) \in \mathcal{C}(\mathbb{P}^1, mB)$ $(T', R') \in \mathcal{C}(\mathbb{P}^1, mB')$ とする。　（仮定）　$r \geqq 4$, $m \geqq 3$ かつ B: asymmetric　（結論）同型 $f: R \to R'$ が存在すれば、これは同変同型 (i.e. $f^{-1} T' f = T$) であり、同型 $\bar{f}: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ s.t. $\bar{f}(B) = B'$ を引きおこす。

<u>定理1′</u>　$B = \{b_1, \cdots, b_r\}$, $(T, R) \in \mathcal{C}(\mathbb{P}^1, mB)$ は定理1と同じとする。このとき　$Aut(R) = T\ (\cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

$B = \{b_1, \cdots, b_r\}$ を $\mathbb{P}^1$ 上の相異なる r 個の点とする。そして、$\pi: X \to \mathbb{P}^1$ を $\pi_1(\mathbb{P}_0^1, *) \xrightarrow{\alpha} H_1(\mathbb{P}_0^1; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} H_1(\mathbb{P}_0^1; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ なる $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Hurwicz 準同型 $\beta \circ \alpha$ の核に対応するガロア分岐被覆とする。（$\mathbb{P}_0^1 = \mathbb{P}^1 \setminus B$, $* \in \mathbb{P}_0^1$）X は自己同型群として被覆変換群 $T\ (\cong H_1(\mathbb{P}_0^1; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{r-1})$ をもつ閉リーマン面であり、軌道体として $X/T \cong (\mathbb{P}^1, mB)$。このとき (T, X) を分岐因子 mB をもつクンマー分岐被覆と呼び、$(T, X) = K(\mathbb{P}^1, mB)$ と書く。

定理2　$B=\{b_1,\dots,b_r\}$, $B'=\{b_1',\dots,b_r'\}$に対し $(T,X)=K(\mathbb{P}^1,nB)$, $(T',X')=K(\mathbb{P}^1,nB')$とする。(仮定) $r\geqq 3$, $n\geqq 4$ かつ Bの任意の部分集合は asymmetric or elementary (結論) 同型 $f: X\to X'$ が存在すれば、これは同変同型、したがって同型 $\bar{f}: \mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$ s.t. $\bar{f}(B)=B'$ を引きおこす。

定理2′　$B=\{b_1,\dots,b_r\}$, $(T,X)=K(\mathbb{P}^1,nB)$は定理2と同じとする。このときTは$\mathrm{Aut}(X)$の正規部分群であり,

$$\mathrm{Aut}(X)/T \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1,B)\cong\begin{cases} S_3 & (r=3)\\ id. & (r\geqq 4)\end{cases}$$

$L=\sum_{i=1}^{r} l_i$ を$\mathbb{P}^2$上の相異なる$r(\geqq 2)$本の line から成る因子とする。Lの特異点pに対して, $\gamma_p: \hat{\mathbb{P}}^2\longrightarrow\mathbb{P}^2$ をpでの$\mathbb{P}^2$の blowing up とする。 $D_i=\overline{\gamma^{-1}(l_i\setminus p)}$, $E_p=\gamma^{-1}(p)$, $d_i=E_p\cap D_i$, $D_p=\{d_1,\dots,d_m\}$ (mはpでのLの重複度)とおく。もし、Lが重複度4以上のすべての特異点pに対してD_pの任意の部分集合が asymmetric or elementary であるとき、Lを locally asymmetric と呼ぶ。

$L=\sum_{i=1}^{r} l_i$ は上述の因子とする。整数$n\geqq 2$に対し

$$\beta\circ\alpha;\ \pi_1(\mathbb{P}_0^2,*)\xrightarrow{\alpha}H_1(\mathbb{P}_0^2;\mathbb{Z})\xrightarrow{\beta}H_1(\mathbb{P}_0^2;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

($\mathbb{P}_0^2=\mathbb{P}^2\setminus L$, $*\in\mathbb{P}_0^2$)を考え、一次元の場合と同様にして、$\mathbb{P}^2$上分岐因子nLをもつクンマー分岐被覆 $(T,X)=K(\mathbb{P}^2,L)$が定義される。加藤十吉[2]の定理と同様にして

定理２を応用すると次の結果が得られる。

<u>定理３</u>　$\mathcal{L}=\sum_{i=1}^{r} l_i$, $\mathcal{L}'=\sum_{j=1}^{r'} l_j'$ に対し $(T, X)=K(\mathbb{P}^2, m\mathcal{L})$ $(T', X')=K(\mathbb{P}^2, m\mathcal{L}')$ とする。（仮定）$r\geqq 4$, $m\geqq 6$, 各 l_i $(i=1, \cdots, r)$ 上少なくとも３点 $\mathcal{L}$ の特異点が存在し，かつ $\mathcal{L}$ は locally asymmetric（結論）同型 $f: X\to X'$ が存在すれば，f は同変同型であり，同型 $\bar{f}: \mathbb{P}^2\to\mathbb{P}^2$ s.t. $\bar{f}(\mathcal{L})=\mathcal{L}'$ をひきおこす。

<u>定理３'</u>　$(T, X)=K(\mathbb{P}^2, m\mathcal{L})$ は定理３と同じとする。このとき T は $\mathrm{Aut}(X)$ の正規部分群であり，

$$\mathrm{Aut}(X)/T \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2, \mathcal{L})$$

我々は最近，定理２が $r\geqq 4$ かつ $m\geqq 11$ の仮定の下で成立することを証明した。したがって定理３は $m\geqq 11$ ならば $\mathcal{L}$ が locally asymmetric でなくても成立する。加藤十吉は［６］においてこの条件を $m\geqq 6$ とできないかと述べている。

参考文献

［１］Hirzebruch, F. : Arrangements of lines and Algebraic surfaces. Arithmetic and Geometry, Vol. II, Progress in Math. 36, 113-140 (1983), Birkhauser.

[2] Kato, M. : On biholomorphisms between some Kummer branched covering space of complex projective plane. preprint

[3] Kato, T. : Conformal equivaliance of compact Riemann surfaces. Japan J. Math. 7, 281-289 (1981).

[4] Namba, M. : Equivalence problem and automorphism groups of certain compact Riemann surfaces. Tsukuba J. Math. 5, 319-338 (1981).

[5] Sakurai, K. and Suzuki, M. : Equivalence problem and automorphisms of some abelian branched coverings of the Riemann sphere, preprint.

[6] Kato, M. : 複素射影平面に沿った Kummer 分岐被覆. トポロジーと代数幾何学 1985.